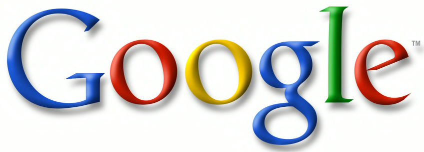


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

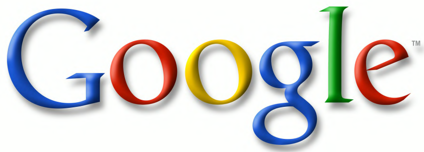
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

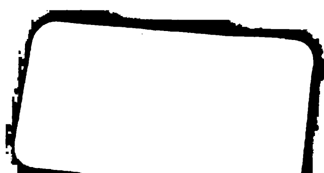
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


NYPL RESEARCH LIBRARIES

3 3433 06635000 4





Jahrbuch
OEA



Mathematics.

Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Max Henoch und **Emil Lampe.**

Band XIX.
Jahrgang 1887.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1890.


OCT
21
1890
NEW YORK

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört. Einige periodische Schriften, in welchen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4⁰. IX, X, XI.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. (2) VI. Paris. Au Bureau du Journal de Physique.

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. IX, X.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (3) III.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Boussingault etc. Paris. Gauthier-Villars 8⁰ (6). X, XI.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars. 4⁰. (3) IV.

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4⁰. (2) XV.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New-York. III.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder, Meinardus. 51. Jahrgang. Bd. XCIV. Berlin. Mittler u. Sohn.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von A. Krüger. Kiel. 4⁰. CXV,

A*

Batt. G.: Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XXV.

Belg. Bull.: Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) XIII, XIV.

Belg. Mém : Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles. F. Hayez. XL.

Belg. Mém. S. É.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1887.

Berl. phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Berlin. G. Reimer. 8°. 1887. VI.

Bern Mitt.: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1887. Bern. Huber u. Co.

Besso Per. mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario diretto da D. Besso. Roma. 8°. II.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von G. Eneström. Stockholm 1887. (2) I.

Böklen Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. O. Böklen. Tübingen. Fr. Fues. I, II.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (4) VII, VIII.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna Bologna.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°. XIX, XX.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.). XI.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. VI.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Casop.: Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch) XVI.

Centralb. d. Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. VII.

Chark. Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.)

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung etc. herausgegeben von Dr. E. Hartig. Jahrg. 1887. (2) XXXIII. Leipzig. Arthur Felix. 4°.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. CIV, CV.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc. Paris. Gauthier-Villars. 8°. (2) XI.

Delft Ann. d. l'Éc. Polyt.: Annales de l'École Polytechnique de Delft. Leiden. E. J. Brill. III.

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin. E. Toeche. XXI.

Dorpat. Naturforscher Ges. Ber.: Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXIX.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. V.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XIII, XIV.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. XXXIII.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. XLVI, XLVII.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

Exner Rep.: Repertorium der Physik herausgegeben von Exner. München und Leipzig. gr. 8°. XXIII, XXIV.

Flammarion, Rev. d'Astr.: L'Astronomie. Revue d'astronomie populaire, de météorologie et de physique du globe, exposant les progrès de la science pendant l'année. Paris. Gauthier-Villars. gr. 8°. VI.

Franc. Ass.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles. (Toulouse)

Génie civ.: Le Génie civil. Revue générale hebdomadaire des industries françaises et étrangères. Paris. X, XI.

Gen. Mém.: Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Genève. 4°. Librairie H. Georg. XXIX.

Genova G.: Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova. 8°. 1887.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. XXXIV.

Gött. N.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1887.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°.

Hannov. Zeitschr.: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. XXXIII.

Helsingf. Vet. soc. Acta: Acta societatis scientiarum Fennicae. 4°.

Helsingf. Vetensk. soc. Öfv.: Öfversigt af finska vetenskaps-societetens förhandlingar. Helsingfors. 8°.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XVIII.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig C. A. Koch. 8°. (2) IV, V, VI.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°. Cah. LVI, LVII.

J. de Math. spéc.: Journal de Mathématiques spéciales etc. publié sous la direction de Longchamps, Lucien Lévy. Paris. Delagrave. (3) I.

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. Berlin. G. Reimer. 4°. IC, C, CI, CII.

J. Hopkins circ.: Johns Hopkins University Circulars. Baltimore.

Ing. civ.: Mémoires et Compte Rendu des travaux de la Société des Ingénieurs civils. Paris. II.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Unter Mitwirkung von C. Steppes und R. Gerke herausgegeben von W. Jordan. Stuttgart. XVI.

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par C. Jordan avec la collaboration de G. Halphen, E. Laguerre, M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Resal. Paris. (4) III.

Kazan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kazan.

Kazan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kazan. (Russisch.) V, VI.

Kazan Nachr.: Nachr. der Kaiserlichen Universität zu Kazan.

Kiew Nachr.: Nachrichten der kaiserlichen Universität zu Kiew. (Russisch.)

Kjob. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen. (6) II.

Kopenh. Overs.: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.) XV.

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) XIII.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. XIII.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. (2) XII, XIII.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturales publicados sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XX.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XVIII.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXVIII.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8° XLII, XLIII.

Lund Årsskr.: Acta universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årsskrift. Lund.

Manch. Mem.: Memoirs of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Mar. J.: Marine Journal. (Russisch.)

Math. Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. VonderMühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XXVIII, XXIX, XXX.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Hoste. Paris. Gauthier-Villars. 8°. VII.

Mess.: The Messenger of Mathematics, edited by C. Taylor and J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan and Co. 8°. (2) XVI, XVII.

Met. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oestreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. W. Koeppen. Berlin. V.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien. R. v. Waldheim. 8°. XVIII.

Modena Mem.: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena. (2) V.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XIII.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität. Moskau. (Russisch).

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Gesellschaft der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. XVI.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. Mühchen. 8°. XVII.

Nap. Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°. (2) I.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York. Macmillan and Co. XXXVI, XXXVII.

Néerl. Arch.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°. XXII.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XIV.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°. (3) VI.

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la fisica esperimentale e matematica da E. Betti e R. Felici. Pisa. Salvioni. (3) XXI, XXII.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch). VIII.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. I.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. LV.

Phys. Ges. St. Pet.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St.-Petersburg. XVIII, XIX.

Phys. Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) II.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Kane, Thomson, Francis. London. 8°. (5) XXII-XXIV.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin. J. Springer. I.

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc.

Prag. Abh: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°. VII.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1887.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, A. Cayley, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8°. XXII.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. XXIX, XXX.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma 4°. (4) III.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (4) IV.

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti della Accademia Pontifica dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XXXVII, XXXVIII.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXXII.

Hl. A.: Historisch-literarische Abteilung (besonders paginirt).

Schweiz. Bauztg.: Revue Polytechnique; Schweizerische Bauzeitung, Wochenschrift für Bau-, Verkehrs- und Maschinentechnik, Organ des Schweizerischen Ingenieur- und Architekten-Vereins etc. Herausgegeben von Waldner. IX, X.

Sill. J.: The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XV.

Stockh. Handl.: Handlingar af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens. Stockholm.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. XLIV.

Stockh. Vetensk. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Stockholm. 8°.

Techn. Bl.: Technische Blätter, Vierteljahrschrift des deutschen Polytechnischen Vereins in Böhmen, redigirt von Ed. Maiss. Prag. XIX.

Techn. Inst. St. Pet.: Die Mitteilungen des Technologischen Instituts in St.-Petersburg. (Russisch.)

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. VIII.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XXII, XXIII.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino.

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris. Gauthier-Villars. I.

Toul. Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°. (8) IX.

Ups. N. Act: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°.

Ven. At.: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. (9) II, (10) I, II.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (6) V.

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. XXII.

Wash. Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. X.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XXIX, XXX, XXXI, XXXII.

Wiedemann Beibl.: Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben unter Mitwirkung befreundeter Physiker von G. und E. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8°. 1887.

Wien. Bauztg.: Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung etc. von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim. LII.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. XCV, XCVI.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°. LIII.

Wochenbl. für Bauk.: Wochenblatt für Baukunde. Organ der Architekten- u. Ingenieurvereine von Bayern, Elsass-Lothringen, ... Herausgegeben von Fr. Scheck. Frankfurt a. Main.

W. Oestr. Ing. u. Arch.: Wochenschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. XII.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXXII.

Z. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin u. K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. XXXVII.

Z. Oestr. Ing. u. Arch.: Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins. Redacteur J. Melan. Wien. XXXIX.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. J. Springer. Berlin. 4°. XXXI.

Zeuthen T.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (5) IV, V.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische Gleichungen.)

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Seite

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1. Niedere Arithmetik.

Capitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6 Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.

Seite

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen. (Analysis situs).

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

Seite

E. Abzählende Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

Seite

Capitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

B. Elasticitätstheorie.

C. Capillarität.

Capitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis

der Herren, welche für den neunzehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
B. „ Prof. Bruns in Leipzig.
Bb. „ Professor Bobylew in St. Petersburg.
Bg. „ Prof. Björling in Lund.
Bk. „ Dr. Buka in Charlottenburg.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl in München.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
Dz. „ Dr. Dziobek in Charlottenburg.
E. „ Prof. G. Eneström in Stockholm.
E. K. „ Dr. E. Kötter in Berlin.
El. „ Prof. Engel in Leipzig.
F. „ Dr. Faerber in Berlin.
F. K. „ Dr. F. Kötter in Berlin.
G. „ Prof. v. Geer in Leiden.
Gbs. „ Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm. „ Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr. „ Prof. Günther in München.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hch. „ Dr. Henoch in Berlin.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
Ht. „ Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Königsberg i. Pr.
K. „ Dr. Kobb in Stockholm.
Js. „ Dr. Jolles in Aachen.
Kr. „ Prof. Krazer in Strassburg.
La. „ Prof. Loria in Genua.
Lbg. „ Prof. Lorberg in Strassburg.
Lg. „ Dr. Lange in Berlin.
Lp. Herr Prof. Lampe in Berlin.
Ls. „ Lazarus in Hamburg.
M. „ Prof. F. Müller in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
M. L. „ Prof. Mittag-Leffler in Stockholm.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
M-n. „ Prof. Mellin in Helsingfors.
Ms. „ Professor Mestschersky in Russland.
My. „ Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz. „ Dr. Maynz in Ludwigslust.
N. „ Prof. Neumann in Leipzig.
No. „ Prof. Netto in Giessen.
P. „ Dr. Petzold in Hannover.
R. M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Dr. Schlegel in Hagen.
Schn. „ Prof. Schumann in Berlin.
Scht. „ Prof. Schubert in Hamburg.
Sn. „ Dr. P. Simon in Berlin.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
T. „ Dr. Toeplitz in Breslau.
Tn. „ Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
V. „ Dr. Valentiner in Kopenhagen.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Wgt. „ Professor Weingarten in Berlin.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff in Kazan.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. „ Prof. W. Stahl in Aachen.
Wz. „ Dr. Weltzien in Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Max Henoch, Berlin W, Victoriastr. 29.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

M. MARIE. Histoire des sciences mathématiques et physiques. Paris. Gauthier-Villars.

Tome VIII. Onzième période: De Newton à Euler (fin). — Douzième période: D'Euler à Lagrange (1886).

Tome IX. Douzième période: D'Euler à Lagrange (fin). — Treizième période: De Lagrange à Laplace (1886).

Tome X. Treizième période: De Lagrange à Laplace (fin). — Quatorzième période: De Laplace à Fourier (1887).

Tome XI. Quinzième période: De Fourier à Arago (1887).

Tome XII. Seizième période: D'Arago à Abel et aux géomètres contemporains (1888).

Das Werk, dessen erster Band 1883 erschienen ist, liegt nun in 12 Bänden geschlossen vor. Um zu zeigen, bis wie weit die Mathematiker und Physiker unseres Jahrhunderts noch besprochen sind, setzen wir die Namen derselben aus dem letzten Bande her: Arago, Babbage, Babinet, Becquerel, Bellanger,

Beudant, Binet, Brande, Cauchy, Cavé, Chasles, Chevreul, Clapeyron, Coriolis, Cournot, Cousinéry, Daguerre, Daguet, Dandelin, Daniel, Delafosse, Despretz, Duhamel, Dumas, Encke, Faraday, Flourens, Fraunhofer, Fresnel, Gambey, Herschel, Jackson, Jacobi, Kreil, Lamé, Magendie, Marsh, Melloni, Mitscherlich, Moebius, Ohm, Pecqueur, Pelletier, Pitot, Poggendorff, Poncelet, Quetelet, Sadi Carnot, Sarrus, Savart, Savary, Sefström, Thimonnier, Tredgold, Vicat. Lp.

W. W. Bobynin. Russische physiko-mathematische Bibliographie. (Vom Anfange der Buchdruckerkunst bis auf unsere Zeit.) Phys.-math. Wiss. II, III. (Russisch.)

W. W. Bobynin. Umriss der Geschichte der Entwickelung der physiko-mathematischen Wissenschaften in Russland. Phys.-math. Wiss. II. (1886.) (Russisch.)

Es sind folgende Abschnitte erschienen:

I. Handschriftliche mathematische Literatur des XVII. Jahrhunderts.

II. Die Quellen unserer handschriftlichen mathematischen Literatur des XVII. Jahrhunderts.

III. Die allgemeine Charakteristik und die Besonderheiten des Inhalts der arithmetischen Handschriften des XVII. Jahrhunderts.

IV. Die Astronomie in unseren mathematischen Handschriften des XVII. Jahrhunderts.

V. Die Geometrie in Russland im XVII. Jahrhunderte.

Wi.

J. L. Heiberg. Bidrag til Mathematikens Historie hos Byzantinerne. Kopenh. Overs. 88-96.

Der Verfasser giebt einige Mitteilungen über das Studium der Mathematik in Constantinopel im frühen Mittelalter. V.

G. Eneström. Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques. Bibl. Math. (2) I. 3-7.

Enthält eine summarische Uebersicht über die mathematisch-historische Forschung von der Mitte dieses Jahrhunderts ab. Die Untersuchungen der verschiedenen Verfasser werden nach dem darin behandelten Gegenstand chronologisch zusammengestellt, ferner einige grössere Arbeiten, sodann Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, und zuletzt werden die mathematisch-historischen Zeitschriften erwähnt. E.

A. Favaro. Otto anni d'insegnamento di storia delle matematiche nella R. Università di Padova. Bibl. Math. (2) I. 49-54.

Seit acht Jahren hat Herr Favaro Vorlesungen über Geschichte der Mathematik an der Universität zu Padova gehalten. Er hat dabei die Absicht gehabt, teils den Mathematikern Kenntnis über den Entwickelungsgang ihrer Wissenschaft zu geben, teils für die mathematisch-historische Forschung neue Mitarbeiter zu gewinnen. In der vorstehenden Note berichtet er über den Plan seiner Vorlesungen, zeigt, aus welchen Gründen das Studium der Geschichte der Mathematik für das Verständnis der Wissenschaft notwendig sei, und hebt hervor, dass und warum bei der jetzigen Organisation des höheren Unterrichtswesens in Italien für die mathematisch-historische Forschung wenig Erfolg zu erwarten sei. E.

J. Dupuis. Note sur un passage géométrique du Ménon de Platon. Bonc. Bull. XIX. 645-650.

Der Verfasser führt die verschiedenartigen Auffassungen vor, welche ein oder zwei Dutzend Platon-Erklärer betreffs einer Stelle im Menon entwickelt haben, und zeigt, dass man nur *τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμήν* mit „den gegebenen Umfang des Kreises“ zu übersetzen habe, um alle Unklarheit zu verscheuchen. Er belegt diesen Sinn von *γραμμή* durch Beweisstellen und schlägt vor, *αὐτοῦ* durch *τοῦ κύκλου* zu ersetzen, was ja oft als

τȣ̃ ὁ geschrieben worden sei und so zur Verwechselung Anlass gegeben habe. Tn.

Ch. Henry. Lettre à M. le Prince D. B. Boncompagni sur divers points d'histoire des Mathématiques. Bonc. Bull. XX. 389-404.

Wendet sich zuerst gegen die im vorigen Referat erwähnte Einsetzung von αὐτοῦ in den platonischen Text und verweist auf Wöpcke's Auffassung (1856), giebt dann Verbesserungen zu einzelnen Stellen des Abschnittes über indische Mathematik in Cantor's Vorlesungen, prüft hierauf (S. 392ff.) verschiedene Vermutungen über die Entstehung der Planetenzeichen, macht dann eine kurze Bemerkung über den Umfang der Pariser Boëtiushandschriften, berichtet (S. 396) weiter über gewisse beim Kartenspiel gebrauchte Zahlzeichen, sowie über eine bis jetzt nicht veröffentlichte Schrift Pascal's, die sich auf eine Rechenmaschine bezieht (S. 397), ferner über ein Stück Briefwechsel zwischen Torricelli und Mersenne, über einen von Jordan wiedergefundenen Satz Monge's (S. 399f.), endlich über einen bestimmten Fall congruenter Zahlen (S. 402). Tn.

P. Tannery. La Technologie des éléments d'Euclide. Darb. Bull. (2) XI. 17-28.

Des Proklus Kommentar zu Euklid enthält eine Stelle, die das Werk des letzteren besonders rühmt. Der Verfasser sucht nun aus den in jener Stelle vorkommenden Anführungen und aus der Vergleichung mit einem Bruchstück aus Carpos nachzuweisen, dass jene Stelle aus dem Werke des Geminus stammt, und ebenso, dass aus letzterem auch die kunstmässige Gliederung des geometrischen Satzes i. A. stamme, welche Proklus benutzt, vielleicht auch die Verwendung des Porismas, aber nicht die einiger anderen Kunstausdrücke. Tn.

P. Tannery. Les continuateurs d'Euclide. Darb. Bull (2) XI. 86-96.

Untersucht, nach welcher Richtung hin im Altertum der Rahmen der „Elemente“ erweitert wurde, und findet, dass dies geschah bezüglich der regelmässigen Körper, der Lehre von der Isoperimetrie, der Sphärik und der Kreismessung. Hierzu wiederholt der Verfasser, was an Literargeschichtlichem im sog. 14. und 15. Buch der Elemente steht und macht einige Mitteilungen aus Pappus. Tn.

P. Tannery. Héron sur Euclide. Darb. Bull. (2) XI. 97-108.

Was H. Martin (1854) als möglich, Cantor (1880) als wenig wahrscheinlich bezeichnet hatte, ist jetzt erwiesen: Heron hat in der That einen Kommentar zu Euklid verfasst, und derselbe ist zu Leyden, wenn auch nicht vollständig, so doch in zahlreichen, einer arabischen Uebersetzung des Euklid einverleibten Bruchstücken erhalten. Tannery erweist die Authenticität dieser daselbst dem Heron zugeschriebenen Auszüge durch Vergleichung zunächst zweier derselben mit dem entsprechenden Berichte des Proklus, so dass also zu des letzteren Zeiten Heron's Arbeit noch vorhanden gewesen sein müsse. Tn.

P. Tannery. Les „définitions“ du Pseudo-Héron. Darb. Bull. (2) XI. 189-193.

Durch Anführungen von Stellen aus der im Vorangehenden erwähnten Arbeit Heron's zeigt der Verfasser, dass dieser der wahre Charakter eines Kommentars zukomme, und folgert hieraus, dass die ein ganz anderes Wesen und anderen Gehalt besitzenden, gewöhnlich Heron zugeschriebenen „Definitionen“ diesem nicht zugehören können, sondern vermutungsweise auf den dem 3. Jahrhundert n. Chr. angehörigen Anatolius zurückzuführen seien, der seinerseits aus Geminus (1. Jahrhundert v. Chr.) geschöpft habe. Tn.

P. Tannery. La géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Paris. Gauthier-Villars.

Die Schrift ist eine Sammlung der einzelnen Aufsätze, welche der Verfasser seit 1885 in Darboux Bull. hat erscheinen lassen, über welche daher in den F. d. M. schon berichtet ist. Der Inhalt umfasst folgende Titel: Einleitung, die wahre Aufgabe für die Geschichte der alten Mathematik. I. Proklus und Geminus. II. Ueber die Epoche, in der Geminus lebte. III. Die Einteilung der Mathematik nach Geminus. IV. Die Anwendungen der Geometrie im Altertume. V. Die historische Uebersicht des Proklus. VI. Die Ueberlieferung betreffs Pythagoras. Oenopidus und Thales. VII. Die Zusammensetzung der Elemente. VIII. Hippokrates aus Chios. IX. Demokritos und Archytas. X. Die Geometer der Akademie. XI. Die Technologie der Elemente des Euklid. XII. Die Fortsetzer des Euklid. XIII. Heron über Euklid. XIV. Die Definitionen des Pseudoheron. Verzeichnis der Eigennamen. Zusätze und Verbesserungen. Lp.

M. Steinschneider. Geminus in arabischer, hebräischer und zweifacher lateinischer Uebersetzung. Bibl. Math. (2) I. 97-99.

Herr Steinschneider giebt hier Auskunft über verschiedene Uebersetzungen von Geminus' *Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα*, welches Werk oft von den Uebersetzern dem Ptolemaeus beigelegt worden ist. Er erwähnt, dass Moses Tibbon eine hebräische Uebersetzung aus dem Arabischen gegeben hat, welche später von Abraham de Balmes für eine Uebersetzung ins Lateinische benutzt wurde; eine andere lateinische Uebersetzung ist direct aus dem Arabischen angefertigt. E.

P. Tannery. Études sur Diophante. I-III. Bibl. Math. (2) I. 37-43, 81-88, 103-108.

Herr Tannery trennt bei diesen Untersuchungen die Probleme Diophant's in zwei Gruppen, nämlich bestimmte und unbestimmte Aufgaben. In der ersten Note behandelt er die bestimmten Aufgaben, zeigt, dass Diophant die Lösung der Gleichungen

zweiten Grades kannte, und untersucht, warum die Griechen die ziemlich nahe liegende Lösung der Gleichungen dritten Grades nicht gefunden haben. Die zwei anderen Noten beziehen sich auf die unbestimmten Aufgaben und zwar auf die unbestimmten algebraischen Aufgaben. Herr Tannery unterscheidet nämlich bei Diophant zwischen algebraischen und zahlentheoretischen Aufgaben. Die ersteren sind Lösungen des Problems: Wenn eine oder mehrere Gleichungen zweiten oder höheren Grades gegeben sind, die Unbekannten, wenn möglich, als rationale Functionen neuer Unbekannten auszudrücken. Es handelt sich hier also um eine Art von algebraischen Transformationen oder Eliminationen zwischen Gleichungen höheren Grades. Herr Tannery untersucht ausführlich die verschiedenen Methoden, welche den Lösungen Diophant's zu Grunde liegen, unter denen einige sehr elegant sind. E.

F. Blass. Eudoxi ars astronomica qualis in charta Aegyptiaca superest denuo edita. (Diei natalis nonagesimi ... Guilelmi I ... sollemnia celebranda ...) Kiliae. 25 S. 4°.

J. Paulson. De fragmento Lundensi Boëtii De institutione arithmetica librorum. Lund Årsskr. XXI. 1885. 30 S.

Die Universitätsbibliothek zu Lund besitzt eine Handschrift von der Arithmetik des Boëtius, die grösstenteils aus dem X. Jahrhundert herzurühren scheint. In der soeben genannten Abhandlung beschreibt der Verfasser diese Handschrift und vergleicht sie mit der Friedlein'schen Ausgabe, wobei die abweichenden Lesarten notirt werden. E.

J. L. Heiberg. Der byzantinische Mathematiker Leon. Bibl. Math. (2) I. 33-36.

Am Schluss zweier Archimedes-Handschriften finden sich

ein Paar Verse, wo ein *λέον γεωμέτρα* erwähnt ist, und eine Euklides-Handschrift enthält einen kleinen Aufsatz über Multiplication und Division der Brüche, die in der Ueberschrift einem Mathematiker Leon beigelegt wird. Herr Heiberg hält es für wahrscheinlich, dass diese Angaben sich auf einen byzantinischen Mathematiker beziehen, und stellt alles zusammen, was über seine Lebensumstände bekannt ist. Er lebte im IX. Jahrhundert, erst auf Andros, dann in Constantinopel, später als Metropolit in Thessalonich. Dieser Leon hielt in Constantinopel öffentliche Vorlesungen über Mathematik, und soll auch einige astrologische Schriften verfasst haben. E.

M. Steinschneider. Die Söhne des Musa ben Schakir. Bibl. Math. (2) I. 44-48, 71-75.

Herr Steinschneider hat hier ein Verzeichnis der Schriften der drei Brüder Muhammed, Ahmed und Hasan gegeben, und dabei literaturgeschichtliche Notizen und Anmerkungen beigefügt. Am ausführlichsten handelt er vom „Liber trium fratrum de geometria", der in lateinischer Uebersetzung von Curtze herausgegeben worden ist. Dazu verzeichnet er noch 13 Schriften der drei Brüder. Unter diesen scheint auch eine Einleitung zu den Kegelschnitten des Apollonius gewesen zu sein; die übrigen sind zum Teil astronomischen Inhalts. E.

M. Steinschneider. Études sur Zarkali astronome arabe du XIme siècle et ses ouvrages. Bonc. Bull. XX. 1-36.

Ist Fortsetzung (noch nicht Ende) der im 14. Bande (1881) des Bull. Bonc. begonnenen, dann im 16. Bande (1883), dann im 17. und 18. (1884 und 1885) fortgesetzten Arbeit über Zarkali, ein Ergebnis mehr als dreissigjährigen Sammelfleisses. Es werden die Toledaner Tafeln behandelt, Ort und Geschichte der Handschriften, sowie ihrer Uebersetzungen, Auszüge und Erklärungen; darauf folgt kurze Inhaltsangabe der „canones Arzachelis". Tn.

H. Suter. Die Quaestio „De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem" des Albertus de Saxonia. Schlömilch Z. XXXII. Hl.-A. 41-56.

Der Verfasser druckt hier aus der Handschrift A. 50 der Berner Stadtbibliothek drei geometrische Stücke in lateinischer Sprache ab: erstens das in der Ueberschrift genannte (S. 43-52), zweitens ein die gleiche Frage, aber diese ganz kurz und viel geometrischer behandelndes Stück (S. 52) und drittens ein die heronische Lösung des Problems der zwei mittleren Proportionalen enthaltendes Stück (S. 52-54). Dabei wird glaubhaft gemacht, dass zwar nicht das zweite und dritte, wohl aber das erste Stück von Albertus de Saxonia herrührt. Eben dieses ist auch interessant wegen der darin niedergelegten Plumpheit des Denkens jener Zeit. Tn.

E. Narducci. Vite inedite di Matematici italiani scritte da Bernardino Baldi e pubblicate da Enrico Narducci. Bull. Bonc. XIX. 335-640.

B. Baldi (1553-1617), ein italienischer Gelehrter und Dichter, zugleich ausserordentlich vielseitiger Schriftsteller und geschätzter Stilist, war vom Herzog von Guastalla erst zum Hofmathematiker, dann 1586 zum Abt von Guastalla ernannt worden. Als solcher, abgeschieden vom Lärm der Welt, verfasste er die teils kürzeren, teils ausführlicheren wissenschaftlichen Biographien von 202 Mathematikern des Altertums und Mittelalters. Seine Arbeit mit dem Titel „Vite de' Matematici" erschien aber weder zu seinen Lebzeiten noch nach seinem Tode im Druck. Der handschriftliche Nachlass kam an Verwandte, an Glieder der Familie Albani und in die gleichnamige Bibliothek; als diese verkauft und zerstreut war, erwarb im Jahre 1857 der bekannte Mäcen mathematischer Geschichtsforschung, der Fürst Boncompagni, drei Handschriften des genannten grossen Werkes von Baldi. Aus diesen sind (seit 1868) 22 der Biographien veröffentlicht worden, hauptsächlich in Boncompagni's Bullettino und in Schlömilch's Zeitschrift; jetzt veröffentlicht daraus der eifrige

Narducci weitere 29 jener Biographien nebst Baldi's Vorrede (S. 355-358), teils des wissenschaftlichen, teils des literarischen Interesses wegen, das sich an diese Erzeugnisse der Jahre 1588 bis 1595 knüpft.

Hinsichtlich der Reihenfolge hält sich der Herausgeber an die von Baldi selbst gewählte, und behandelt so S. 358 Ameristus, dann S. 359 Archytas, S. 373 Eurytus, S. 374 Phil. v. Mende, S. 376 Aristoxenus, S. 381 Dicäarch, S. 388 Archimedes, S. 454 Nigidius Figulus, S. 464 Vitruv, S. 473 L. Arruntius (oder Tarruntius), S. 480 Agrippa, S. 481 Geminus, S. 488 Jul. Firmicus, S. 521 Boëtius, S. 586 Dion. Romanus, S. 590 Guido v. Arezzo, S. 591 Campano, S. 596 G. Bonato, S. 598 Barlaam, S. 600 Paolo (dell' Abaco), S. 602 G. Blanchino, S. 604 Burtio, S. 605 Piasio, S. 606 Pontano, 618 Gaurico, S. 621 P. Pitato, S. 625 Al. Piccolomini, S. 633 Zarlino.

Die beachtenswertesten dieser Skizzen dürften diejenigen sein, welche sich mit Archimedes, Vitruv und Boëtius beschäftigen.

Tn.

E. Narducci. Vita di Pitagora, scritto da Bernardino Baldi, tratta dall' autografo ed annotata da E. Narducci. Bonc. Bull. XX. 197-308.

Unter den im vorigen Referat erwähnten 202 Biographien Baldi's findet sich auch eine im Jahre 1588 verfasste, welche Leben und Bedeutung des Pythagoras darstellt. Diese, unter allen die „ausführlichste und sorgsamst ausgearbeitete“, veröffentlicht hier Narducci erstmals; er hat sich dabei der grossen, dankenswerten Mühe unterzogen, alle die Stellen aus alten Schriftstellern, auf welche Baldi anspielt, aufzusuchen und wörtlich in den Anmerkungen beizufügen. Tn.

J. Schaefer. Des Nicolaus von Kues Lehre vom Kosmos. Diss. Giessen. 72 S. 8°.

F. Jacoli. Ausführliche Besprechung von „Carteggio inedito di ... celebri astronomi dei secoli XVI e XVII ... pubblicato da A. Favaro. Bologna 1886.“ Bonc. Bull. XX. 37-60.

A. Favaro. Documenti per la storia della Accademia dei Lincei nei manoscritti Galileiani della Biblioteca nazionale di Firenze. Studi e ricerche di A. Favaro. Bull. Bonc. XX. 95-158.

Lange vor der Gründung der Akademien bezw. Königl. Gesellschaften zu London (1665), Paris (1668), Berlin (1700) u. s. w. hatte ein römischer Privatmann, der Fürst Cesi, den Gedanken gefasst und ausgeführt, eine hauptsächlich der Bekämpfung der herrschenden Philosophie und der Pflege der Naturbeobachtung sich widmende grosse Gesellschaft zu gründen, die weithin sich ausbreiten sollte. Der Gründungstag dieser Accademia dei Lincei, das ist der Luchsäugigen, ist der 17. (oder 18.) August 1603. Berühmte Gelehrte, u. a. Galilei, zählten zu ihren Mitgliedern.

In der Sammlung der Galilei betreffenden Handschriften zu Florenz befinden sich nun manche auf jene Akademie und ihre Mitglieder bezüglichen Schriftstücke, und aus diesen hebt Herr A. Favaro eine Reihe wichtiger heraus. Nach einem Vorbericht (S. 95-99) zählt er (S. 99-103) die Dokumente auf, veröffentlicht dann die handschriftlich vorhandene, von Nelli (1725-1793) verfasste Geschichte der Anfänge genannter Akademie (S. 103-123), skizzirt weiter in archivalischer Beziehung den noch vorhandenen aus den Jahren 1610 bis 1630 stammenden Briefwechsel zwischen mehreren ihrer Mitglieder (S. 123 - 135) und druckt endlich (S. 135-158) 32 noch nicht oder bis jetzt nicht vollständig veröffentlichte, von Seiten des Stifters Cesi in den Jahren 1611 bis 1619 an Galilei gerichtete Briefe ab. Tn.

A. Favaro. Miscellanea Galileiana inedita. Studi e ricerche. Ven. Ist. Mem. XXII. 701-1034. 4°.

Dieser starke Band enthält gründliche Forschungen zur Biographie Galilei's. Zunächst (S. 703-712) wird der 15. Februar 1564 als sein Geburtstag ermittelt; der gewöhnlich angegebene 18. Februar ist sein Tauftag. Dann kommt (S. 718) ein Bruchstück eines Briefes aus dem Jahre 1607 zur Besprechung, der über Privatverhältnisse Auskunft giebt; weiter (S. 729) Randnotizen zu Archimed, ferner (S. 791) eine Erörterung der Prioritätsansprüche betreffs der Entdeckung der Sonnenflecken, wodurch die Ansprüche Scheiner's (S. 741-760) und die des Fabricius, nicht minder (S. 778ff.) die Harriot's zurückgewiesen werden; der Schlussentscheid findet sich S. 782f. Der fünfte Abschnitt (S. 791-851) bringt Einzelnheiten, der siebente (S. 872-923) Urkunden zum Processe Galilei's, der sechste (bis S. 872) Aufklärungen über seinen Briefwechsel mit Diodati, die vier folgenden Abschnitte (S. 923-982) klären Literarisches und Familiäres auf, endlich der letzte ist der Reconstruction des Verzeichnisses von Galilei's Büchersammlung gewidmet. Tn.

A. Favaro. Di Giovanni Tarde e di una sua visita a Galileo dal 12 al 15 novembre 1614. Bonc. Bull. XX. 345-372.

Der französische Kanonikus Tarde (1562 - 1636) besuchte Galilei 1614 zu Florenz und erzählt in einem Reisebericht, den eben F. hier veröffentlicht, was Wunderbares ihm Galilei mitgeteilt habe über die Jupiterstrabanten, über die merkwürdige Gestalt des Saturn, über die Lichtgestalten der Venus, über die Sonnenflecken und deren Bewegung und über das zum Mikroskop abgeänderte Fernrohr. Favaro bespricht dann an der Hand der Quellen das weitere Verhalten Tarde's in Bezug auf Galilei's Entdeckungen, insbesondere seine abweichende Auffassung über die Natur der Sonnenflecken. Tn.

A. Favaro. Appendice prima alla libreria di Galileo Galilei descritta ed illustrata da A. Favaro. Bonc. Bull. XX. 372-376.

Enthält Ergänzungen bzw. Begründungen zu der früher (F. d. M. XVIII. 1886. 9) erwähnten Liste von 521 Werken, welche Galilei's Büchersammlung ausmachten. Tn.

P. Riccardi. Nota relativa ad una edizione del „Nuncius Sidereus“ del Galilei. Bibl. Math. (2) I. 15-16.

Herr Riccardi zeigt, dass die von Albèri herrührende Notiz, dass eine Ausgabe des „Nuncius Sidereus“ 1653 in London gedruckt sei, nicht ganz richtig ist, da diese nur eine Abteilung eines Sammelwerkes bildet, worin auch Schriften von Gassendi und Kepler abgedruckt sind. E.

E. Wohlwill. Die Prager Ausgabe des „Nuncius Sidereus“. Bibl. Math. (2) I. 100-102.

Es ist vielfach angegeben worden, dass Kepler 1610 eine neue Auflage vom „Nuncius Sidereus“ in Prag veranstaltete; Herr Wohlwill bezweifelt aus guten Gründen die Existenz dieser Auflage, die kein Bibliograph vor Augen gehabt zu haben scheint, und zeigt, dass die betreffende Notiz bei Venturi, der die neue Ausgabe zum ersten Mal citirt hat, auf einem Missverständnis beruht. E.

Bierens de Haan. Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantyn Huygens. Schlömilch Z. XXXII. Hl.-A. 161-173.

Giebt drei Briefe, zwei an Descartes von Huygens, einen von Descartes, aus den Jahren 1639 und 40 und sich auf eine Polemik beziehend, die sich zwischen zwei Holländern über die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem irrationalen Binom entsponnen hatte. Nur einer der Briefe, der von Descartes, enthält Mathematisches (S. 164f.): $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ wird $= x+\sqrt{y}$ gesetzt und die Art und Bedingung aufgezeigt, x und y zu finden. Tn.

D. Bierens de Haan. Nalezingen op den eersten bundel (1878) der bouwstoffen No. I-XVII voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 65-67.

D. Bierens de Haan. Nalezingen op de bouwstoffen No. XVIII-XXX voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 68-78.

D. Bierens de Haan. Korte levensberichten voorkomende in de bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden No. I-XXX. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 79-81.

D. Bierens de Haan. Lijst van de boeken beschreven of aangehaald in de bouwstoffen voor de geschiedenis der wis-en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden No. XVIII-XXX. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 82-96.

Die zwei erstgenannten Aufsätze enthalten einige Ergänzungen und Verbesserungen der früher erwähnten Abhandlungen über die Geschichte der Mathematik in den Niederlanden (Siehe F. d. M. XVIII. 1886. 10). Der dritte enthält den Nachweis der Stellen dieser Abhandlungen, wo die kurzen Lebensgeschichten der Mathematiker und Naturforscher zu finden sind. Der vierte ist ein Index zu den in diesen Abhandlungen citirten Werken. G.

D. J. Korteweg. Een en ander over Constantyn Huygens als beminnaar der stellige wetenschappen en zijne betrekking tot Descartes. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 253-283.

D. J. Korteweg. Notes sur Constantyn Huygens considéré comme amateur des sciences exactes, et sur ses relations avec Descartes. Néerl. Arch. XXII. 422-466.

Auch der als Dichter berühmte Constantyn Huygens, der Vater von Christiaan Huygens, interessirte sich sehr für die ma-

thematischen und physikalischen Wissenschaften. So stand er in Briefwechsel mit Descartes, und aus diesem wird hier einiges mitgeteilt. Die Originalbriefe sind vom Verfasser unter den sich auf die Familie Huygens beziehenden Handschriften entdeckt, welche sich, zum Teil allerdings nur in Abschriften, im Treppenhaus zu Amsterdam befinden.

Dieser Briefwechsel behandelt verschiedene Gegenstände, wie die beste Art Linsen zu schleifen, die Grundlagen einer Mechanik, welche Descartes in einem Werkchen niedergelegt hatte, den Streit der Mathematiker Stampioen und Wassenaer, über den früher berichtet wurde (Siehe F. d. M. XVIII. 10); ein Perpetuum mobile und andere Fragen, welche damals an der Tagesordnung waren. In einer Beilage werden die Briefe aufgezählt, welche zwischen Const. Huygens und Descartes gewechselt worden sind, und die Orte angegeben, wo sie im Druck oder im Manuscript zu finden sind. G.

G. Eneström. Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. Bibl. Math. (2) I. 23-24.

Der Verfasser hat in einer früheren Note (cf. F. d. M. XVII. 1885. 12) über eine bisher unbekannte Abhandlung von Goldbach berichtet. Nachträglich bemerkt er hier, dass Goldbach von dieser Abhandlung in einem Briefe an Daniel Bernoulli spricht, und dass sie auch in den Acta Eruditorum 1720 abgedruckt worden ist. E.

C. F. Ofterdinger. Johann Tobias Mayer. Böklen Mitt. II. 116-132.

Zeigt, wie Mayer (1723-1762) ohne Schule und ohne Mittel aus eigener Kraft sich emporarbeitete zum Professor an der Göttinger Universität (1751) und Director der Sternwarte daselbst (1754). Seine wissenschaftlichen Verdienste, besonders auch die um Verbesserung der Instrumente, werden kurz dargelegt. Tn.

S. Günther. Simon L'Huilier. Böklen Mitt. II. 1-9.

Dieser Abriss der Lebensgeschichte L'Huilier's (1750-1840) stützt sich wesentlich auf R. Wolf's Vorarbeit: nach kurzer Erzählung der äusseren Schicksale wird des Mannes Schriftstellerthätigkeit gekennzeichnet, hauptsächlich in Bezug auf Algebra und Theorie des Unendlichen, auf Isoperimetrie, sowie Polygonometrie und Sphärik. Tn.

Jakob Jakobsen. Freundschaftliche Bewirthung meiner mathematischen Brüder mit einem Traktament von sechs Gerichten. Oder: Curieuse mathematische Aufgaben von J. J., Schullehrer zu Tinnum auf Sylt. Schleswig, 1790. Neu herausgegeben als Festgabe zum hundertjährigen Jubiläum des Seminars zu Tondern von dem mathematischen Verein „Mathesis in Valdivia“. Flensburg. Aug. Westphalen. 32 S. 8°.

Jakob Jakobsen, geb. 1739 in Klockries in der Bökingharde, gest. am 22. Febr. 1818 in Tinnum, Volksschullehrer in Tinnum von 1763-1790, ein Autodidakt in der Mathematik, Privatlehrer für Navigation und Feldmesser, gab 1790 das im Titel genannte Werkchen heraus mit Aufgaben in kraus humoristischer Form, deren Lösungen etwa die Kenntnisse der Reife bei den Entlassungsprüfungen der Realgymnasien beanspruchen. Die Herausgeber (Joh. Frey, Adolf Heinze, Peter Sönksen) aus Valdivia haben für die erste vollständige Lösung entsprechende Lockpreise ausgesetzt. Lp.

F. Wüstenfeld. Die Mitarbeiter an den Göttingischen gelehrten Anzeigen in den Jahren 1801 bis 1830. Göttingen 1887. 87 S. in gr. 8°.

Sei es auch nur Gauss zu Liebe, so hat das vorstehende Werkchen ein Recht darauf, hier genannt zu werden. Seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts waren die „Göttingischen Anzeigen von gelehrten Sachen“ erschienen, als sie 1801 in die

„Göttingischen gelehrten Anzeigen“ umgewandelt wurden; früher ausnahmslos, später seltener wurden die einzelnen Anzeigen von Büchern ohne Namensnennung des Anzeigenden veröffentlicht. Diese Namen zu kennen, ist aber bei vielen von Interesse. Glücklicherweise haben sich nun die Rechnungshefte über die bezahlten Honorare erhalten, und aus diesen konnte der seit 1838 an den „Anzeigen“ mitbeteiligte Verfasser die vorgenannte Schrift zusammenstellen, in welcher alphabetisch geordnet die Mitarbeiter aufgeführt sind samt biographischen Angaben und Aufzählung der von ihnen gelieferten Anzeigen unter Hervorhebung ihrer Selbstanzeigen. Tn.

Ed. Mailly. Étude pour servir à l'histoire de la culture intellectuelle à Bruxelles, pendant la réunion de la Belgique à la France. Belg. Mém. C. XL. 48 S.

In Belgien war damals nur ein Mathematiker zu finden, dessen Name angeführt zu werden verdient: de Nieuport.

Mn. (Lp.)

C. M. v. Bauernfeind. Gedächtnisrede auf Joseph v. Fraunhofer zur Feier seines hundertsten Geburtstags. München. G. Franz. 30 S. 4°.

Schilderung des äusseren Lebensganges Frauuhofer's (geboren 6. März 1787 zu Straubing, gestorben 7. Juni 1826 zu München), insbesondere seines Kampfes mit der Ungunst äusserer Verhältnisse, und Besprechung seiner Verdienste um die technische und wissenschaftliche Optik. Wn.

E. Reusch und O. Böklen. Zum Andenken an Nörrenberg. Böklen Mitt. III. 1-9.

Kurze Darstellung des Lebenslaufes (1787-1862) und der Hauptleistungen des berühmten Physikers. Tn.

AUG. FERD. MÖBIUS. Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. IV. Bd. Herausgegeben von W. Scheibner. Mit einem Nachtrage, herausgegeben von F. Klein. Leipzig. Hirzel. VIII u. 731 S. gr. 8°.

Der vorliegende vierte und letzte Band der gesammelten Werke von Möbius (vgl. F. d. M. XVII. 1886. 18) enthält zunächst die Elemente der Mechanik des Himmels (318 S.), sodann eine Reihe von Abhandlungen teils astronomischen und dioptrischen, teils rein mathematischen Inhalts, unter ihnen namentlich verschiedene Universitätsprogramme in lateinischer Sprache.

Die bei der Herausgabe befolgten Grundsätze sind dieselben geblieben wie bei den früheren Bänden; daher ist auch in den astronomischen Schriften keine Aenderung in den Zahlenangaben getroffen worden. Die Habilitationsschrift aus dem Jahre 1815 hat den Zusatz dreier Paragraphen aus dem im Nachlass vorgefundenen Originalmanuscript erhalten. Dagegen sind von den beiden für ein grösseres Publikum bestimmten Schriften über den Halley'schen Kometen und die Hauptsätze der Astronomie, mit Rücksicht auf ihren populären Charakter, am Schlusse des Bandes bloss die Titel und einige Inhaltsangaben aufgenommen worden. Gar nicht abgedruckt sind mehrere kleine Notizen, unter ihnen diejenige über den Beweis, dass $0^0 = 1$ sei, aus Crelle's Journ. XII.

Die Herausgabe des vierten Bandes hat Herr W. Scheibner besorgt; ausserdem hat Herr F. Klein den Abdruck der zur Veröffentlichung geeigneten Teile des Nachlasses geleitet. Die hierauf bezüglichen Mitteilungen und Zusammenstellungen sind, wie im zweiten Bande, von Herrn C. Reinhardt redigirt worden, der auch neben dem Herausgeber die Correctur des ganzen Bandes gelesen hat. In diesem Nachtrage stehen eine Note über die Construction einer eigentümlichen Tonleiter, eine Arbeit zur Berechnung des Reservefonds einer Lebensversicherungsgesellschaft und eine Abhandlung über geometrische Addition und Multiplication. Der schon in Bd. II in Aussicht genommene, von

Herrn C. Reinhardt verfasste Bericht über die Entstehung und den Zusammenhang von Möbius' Arbeiten und ein chronologisch geordnetes Verzeichnis derselben bilden den Beschluss des stattlichen Bandes und damit der schönen Ausgabe von Möbius' Werken. Lp.

A. Cauchy. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences. IIe Série. Tome VI. Paris. Gauthier-Villars. 424 S. 4°.

Der sechste Band der zweiten Serie, welcher überhaupt als erster dieser Serie veröffentlicht ist, gehört der Abteilung an, welche die in Bücherform erschienenen Abhandlungen umfasst, und enthält den ersten Band der Exercices de Mathématiques (Anciens Exercices) aus dem Jahre 1826. Dem Plane der Ausgabe gemäss ist ein blosser Abdruck ohne Noten und ohne Commentar erfolgt. Lp.

S. Dickstein. Hoene-Wroński. 1887. (Polnisch.)

Ein kurzer Bericht über das Leben und die wissenschaftliche Thätigkeit des genannten polnischen Mathematikers und Philosophen. Dn.

E. d'Ovidio. Biografie di Chelini, Tortolini, Bellavitis e Plana. Mem. della Soc. It. delle Scienze (detta dei XL). (3) VI.

In dieser Schrift beabsichtigt der Verfasser das Bemerkenswerteste aus dem Leben und den Arbeiten der vier wohlbekannten italienischen Mathematiker hervorzuheben: Domenico Chelini (1802-1880), Barnaba Tortolini (1808-1874), Giusto Bellavitis (1803-1880), Giovanni Plana (1781-1864). Wie bekannt, beruht der Ruf des ersten auf der vollendeten Eleganz, die in seinen zahlreichen und bedeutenden Arbeiten aus der Geometrie und Mechanik vorwaltet. Der des zweiten gründet sich nicht nur auf die interessanten Abhandlungen aus der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung, sondern auch darauf, dass er von 1850-1857

die „Annali di Scienze matematiche e fisiche", von 1858-1865 die „Annali di Matematica pura ed applicata" herausgegeben hat, die noch jetzt unter der kundigen Leitung von Hrn. Brioschi erscheinen. Die wissenschaftliche Thätigkeit des dritten hat sich auf alle Zweige der reinen Mathematik erstreckt und auch einige physikalische und chemische Fragen berührt; doch kann man behaupten, dass die festeste Grundlage seines Rufes die Rechnung der Aequipollenzen ist, die er zuerst erfunden und dann angewandt hat. Endlich verdanken die Astronomie und die mathematische Physik Plana viele Ergebnisse, deren Bedeutung wohlbekannt ist; er gelangte zu ihnen, indem er die Methoden der höheren Analysis benutzte; diese waren ihm so geläufig, dass Elie de Beaumont nicht anstand, ihn den „Patriarchen der mathematischen Analysis" zu nennen. Zu den biographischen Angaben über jeden dieser Gelehrten hat Hr. d'Ovidio eine vollständige Liste seiner Arbeiten hinzugefügt, wofür ihm alle Pfleger der exacten Wissenschaften Dank wissen werden. La. (Lp.)

E. Kotelnikoff. Biographische Notiz über Prof. P. J. Kotelnikoff. Kas. Ges. V. 225-249.

Th. Suvoroff. Erinnerung an P. J. Kotelnikoff. Kas. Ges. V. 250-254.

Biographische Notizen und Erinnerungen an P. J. Kotelnikoff, der von 1835 bis 1879 die Professur der Mechanik in Kasan bekleidete, so wie das Verzeichnis der Arbeiten des Verstorbenen. Wi.

H. G. Zeuthen. Adolp Steen. Zeuthen T. (5) IV. 65-70. (1886).

Nekrolog für den verstorbenen dänischen Mathematiker Professor A. Steen. Gm.

Chrétien Henri Nagel. Mathesis VII. 114-115.

Biographische Skizze nach O. Krimmel. Nagel ist geboren 1803, gestorben 1882. Mn. (Lp.)

Cenni necrologici del Prof. Cav. Pietro Boschi. (Abzug aus dem Programma della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Bologna 1887-88.)

Pietro Boschi, geboren zu Rom am 7. Juni 1833, war seit 1877 ordentlicher Professor der projectiven und darstellenden Geometrie an der Universität zu Bologna, und zugleich Professor der angewandten darstellenden Geometrie (Stereotomie) an der dortigen technischen Hochschule (Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri). Er starb zu Bologna den 4. November 1887. Vi.

E. Rouché. Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux. J. de l'Éc. Pol. Cah. LVI. 213-277, Nouv. Ann. (3) VI. 105-173.

Ausführliche Schilderung der wissenschaftlichen Thätigkeit Laguerre's (geb. zu Bar-le-Duc am 9. April 1834, gest. am 14. August 1886, vgl. F. d. M. XVII. 1886. 23). Das Verzeichnis der Schriften des Verstorbenen am Ende des Aufsatzes umfasst 133 Nummern aus den Jahren 1853 bis 1886. Dieselben werden in folgenden Capiteln gruppenweise besprochen: Gebrauch des Imaginären in der Geometrie, Anwendung der Integralrechnung und der Theorie der Formen auf die Geometrie, infinitesimale Geometrie, Richtungs-Geometrie, Näherungsmethoden für gewisse analytische Functionen, numerische Auflösung der Gleichungen, Differentialgleichungen und elliptische Functionen. Lp.

H. Poincaré. Notice sur la vie et les travaux de M. Laguerre. C. R. CIV. 1643-1650.

F. Tisserand. Notice sur les travaux de M. Oppolzer. C. R. CIV. 103-105.

Ein kurzer Bericht über die Arbeiten des am 26. December 1886 zu Wien verstorbenen Astronomen Th. von Oppolzer.

Hch.

Ch. Hermite. Rosenhain. C. R. CIV. 891.

Herr Hermite macht der Französischen Akademie Mitteilung,

dass am 14. März 1887 zu Berlin der bekannte Mathematiker Georg Rosenhain gestorben ist. Hch.

Mascart. Notice sur M. Alfred Terquem. C. R. CV. 196-199.

Alfred Terquem, geboren den 31. Januar 1831 zu Metz, starb den 16. Juli 1887 zu Lille. Seine Arbeiten beziehen sich hauptsächlich auf die Akustik, Capillarität, Wärmelehre und die Geschichte der Physik. Hch.

F. Siacci. Commemorazione di Alessandro Dorna. Torino Atti. XXII. 247-249.

Alessandro Dorna, geboren den 13. Februar 1825 zu Asti, starb am 19. August 1887 zu Turin. Seit 1850 Lehrer der Mechanik an der Militär-Akademie zu Turin, übernahm er im Jahre 1865 die Direction des dortigen Astronomischen Observatoriums und die Professur der Astronomie an der Universität. Der Turiner Akademie gehörte er seit 1869 als Mitglied an.

Hch.

G. Basso. In commemorazione di Gustavo Roberto Kirchhoff. Torino Atti. XXIII. 2-4.

F. Poske. Robert Gustav Kirchhoff. Poske Z. I. 72-73.

Nachrufe an den verstorbenen Gelehrten (geb. 12. März 1824, gest. 17. Oct. 1887). Lp.

Notices biographiques et bibliographiques concernant les membres, les correspondants et les associés 1886. Bruxelles. Hayez. VII + 606 S. 12mo. (Ac. R. de Belgique.)

Bibliographische Sammlung mit ausführlichen Nachweisungen über Adan, Catalan, Delboeuf, Folie, Houzeau, Le Paige, Liagre, Mailly, Mansion, Maus, Montigny, F. Plateau, Spring, Steichen, de Tilly, Van der Mensbrugghe und mit kürzeren Angaben über die meisten belgischen, vor Juli 1886 gestorbenen Mathematiker und Physiker. Mn. (Lp.)

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Felix Müller. Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie. Pr. Luisen Gymn. Berlin. (No. 64). 32 S. 4°.

Hr. Müller giebt eine Vorarbeit zu einer systematisch geordneten Uebersicht über Etymologie und Geschichte der bekanntesten mathematischen Ausdrücke. Benutzt sind ältere und neuere Forschungen über die Geschichte der Mathematik. Die in den letzten Decennien geschaffenen Begriffe bleiben noch unberücksichtigt. Im speciellen sind die Namen der einzelnen mathematischen Disciplinen, die Kunstausdrücke der Arithmetik und diejenigen der Kegelschnitte behandelt. Der kurzen geschickt zusammengestellten Auswahl folgt hoffentlich bald das grössere Werk nach. Mi.

K. Hunrath. Zum Verständnis des Wortes „Algorismus“. Bibl. Math. (2) I. 70.

Herr Hunrath hat in einem 1503 gedruckten „Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant“ eine Stelle gefunden, worin ein „philosophus nomine Algorismus“ citirt wird; hieraus erhellt, dass der Verfasser dieser Schrift die wahre Bedeutung des Wortes kannte, welche bekanntlich erst in unserem Jahrhundert von Reinaud und Boncompagni wieder entdeckt worden ist. E.

G. Eneström. Questions 14-15. A. Favaro. Question 16. W. W. Beeman. Question 17. K. Hunrath. Question 18. R. Baltzer. Antwort auf die Anfrage 14. Bibl. Math. (2) I. 32, 64, 96, 120.

Anfragen betreffend verschiedene mathematisch-historische Gegenstände. (Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 6.)

14) Ueber die erste Anwendung des Zeichens ∞. Herr Baltzer bemerkt als Antwort hierauf, dass seines Wissens Wallis (1655) der erste sei, der das Zeichen angewandt hat.

15) Ueber die Rectification der semikubischen Parabel von Neil und van Heuraet.

16) Ueber Documente, betreffend Galilei und seine wissenschaftliche Wirksamkeit.

17) Ueber die erste Anwendung des Divisionszeichens ÷.

18) Ueber das Wort „theca“ oder „theta“ für Null.

E.

K. ZANGENMEISTER. Entstehung der römischen Zahlzeichen. Berliner Ber. 1011-1028.

Wendet sich zunächst gegen die „so glänzende und bestechende“ Annahme von Mommsen (1850), als Zeichen für 50, 100, 1000 seien die Aspiraten χ, ϑ, φ verwendet worden, die eine Aufnahme ins römische Alphabet nicht fanden. Hiergegen werden vier Einwendungen geltend gemacht. Dann wird die Behauptung aufgestellt und zu begründen gesucht, dass die römischen Zahlzeichen für 1 bis 1000 nicht vom griechischen Alphabet abhängig, sondern einheitlich gebildet sind durch das Durchkreuzen des Einheitsstriches mit je einer weiteren Linie. Den Beschluss macht eine Untersuchung über etruskische Zahlzeichen und dann über die für die Zahlen über 1000 verwendete römische Zahlbezeichnung. Tn.

K. G. HUNGER. Mitteilungen über eine handschriftliche Coss und die damit verbundene Aufgabensammlung, mit zwei lithographirten Tafeln. Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra. Pr. Gymn. Hildburghausen. 28 S. 4°.

Inhaltsangabe eines um 1700 ganz noch nach Stifel's Art verfassten, aus der vormaligen sog. Schlossbibliothek zu Hildburghausen in die Bibliothek des dortigen Gymnasiums übergegangenen dreibändigen Werkes über Algebra. Tn.

H. E. WAPPLER. Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert. Pr. Gymn. Zwickau. 32 S. 4°.

Diese interessante Beilage enthält im wesentlichen (S.

11-31) den Abdruck einer wohl im 15. Jahrhundert, wie der Herausgeber sagt, von einem Deutschen verfassten Algebra, die sich auf Blatt 350-365′ der Handschrift C. 80 der K. Bibliothek zu Dresden findet und um so wichtiger ist, als nach ihr wohl Joh. Widman von Eger im 15. Jahrhundert an der Universität Leipzig Vorträge über Algebra gehalten hat. Auch diese Algebra übergeht das Rechnen mit den kossischen Zeichen und das mit Wurzelgrössen und geht sofort zu den berühmten „24 Regeln“ über, deren Geschichte der Berichterstatter in seiner Schrift „Die deutsche Coss“ behandelt hat; und wenn letzterer damals einen Rückschluss wagte auf Adam Riese's Vorlage, so wird derselbe jetzt vom Herausgeber bestätigt (S. 5): die abgedruckte Coss ist, wie drei Thatsachen beweisen, „die Grundlage für Riese's Coss“ gewesen. Mehrfache geschichtliche Einschaltungen, insbesondere Richtigstellungen von Irrtümern früherer Forscher, erhöhen den Wert der Programmbeilage. Tn.

C. Demme. Die Platonische Zahl. Schlömilch Z. XXXII. Hl.-A. 81-99, 121-132.

Seit Aristoteles haben sich viele Köpfe mit der Deutung der „vollkommenen“ oder sog. „Hochzeitszahl“ in Platon's Staat abgemüht und sind zu den verschiedensten Ergebnissen gelangt. Hier liegt ein neuer Versuch zur Lösung vor: Hr. Demme findet 1000 als die von Platon gemeinte Zahl, und er begründet dies durch eine eingehende kritische Würdigung eben jener Stelle und verwandter Stellen bei Platon, sowie der zugehörigen bei Aristoteles, und er zeigt die so herbeigeführte Uebereinstimmung mit Platon's einschlägigen Gedanken überhaupt. Tn.

J. Dupuis. Note sur un passage géométrique de la République de Platon. Bonc. Bull. XIX. 641-645.

Enthält einen Verbesserungsvorschlag für den griechischen Text (am Ende des neunten Buches) und zugleich die Klarlegung der Bedeutung der daselbst vorkommenden Zahl
$729 = 2.364\frac{1}{2} = 59.12+21 = 27.27 = 3.3.81 = 9^3 = 3^6$,

da Platon diese Zahl benützt, um eine Wertschätzung politisch-moralischer Dinge mit astronomischen und rein arithmetischen in Zusammenhang zu bringen. Tn.

P. TANNERY. L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet. Bibl. math. (2) I. 17-21.

Diese Note bezieht sich auf die von Chuquet (1484) angegebene und von De la Roche (1520) zum ersten Mal publicirte Annäherungsmethode beim Quadratwurzelausziehen. Bekanntlich erhält man durch diese Methode aus zwei Näherungswerten $\frac{a}{b}$ und $\frac{a_1}{b_1}$ von $\sqrt{A}$, vorausgesetzt dass $\frac{a}{b} > \sqrt{A} > \frac{a_1}{b_1}$, einen neuen Näherungswert $\frac{a+a_1}{b+b_1}$. Herr Tannery zeigt, dass diese Methode im engen Zusammenhange mit der Entwickelung der Quadratwurzel in einen Kettenbruch steht, obgleich diese Eigenschaft der Methode natürlich dem Erfinder unbekannt war. Herr Tannery bemerkt ferner, dass später dieselbe Methode wahrscheinlich von Juan de Ortega angewendet wurde; ob sie aber vor Chuquet bekannt war, muss unentschieden gelassen werden.

E.

ENESTRÖM. Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée par Alkalsadi. Bibl. math. 236-239. (1886)

Der arabische Mathematiker Alkalsadi hat für $b > a$ die Approximationsformel

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b+1}{2a+2}$$

angegeben.

Ueber den Weg, auf dem Alkalsadi zu dieser Formel gelangt ist, finden sich verschiedene Ansichten. So hat z. B. Hr. Günther angenommen, dass sie aus einer anderen durch gleichzeitige Vermehrung des Zählers und des Nenners entstanden sei, während Heilermann auf eine Kettenbruchmethode hingewiesen hat. Der Verfasser zeigt, dass die Formel durch eine der Theon'-

sehen ähnliche geometrische Wurzelausziehungsmethode unmittelbar erhalten werden kann. E.

P. Mansion. Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal. Gand. Hoste. 38 S. 8°.

Diese Schrift, ein Auszug aus dem Résumé du Cours d'analyse infinitésimale desselben Verfassers (vgl. Abschn. VI, Cap. 1), zerfällt in drei Capitel. I. Das erste enthält einen Abriss der allgemeinen Geschichte der Infinitesimalrechnung unter dem Titel: Erfinder und Vorläufer. Die angeführten Namen sind die folgenden: 1. Leibniz, Newton, Jakob und Johann Bernoulli, Maclaurin, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Clebsch; Hermite, Weierstrass, Kronecker, Sylvester, Cayley, Brioschi. 2. Eudoxus, Euklides, Archimedes, Pappus; Neper, Kepler, Cavalieri, Gregor v. St. Vincent, Descartes, Roberval, Pascal, Sluse, Fermat, Wallis, Huygens. Der in diesem Capitel entwickelte Hauptgedanke ist der folgende: Vor Leibniz und Newton konnten die grossen Geometer das Problem der Tangenten und der Quadraturen lösen; Leibniz und Newton finden, dass das Problem der Quadraturen mit dem umgekehrten Tangentenproblem identisch ist, und ersinnen einen Algorithmus (bewundernswürdig bei Leibniz, wenig handlich bei Newton), um jene drei Gattungen von Aufgaben zu behandeln (Tangenten, Quadraturen, umgekehrtes Tangentenproblem). Das achtzehnte Jahrhundert entwickelt die Entdeckungen von Leibniz und Newton ohne grosse Strenge und hauptsächlich im Gebiete der elementaren Functionen; das neunzehnte Jahrhundert führt wieder die Strenge der Beweise in die Wissenschaft ein, erforscht neue Functionen, sowohl bei reellen als bei imaginären Veränderlichen.

II. Das zweite Capitel enthält die mit Anmerkungen versehene Uebersetzung des ersten Leibniz'schen Artikels über die Differentialrechnung und ebenso die des zweiten Lemmas aus dem zweiten Buche der Newton'schen Principia. Der Verfasser zeigt in den Noten, dass Leibniz hinsichtlich der Principien der

Infinitesimalrechnung nie die abgeschmackten Vorstellungen gehegt hat, die ihm oft zugeschrieben werden. Er besass ein volles Bewusstsein über die Identität seiner Methode mit derjenigen der Alten; seine Definition des Differentials einer Function $y = F(x)$ ist, von der Ausdrucksweise abgesehen, die von Cauchy, d. h. $dy = F'(x) . \Delta x$, wo Δx eine endliche, in der Figur gezeichnete Grösse ist. Newton ist gleichfalls streng bei der Darlegung der grundlegenden Vorstellungen der infinitesimalen Analysis, aber er verschleiert seinen Gedanken möglichst. Gelegentlich wird darauf hingewiesen, dass Newton wahrscheinlich zuerst eine beliebige mit dem positiven oder negativen Vorzeichen behaftete Grösse durch einen Buchstaben bezeichnet hat.

III. Unter der einen Bezeichnung „unendlich klein“ hat man in die Wissenschaft drei Arten analytischer Begriffe eingeführt, die der Verfasser nennt: „unbegrenzt (indéfiniment) klein“ (verschwindend bei Newton), „unendlich kleine Nullwerte“ Euler's (indivisibilia) und „pseudo-unendlich klein“. Ein „Unbegrenztkleines“ ist eine Grösse, die so klein werden und bleiben kann, wie man will, während eine Veränderliche oder mehrere, von denen sie abhängt, unerreichbaren Werten zustreben. Ein „unendlich kleiner Nullwert“ ist eine Grösse, welche kleiner als jede gegebene Grösse ist, und von welcher man ausserdem in jedem besonderen Falle weiss, dass sie die Grenze einer gewissen endlichen Grösse (eines gewissen Unbegrenztkleinen) ist. Ein Pseudo-Unendlichkleines ist ein contradictorischer Begriff mancher Mathematiker, es ist eine sogenannte Grösse, von Null verschieden und doch kleiner als jeder angebbare Wert. Der Verfasser sucht zu zeigen, dass Kepler, Cavalieri, Wallis im Grunde die unendlich kleinen Nullwerte unter einer schwankenden Form anwenden; Euler giebt systematisch ihre Theorie. Johann Bernoulli, de l'Hospital, Poisson (und zuweilen Navier, Cournot, sogar auch Poinsot) scheinen die einzigen zu sein, welche an das Pseudo-Unendlichkleine glauben. Fermat, Roberval, Pascal, Newton, Leibniz bedienen sich der Methode des Unbegrenztkleinen, indem sie oft eine abgekürzte Redeweise gebrauchen,

welche die unachtsamen Leser inbetreff ihrer wahren Meinungen oft irregeleitet hat. Aber Tacquet und Pascal im siebzehnten Jahrhundert, Maclaurin im achtzehnten, Cauchy im neunzehnten haben auf bündige Weise den Sinn der Sätze gedeutet, in welche die gefährliche Wendung „unendlich klein“ eingeht.

In einem Anhange erörtert der Verfasser nach einigen Worten über Vieta und Barrow den Anteil, den d'Alembert, Landen, Carnot, Lacroix, Poinsot an derjenigen Vortragsweise haben, die jetzt allgemein gebräuchlich ist. Mn. (Lp.)

G. ENESTRÖM. Om en afhandling af Ascoli rörande integration af differentialeqvationen $\Delta^2 u = 0$ för en gifven Riemannsk yta. Stockh. Öfv. 99-101.

Bibliographische Notizen, betreffend die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

für eine gegebene Riemann'sche Fläche. E.

R. REIF. Die Anfänge der Variationsrechnung. Böklen Mitt. II. 90-98.

In dem vorliegenden Vortrage wird ausgeführt, dass Joh. Bernoulli der erste war, welcher der wissenschaftlichen Welt ein Problem der Variationsrechnung vorlegte, zu dessen Lösung er von der Optik gelangt, dass aber Jak. Bernoulli als Begründer der Variationsrechnung anzusehen ist, weil er eine Methode schuf, welche bis auf Lagrange die herrschende blieb. T.

G. LORIA. Il Passato e il Presente delle principali Teorie geometriche. Monografia storica. Torino 1887. 52 S. in 4°.

Der angegebene Umfang der Schrift zeigt schon, dass des Verfassers Absicht nur die sein konnte, in einem Ueberblick die

Hauptzüge der Entwickelung der neueren Geometrie zu geben, gewissermassen in einer Reihe von Skizzen das Entstehen und Herausbilden der wichtigsten Theorien der heutigen Geometrie vorzuführen. Sieben Skizzen dieser Art enthält die Arbeit.

Nach einem kurzen Ueberblick (S. 4-12) über die Geschichte der Geometrie seit den Zeiten der Aegypter und des Thales bis zum Erscheinen von Chasles' Aperçu historique (1837) behandelt sie die „Theorie der ebenen Curven" (S. 12-19), dann die „Theorie der Flächen" (S. 19-27), weiter die „Theorie der Curven doppelter Krümmung" (S. 27 - 31), das „Abbilden, Entsprechenlassen und Transformiren" (S. 31-38), die Plücker'sche „Geometrie der Geraden" (S. 38 - 42), die „nichteuklidische Geometrie" (S. 42-47), endlich (S. 47-52) die „Geometrie von *n* Dimensionen". Bei jedem dieser Abschnitte wird unter Aufdeckung der aus früheren Zeiten vorhandenen Anfänge der Anlass und die Ursache neuzeitlicher stärkerer Ausbildung der betreffenden Theorie vorgeführt. Tn.

A. Marre. Théorème du carré de l'hypoténuse. Bonc. Bull. XX. 404-406.

Teilt einen durch Wish aus dem Sanskrit entnommenen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes mit und zum Vergleiche damit noch einige andere ebenfalls auf Flächenzerteilung sich gründende Beweise. Tn.

R. H. van Dorsten. Inleiding op eene geschiedenis van de leer der Kegelsneden in de oudheid. Programma van het Erasmiaansch gymnasium. Rotterdam. Eeltjes. 39 S.

Handelt über die Geschichte der Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Im ersten Teil erhält man eine Uebersicht über alle Arbeiten, welche in der neuesten Zeit über die Geschichte der Mathematik im Altertum erschienen sind, und der Verfasser verweist hauptsächlich auf die Werke von Bretschneider, Hankel, Cantor, Tannery, Allman und Zeuthen. Das Werk des letztgenannten: „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum" bildet den Ausgangspunkt für die folgenden Betrach-

tungen, wobei eine Uebersicht über den Inhalt dieses Werkes gegeben und die Entwickelung der Geometrie bei den alten Aegyptern und Griechen mitgeteilt wird. Alsdann werden die Leistungen des Pythagoras und seiner Schule betrachtet und der Nachweis geführt, dass später die algebraische Bearbeitung mit der geometrischen Vorstellung vereinigt wurde. Weiter kommen Euklid und Apollonius an die Reihe, sowie die ersten Untersuchungen der Kegelschnitte durch Menaechmus. Das Ganze schliesst mit den Entdeckungen des Archimedes, welche neue Eigenschaften der Kegelschnitte zu Tage brachten. Bei der Besprechung derselben wird vor allen Dingen gezeigt, dass durch Archimedes bereits die Coordinatenlehre angewendet wurde, ebenso wie die analytische Methode sich schon in den Werken des Apollonius offenbart. An vielen Beispielen wird nachgewiesen, wie die Methode der Alten zur Entdeckung oder zum Nachweis der Eigenschaften der Kegelschnitte führte. G.

C. Le Paige. Sur un théorème attribué à La Hire. Bibl. Math. (2) I. 109.

Der Satz: „Wenn ein Kreis im Innern eines festen Kreises vom doppelten Radius rollt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des rollenden Kreises einen Durchmesser des festen" wird oft dem französischen Mathematiker La Hire zugeschrieben. Herr Le Paige lenkt die Aufmerksamkeit darauf, dass dieser Satz früher von Tacquet (1651) angegeben, und schon von Cardano (1572), nach einer Mitteilung von Ferrari, angedeutet worden ist. E.

S. A. Christensen. The first determination of the length of a curve. Bibl. Math. (2) I. 76-80.

S. A. Christensen. Den förste Bestimmelse af en krum Linies Lengde. Zeuthen T. (5) V. 121-26.

Die semikubische Parabel wurde bekanntlich fast gleichzeitig von Neil und Heuraet rectificirt. Die Note des Herrn

Christensen enthält eine Darstellung und Vergleichung der Lösungen der zwei genannten Mathematiker, woraus erhellt, dass sie wesentlich übereinstimmten, obgleich die Methode von Heuraet anscheinend allgemeiner war. Zum Schluss werden auch die Lösungen von Wren und Fermat berücksichtigt. E.

S. GÜNTHER. War die Cykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt? Bibl. Math. (2) I. 8-14.

Die Cykloide ist erst durch Galilei, Roberval und Pascal eingehender untersucht worden; aber nach einer Angabe von Wallis soll diese Curve schon früher bekannt gewesen sein. Herr Günther hat dieser Frage eine nähere Untersuchung gewidmet und ist dabei zu dem Resultate gelangt, dass Bouvelles (1501) wirklich die Cykloide construirt hat; dagegen ist es nicht wahrscheinlich, dass Nicolaus von Cusa von dieser Curve Kenntnis gehabt hat. E.

J. S. MACKAY. Historical notes on a geometrical theorem and its development (18th century). Edinb. M. S. Proc. V. 62-78.

Der Satz, um den es sich handelt, ist der folgende: „Der Abstand zwischen dem Umkreis- und dem Inkreis-Centrum eines Dreiecks ist das geometrische Mittel zwischen dem Umkreis-Halbmesser und seinem Ueberschuss über den Inkreis-Durchmesser“, oder anders ausgedrückt: „Die Potenz des Inkreis-Centrums in Bezug auf den Umkreis ist doppelt so gross wie das Rechteck zwischen dem Inkreis- und dem Umkreis-Halbmesser“. Die Noten sind möglichst in chronologischer Folge angeordnet. Die früheste angeführte Schrift ist ein Aufsatz von William Chapple, der in den „Miscellanea curiosa mathematica“ erschienen ist (das Datum nicht genau zu bestimmen, aber ungefähr 1746). Diese Zeitschrift wurde 1745 unter der Redaction von Francis Holliday begonnen und sollte vierteljährlich erscheinen. Neun Nummern wurden indes nur ausgegeben, und

das Buch ist jetzt sehr selten. Daher wird Chapple's Aufsatz beinahe vollständig wiedergegeben. Andere in der vorliegenden Note erwähnte Geometer sind Robert Heath (1747), John Turner (1748), John Landen (1755), Leonhard Euler (1765), Nicolaus Fuss (1794, 1798). Gbs. (Lp.)

J. S. Mackay. Solutions of Euclid's problems, with a rule and one fixed aperture of the compasses, by the Italian geometers of the sixteenth century. Edinb. M. S. Proc. V. 2-22.

Das hauptsächlichste Interesse dieser Abhandlung ist ein historisches. Es hebt an mit einem Citate aus Chasles, Aperçu historique (2. Ausg. 1875, S. 214-215) inbetreff der Geometrie des Lineals und des Zirkels. Hr. Mackay berichtet über den Ursprung der Versuche zur Lösung euklidischer Aufgaben durch die gerade Linie und eine einzige Zirkelöffnung, und seine Darstellung weicht etwas von der Chasles'schen ab. Schon 1547 übersandte Ferraro eine Herausforderung an Tartaglia. Einunddreissig Fragen wurden von jedem vorgelegt, damit der andere sie innerhalb einer gegebenen Zeit beantwortete, und mit Tartaglia's Fragen entstand dasjenige Problem, welches den Gegenstand des vorliegenden Artikels bildet. Vollständige Verweise werden in der Abhandlung gegeben, und die Lösungen von Tartaglia, Ferraro und Cardano, nebst der von Benedetti werden beigebracht, obschon gewöhnlich bloss die Construction und nicht der Beweis geliefert wird. Gbs. (Lp.)

Vigarié. Premier inventaire de la géométrie du triangle. Franç. Ass. (Toulouse). 87-112.

E. Dühring. Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. 3. Aufl. Leipzig. Fues's Verlag. XXVIII u. 610 S.

H. VON HELMHOLTZ. Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action. Berl. Ber. 225-236.

Nachdem der Verfasser am 27. Jan. 1887 über dieses Thema in der öffentlichen Sitzung der Akademie einen Vortrag gehalten hatte, ist ihm die Broschüre von Hrn. Adolf Mayer bekannt geworden: „Geschichte des Princips der kleinsten Action", Leipzig 1877. Daher veröffentlichte er von diesem Vortrage nur zwei Erörterungen, die eine über den Begriff der Action bei Leibniz, worüber sich bei A. Mayer nichts findet, und die zweite, das Verhältnis des Princips der kleinsten Action zu Hamilton's Princip betreffend, worin das Urteil des Verfassers von dem des genannten Autors (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 324) abweicht.

Der Begriff der Action findet sich in dem von Gerhardt 1860 herausgegebenen, unvollendet gebliebenen Leibniz'schen Manuscript über Dynamik als actio formalis bezeichnet; ihr rechnungsmässiger Wert wird schliesslich gleich dem Producte aus der Masse, der Weglänge und der Geschwindigkeit gesetzt oder, wenn die Weglänge durch das Product aus der Geschwindigkeit und der Zeit dargestellt wird, auch gleich dem Producte aus der lebendigen Kraft und der Zeit. Hält man mit dieser Begriffsbildung ein Fragment eines Briefes zusammen, der angeblich von Leibniz an Hermann gerichtet ist, in welchem der Ausdruck steht, die Action sei gewöhnlich ein Maximum oder Minimum, so erkennt man, dass für Leibniz „die Entdeckung des Princips der kleinsten Wirkung gleichsam vor den Füssen gelegen hat"; ausserdem bekommt das Princip einen anschaulicheren Sinn, wenn wir Leibniz' Begriff der Action hineintragen.

In dem zweiten Teile des Aufsatzes wird das Verhältnis von Hamilton's allgemeinem Princip der Mechanik zu dem der kleinsten Action erörtert, indem dieses letztere zuerst nach dem Lagrange'schen Verfahren dargestellt wird; „Lagrange's und Hamilton's Form sind durchaus übereinstimmend in den Voraussetzungen über die in das Problem eintretenden Functionen F und L, wie in den daraus zu ziehenden Folgerungen". Zuletzt wird die Jacobi'sche Form mit der Hamilton'schen verglichen.

„Die Form von Lagrange ist die gemeinsame Quelle der beiden anderen Formen, die durch Elimination verschiedener Grössen mittels der Zusatzbedingung entstehen.“ Lp.

G. Helm. Die Lehre von der Energie historisch-kritisch entwickelt. Nebst Beiträgen zu einer allgemeinen Energetik. Leipzig. A. Felix. VI u. 104 S. gr. 8°.

Die Einleitung der Schrift (S. 1-3) handelt vom Stil in der Wissenschaft, von der Eigenart historischer Betrachtung und dem Werte derselben für die Naturforschung.

Der erste Teil der Arbeit (S. 4-22) spürt den Quellen der Energie-Ideen auf den verschiedensten Gebieten nach, nämlich in der theoretischen Mechanik, in der Physik, in der Philosophie und besonders in der Technik.

Im zweiten Teile (S. 23-44) wird die Begründung des Energiegesetzes erörtert. An der Spitze findet man die Aufstellung des Energieprincips durch R. Mayer nebst einer Kritik seiner Schlussweise. Die experimentellen Belege der Aequivalenz von Wärme und Arbeit durch J. P. Joule und ihre Bedeutung für die Befestigung der Energie-Ideen werden dann geschildert. Hieran schliesst sich die Darstellung der Grundvorstellungen über die Erhaltung der Energie nach Hrn. H. von Helmholtz; seine Herleitung des Satzes aus dem Axiom, dass ein Perpetuum mobile unmöglich ist, hält der Verf. für die einzige stichhaltige Begründung desselben. Der weitere Helmholtz'sche Satz, dass die Summe der vorhandenen lebendigen Kräfte und Spannkräfte constant ist, leitet dann zur Betrachtung der Eigenenergie der Körper durch R. Clausius und W. Thomson über und damit zur Begründung der jetzigen Terminologie durch den letzteren Physiker und durch Rankine. Eine Schlussbetrachtung fasst das Ergebnis dieses hauptsächlich historischen zweiten Teiles zusammen.

Der dritte Teil (S. 45-75) ist dazu bestimmt, einen Abriss der Energetik zu geben. Am Schlusse des vorangehenden Teiles hatte der Verf. die Frage aufgeworfen: „Welches ist das Kenn-

zeichen einer Energieform?" Nach seiner Meinung liegen die Mittel zur Beantwortung dieser Frage nicht auf dem Gebiete der reinen Energie-Ideen, sondern sind aus dem Bündnisse derselben mit dem Vorstellungskreise des Entropiebegriffs erwachsen. Die Abschnitte, in welchen die Befruchtung der Energie-Ideen durch den Entropiebegriff klar gelegt wird, sind betitelt: Das Energiegesetz als Integralgesetz, der Einfluss des Entropiegesetzes, das Energiegesetz als Grundgesetz, die Formen der Energie. Im Anschluss an die historische Entwickelung giebt der Verf. eine Vorstellung, wie man durch Ausbeutung der schon von Maxwell, Zeuner und Mach betonten analytischen Gleichartigkeit der Energieformen zu einer Energetik im Sinne Rankine's gelangen kann; zuletzt geht der Schluss dieses Teiles sogar mit wenigen Worten auf die Anwendbarkeit der entwickelten Gedanken auf die Volkswirtschaftslehre ein.

Die 79 literarischen oder auch erläuternden Anmerkungen sind an das Ende des Werkes gestellt (S. 76-104).

Wegen der grossen Menge und Vielseitigkeit der darzustellenden Gedanken ist das Ganze eine in grossen Zügen angelegte Skizze, welche der Durchführung im einzelnen bedarf. Sie ist daher zwar geeignet, eine erste Uebersicht über das weite betrachtete Feld zu geben, kann aber nicht eine klare Vorstellung aller Einzelheiten verschaffen. Lp.

M. Planck. Das Princip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Facultät Göttingen preisgekrönt. Leipzig. B. G. Teubner. VI u. 247 S. 8°.

F. Rosenberger. Die Geschichte der Physik in Grundzügen. 3. T. Geschichte der Physik in den letzten 100 Jahren. 1. Abt. Braunschweig. Vieweg u. S. 318 S.

E. Hoppe. Die Entwickelung der Lehre von der Elektricität bis auf Hawksbee. Pr. Hamburg.

Der Verfasser lässt die Geschichte der Elektricität, wie in seinem grösseren Werke, so auch diesmal von Gilbert ihren Anfang nehmen, weil dieser Forscher zuerst mit dem Experimente an die neue, merkwürdige Naturkraft herantrat, wogegen Altertum und Mittelalter sich lediglich auf die Sammlung von Beobachtungen beschränkten. Gilbert arbeitete mit einem zwar primitiven, für seine Absichten aber durchaus genügenden Elektroskope, studirte damit den elektrischen Charakter einer grossen Anzahl von Mineralien, stellte fest, dass feuchte Luft der elektrischen Wirkung abträglich ist, suchte die Beziehungen der Elektricität zur Wärme zu ergründen und bemerkte auch bereits Unterschiede der elektrischen und der magnetischen Kraftäusserung. Seine Theorie dieser Kräfte vermochte Gilbert allerdings nur im Zusammenhange mit den überlieferten scholastischen Vorstellungen von „Materie“ und „Form“ zu begründen. Auf Gilbert folgen der Zeit nach zunächst Kircher und Cabeus, die jedoch eben nichts Belangreiches dem schon erreichten Wissensstande hinzuzufügen wussten; einen Fortschritt bewirkte erst wieder der grosse Physiker Otto v. Guericke, der die erste diesen Namen verdienende Elektrisirmaschine angab, den elektrischen Funken wahrnahm und auf die mit grösserer Entfernung fortschreitende Schwächung der elektrischen Action hinwies. Man kann sogar sagen, dass er Du Fay in der Entdeckung der Influenz, Winkler in der Entdeckung der Spitzenwirkung zuvorgekommen sei. Neu war uns die Mitteilung, dass kein geringerer als Newton den elektrischen Puppentanz erfunden und wahrscheinlich auch zuerst das elektrische Licht gesehen hat. Die „Accademia del cimento“ ist der Auffindung des Gegensatzes zwischen Leitern und Isolatoren nahe gewesen, hat jedoch die entscheidenden Schlüsse nicht selbst gezogen. Eine neue Etappe in der Entwickelung der Lehre von den Imponderabilien bezeichnet der Name Boyle's; denn dieser Gelehrte erkannte als der erste, dass die elektrische Anziehung nicht des Substrates der atmosphärischen Luft bedarf, sondern auch durch den leeren Raum hindurch sich fortpflanzt. Gegen Ende des XVII. Jahrhunderts tritt immer bestimmter die Vermutung auf, dass der

Blitz ein elektrisches Phänomen sein müsse, und zwar werden die ersten Versuche zur Prüfung dieser Analogie in einem Briefe beschrieben, den Wall 1708 an den Ritter Sloane richtete. Damit sind wir denn bereits bis zur Epoche Hawksbee's gekommen, und mit einer Analyse der von diesem verdienten Manne ausgegangenen Leistungen schliesst unsere Abhandlung ab. Derselbe untersuchte aufs genaueste das sogenannte „leuchtende Barometer“, construirte einen sinnreichen Apparat zur Bekräftigung der Wahrheit, dass Lichtwirkungen durch Elektricität hervorgebracht werden können, und erkannte, dass die elektrische Kraft ausschliesslich an der Oberfläche der geladenen Körper haftet. Die Autoren — auch Hoppe selbst — hatten früher diese bedeutsame Entdeckung übereinstimmend Gray zugeschrieben. Endlich wusste auch Hawksbee bereits, welche Körper die Eigenschaft von Leitern besitzen, und ebenso kommt in seinen Schriften erstmalig das Wort „Influenz“ vor. Ein sorgfältig gearbeiteter Katalog aller älteren Veröffentlichungen über Elektricität ist der interessanten Studie beigegeben; nur der Abschnitt über das leuchtende Barometer würde, wie ein Vergleich mit einem vom Referenten im fünften Bande der Zeitschrift „Kosmos“ abgedruckten Aufsatze ersehen lässt, noch einzelner Vermehrungen fähig sein. Gr.

P. Riccardi. Sopra un antico metodo per determinare il semidiametro della terra. Modena Mem. VIII. 63-68.

Das Verfahren, um welches es sich in dieser Note handelt, wurde um die Mitte des XVI. Jahrhunderts von dem bekannten sizilianischen Mathematiker Maurolycus vorgeschlagen. Von einem um h über die Meeresfläche erhabenen Punkte aus soll man die Distanz d bis zu jenem Punkte messen, in welchem eine vom ersteren aus an die Erdkugel gelegte Tangente jene berührt, und zwar soll man sich hiezu eines eben auch von Maurolycus selbst angegebenen Distanzmessers („Embadometer“) bedienen. Wenn dann r der Erdhalbmesser ist, so gelten offenbar die folgenden Beziehungen:

$$(r+h)^2 = r^2+d^2; \quad r = \frac{(d+h)(d-h)}{2h}.$$

Wright und Clavius änderten dies Verfahren in dem Sinne ab, dass sie statt d lieber die viel leichter zu messende Depression δ des Horizontes bestimmten und so zu der bekannten Formel

$$r = \frac{h\cos\delta}{1-\cos\delta} = \frac{h\cos\delta}{2\sin^2\frac{1}{2}\delta}$$

gelangten, und mittels dieser letzteren soll der bekannte Geodät Clarke, vom Gipfel des schottischen Berges Ben Nevis aus, für die Grösse r den sehr nahe an die Wahrheit heran reichenden Wert 6373 km ermittelt haben. Herr Riccardi erörtert nun die Frage, ob auf ähnliche Weise wohl auch die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt aufgefunden werden könne. Er bezeichnet mit s und s' die Längen der elliptischen Meridian-Bogen, welche vom Aequator bezüglich bis zu den Punkten des Meridianes reichen, in denen der nach dem erhabenen Punkte gezogene Radiusvector und die von dort aus an die Meridianellipse gelegte Berührende letztere treffen, und setzt sodann, unter l und l' die wahren Breiten dieser Punkte verstanden,

$$s-s' = a(1-e^2)(m(l-l') - n\sin(l-l')\cos(l+l') \\ + \tfrac{1}{2}p\sin 2(l-l')\cos 2(l+l') + \cdots);$$

hier bedeutet a die grosse, b die kleine Halbaxe, e die Excentricität $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$; m, n, p u. s. w. sind algebraisch-rationale Functionen von e. Führt man deren Werte ein und nennt g die lineare Länge eines Meridiangrades, dessen Mitte der geographischen Breite $\frac{1}{2}(l+l')$ entspricht, so wird

$$g = \frac{s-s'}{l-l'} = a(1-e^2)[(l-l') + \tfrac{3}{4}e^2(l-l') - \tfrac{3}{4}e^2\sin(l-l')\cos(l+l') \\ + \tfrac{45}{64}e^4(l-l') - \tfrac{15}{16}e^4\sin(l-l')\cos(l+l') \\ + \tfrac{15}{128}e^4\sin 2(l-l')\cos 2(l+l') + \cdots].$$

Daraus wird, wenn C, D, F, G gewisse leicht verständliche Abkürzungen vorstellen, und wenn $\pi = 180k$ gesetzt ist, für e, da ja g auch auf anderem Wege, nämlich gleich

$$ak(1-e^2)(1+Ce^2+De^4+\cdots)$$

gefunden werden kann, mit Vernachlässigung höherer Potenzen

von e die nachstehende biquadratische Bedingungsgleichung abgeleitet:

$$e^4 + \frac{kC-F}{kD-G}e^2 + \frac{k-l+l'}{kD-G} = 0.$$

Dass aber l und l' durch einfache trigonometrische Rechnung gefunden werden können, sobald man die geocentrische Breite des Beobachtungspunktes und dessen Erhebung über dem Meeresniveau kennt, braucht nicht besonders betont zu werden.

Gr.

G. Poncet. Pourquoi l'année commence-t-elle le premier janvier? Flammarion Rev. d'Astr. VI. 378-382.

Durch eine Ordonnanz vom Jahre 1564 wurde in Frankreich unter der Regierung Karl's IX. der Beginn des Jahres auf den ersten Januar verlegt. Herr Poncet giebt eine Uebersicht über die Aenderungen des Kalenders seit der ältesten römischen Zeit und stellt fest, dass weder religiöse Motive noch Rücksichten auf die bevorstehende Einführung des gregorianischen Kalenders jene Ordonnanz in Frankreich veranlasst haben, sondern dass der Kanzler Lhospital, um den vielen Klagen der Geschäftsleute abzuhelfen, für alle Provinzen Frankreichs, die bis dahin das bürgerliche Jahr an verschiedenen Terminen begonnen hatten, unter dem minderjährigen König denjenigen Tag als Jahresanfang festsetzen liess, der im Süden von Frankreich und besonders auch in Rom gebräuchlich war. Lp.

G. J. Allman. On the name of the so-called „theorem of the gnomon". Bibl. Math. (2) I. 22.

Das fragliche Theorem ist das von Euklides in Elementa I. 43 bewiesene. Herr Allman erwähnt, dass Peletier in seiner Ausgabe der Elementa die zu diesem Theorem gehörende Figur „gnomisch" (Figuratio gnomica) genannt hat, und dass später Billingsley, ein englischer Herausgeber der Elementa, den Namen auf das Theorem selbst übertragen hat. E.

A. Wittstein. Bemerkung zu einer Stelle im Almagest. Schlömilch Z. XXXII. Hl.-A. 201-208.

Eine zu Neapel befindliche arabische Himmelskugel aus dem 13. Jahrhundert trägt eine Aufschrift, laut welcher der Verfertiger je 16° 46′ den Sternlängen des Almagest zugefügt habe. Der Verfasser erschliesst hieraus, dass jener Verfertiger sich bezüglich der Epoche des ptolemäischen Verzeichnisses geirrt habe, da diese darnach auf das Jahr 151 oder 119 n. Chr. fallen müsste; er nimmt hieraus Anlass, die Zuverlässigkeit der Positionen des Ptolemäus an einem Beispiele wenigstens zu prüfen.

Tn.

J. C. Houzeau. Note sur la bibliographie générale de l'astronomie. Belg. Bull. XIII. 692-698.

Uebersicht über die Geschichte der Astronomie unter sehr subjectivem Gesichtspunkte. 1. Fetischistische Periode. Die Planeten sind unbekannt; man beobachtet die Sonne und den Mond, und man unterscheidet die Jahreszeiten. 2. Periode der Sternanbetung. Man findet die Planeten (Venus, Mars, Jupiter, Saturn und zuletzt Mercur) und legt ihnen eine Beseelung bei. 3. Astrologische Periode. Man findet, dass die Bewegungen der Planeten regelmässig, nicht willkürlich vor sich gehen, doch schreibt man den Gestirnen noch einen Einfluss auf die Erde und den Menschen zu. 4. Wissenschaftliche Periode. Die Bewegungen der Gestirne sind nur noch ein grosses Problem der Mechanik; sie werden ihrer fälschlichen Macht entkleidet. Für den Verf. eröffnet Copernicus die vierte Periode, während die zweite noch zur Zeit des Perikles (nach Eudoxus!) bestand.

Mn. (Lp.)

C. Anschütz. Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. Schlömilch Z. XXXI. Hl.-A. 161-171, 202-219. XXXII. Hl.-A. 1-15.

Mit gründlicher Quellenkenntnis ausgerüstet, sieht sich der Verfasser in der Lage, einige von den Geschichtschreibern der

Astronomie für anerkannt erachtete Umstände wesentlich zu modifiziren. Er thut nämlich dar, dass Tycho Brahe zwar die Variation, nicht aber auch die heute unter dem Namen der jährlichen Gleichung bekannte Anomalie der Mondbahn aufgefunden habe. Zur Entdeckung der letzteren wurde Kepler angetrieben, als er seinem Freunde und Correspondenten Herwart von Hohenburg eine Reihe von Fragen über die Unregelmässigkeiten der Mondbewegung zu beantworten sich genötigt sah, und nicht minder war er bei dieser Gelegenheit an die Erkenntnis, dass der Mond auch eine Säculargleichung besitze, so nahe herangekommen, dass es nur eines Zugreifens von seiner Seite bedurft hätte. Er verwarf leider, wie ihm dies zum öfteren begegnete, später wieder den bereits von ihm aufgestellten Satz, dass die variable Excentricität der Erdbahnellipse sich auch in der von unserem Trabanten zurückgelegten Bahncurve abspiegeln müsse.

Gr.

M. C. P. Schmidt. Zur Geschichte der geographischen Literatur bei Griechen und Römern. Pr. Berlin.

Wir begnügen uns, aus der für die Geschichte der älteren Erdkunde sehr beachtenswerten Schrift diejenigen Punkte herauszuheben, welche uns an diesem Orte besonders zu interessiren geeignet sind. Da ist denn zunächst zu bemerken, dass der Verfasser durch Zusammenhaltung der spärlichen Nachrichten zu dem Schlusse gelangt, Anaximander (um 570 v. Chr.) sei der erste, der um etwa siebzig Jahre später lebende Hekataeus dagegen sei der zweite Kartograph der Griechen und zugleich deren erster, diesen Namen verdienende Geograph gewesen. Die folgenden Namen Herodor, Hellanikus, Antiochus mögen auf sich beruhen; dagegen begegnet uns nunmehr wieder ein bedeutender Mann, Herodot, und da macht es sich der Verfasser zur Aufgabe, die Masse und Messungsmethoden dieses grossen Reisenden einer näheren Prüfung zu unterziehen. Als Ergebnisse sind zu verzeichnen, dass Herodot Entfernungen nicht gut nach der Zeit zu bestimmen vermochte, weil ja die altgriechische „Stunde“ nichts Gleichbleibendes war, sondern in den verschiedenen Jahres-

zeiten auch eine verschiedene Länge hatte, dass ferner derselbe auch vom Flächenmasse noch keinen recht klaren Begriff besass. Die Erde hielt er für eine Scheibe, auch kartographisch ist er schwerlich thätig gewesen, denn ihm — wie selbst noch weit späteren verdienten Männern, Thukydides und Polybius — gebrach es noch an den elementarsten geometrischen Kenntnissen, obwohl zu diesen damals bereits durch die Schulen des Thales und Pythagoras der Grund gelegt war. Noch sei erwähnt, dass der erste wirkliche Erdglobus um 155 v. Chr. durch den Cilicier Krates angefertigt worden ist. Gr.

S. Günther. Notiz zur Geschichte der Klimatologie.
Bibl. Math. (2) I. 65-69.

Herr Günther bemerkt, dass das Altertum zwar für die Geschichte der Meteorologie wenig zu bieten hat, dass aber dennoch von den Griechen und Römern einzelne meteorologische Thatsachen richtig aufgefasst wurden. Hier werden besonders die Ansichten des Apologeten Minucius Felix über das Wesen des Inselklimas behandelt, woraus hervorgeht, dass Minucius eine sehr gute Charakteristik dieses Klimas zu geben verstanden hat. E.

Ch. M. Schols. Erreurs dans les tables de Callet.
Delft Ann. III. 130-139.

Verfasser weist in der vorliegenden Schrift auf einige Fehler in den Formeln und Berechnungen hin, welche in der bekannten Logarithmentafel von Callet vorkommen, wobei er die Ausgabe von 1885 zu Grunde legt. So werden die Formeln, durch welche Sinus und Cosinus auf mehr als 10 Decimalen berechnet werden, geprüft und die nötigen Verbesserungen angegeben. Verfasser findet bei genauerem Nachrechnen 184 falsche Ziffern in 18 Formeln. Auch ein paar Rechenfehler in Euler's Introductio in analysin infinitorum werden nachgewiesen und verbessert. Schliesslich wird ein verbesserter Wert für $\sin 1''$ angegeben, welcher

in vielen Lehrbüchern mit einem Fehler in der 14ten Decimale vorkommt. G.

HEINR. SIMON. Verzeichnis von Druckfehlern in den Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe. Schlömilch Z. XXXI. Hl.-A. 99-101.

Capitel 2.

Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

FL. JENKIN. Papers, literary, scientific, etc. by the late Fleeming Jenkin. Edited by Sidney Colvin and J. A. Ewing. With a Memoir by Robert Louis Stevenson. London. Longmans, Green, and Co. 2 Bde. 1887.

Anzeige dieser gesammelten Werke in Nature XXXVII. 433-435 durch P. G. T. Lp.

G. CANTOR. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. I. II. Zeitschr. f. Phil. u. phil. Kritik. 91 u. 92.

Von den acht Abschnitten, in welche diese Arbeit zerfällt, bringen die ersten sieben eine Reihe von Briefen des Verfassers an verschiedene Mathematiker und andere Gelehrte, welche allerlei Punkte der vom Verfasser aufgestellten Theorie der unendlichen Grössen bemängelt oder nicht hinreichend klar gefunden hatten. Da diese Briefe bei aller Wissenschaftlichkeit des Inhalts nicht sowohl ex cathedra reden, als vielmehr auf Schwierigkeiten des Verständnisses in möglichst populärer und erschöpfender Weise eingehen, die Kernpunkte der Theorie hervorheben, die Differenz-

punkte zwischen dem Verfasser und anderen Autoritäten feststellen, und dem Vorstellungsvermögen des Lesers auf mannigfache Weise zu Hülfe kommen, so bilden sie einen recht willkommenen Commentar zu den früheren Arbeiten des Verfassers auf diesem Gebiete. Folgende Punkte treten besonders hervor. Der Verfasser unterscheidet drei Arten des Unendlichen: 1) das absolute (unvermehrbare) = Gott, 2) das erfahrungsmässige (vermehrbare) in der realen Welt, 3) das abstracte („transfinite") im Denken. Indem man die Existenz jeder einzelnen von diesen drei Arten des Unendlichen bestreiten oder behaupten kann, ergeben sich durch Combination acht verschiedene Standpunkte. Der Verfasser bekennt sich zu demjenigen, welcher die Existenz aller drei Arten behauptet. Je nachdem die Ordnung der gleichen Elemente einer Menge beliebig oder bestimmt ist, entspricht dieser Menge eine Cardinalzahl oder ein Ordnungstypus (Idealzahl). Letzterer wird zur Ordnungszahl, wenn die Menge wohlgeordnet ist. In der Bestimmung des Begriffs der Zahl befindet sich der Verfasser namentlich mit Helmholtz und Kronecker im Widerspruch. Er will die Zahl nicht als blosses Zeichen betrachtet wissen, auch nicht als Resultat eines von der Zeit abhängigen subjectiven Zählprocesses, sondern als Ergebnis gleichzeitiger Zusammenfassung vieler Elemente. Der Begriff der Irrationalzahl soll nicht überflüssig gemacht, sondern erforscht und klar gestellt werden. Ueber die Auffassung des Unendlichen hat der Verfasser eingehende historische Studien gemacht, die sich auch auf Mathematiker des Altertums und Kirchenväter erstrecken. Seiner eignen Auffassung nach ist das in der Mathematik als Grenze erscheinende Unendlichgrosse (∞) als potentiell Unendliches oder Unendlichwerdendes scharf zu unterscheiden von der „transfiniten", bestimmten, actuell unendlichen Zahl (ω), die das Unendlichseiende repräsentirt, aber nur die kleinste eines ganzen Systems transfiniter Zahlen ist, für welches wesentlich andere Rechnungsregeln gelten, als für die endlichen Zahlen. Die mit der Anwendung des Unendlichkeitsbegriffes oft verbundenen Widersprüche erklärt der Verfasser durch den fehlerhaften Versuch, Gesetze der endlichen Zahlen auf das Unendliche anzu-

wenden. So liegen ihm auch ω und alle anderen transfiniten Zahlen ausserhalb der Zahlenreihe 1, 2, 3 ... Actuell unendliche Mengen sind z. B. der Inbegriff aller endlichen ganzen positiven Zahlen, die Gesamtheit aller Punkte eines Kreises, aller punktartig vorzustellenden Monaden, die einen Körper constituiren. Wie 1 die kleinste aller endlichen Zahlen ist, die grösser ist als alle der Bedingung

$$1-z_\nu = \frac{1}{\nu} \text{ (für unendlich werdendes } \nu)$$

genügenden Zahlen z_ν, so ist ω die kleinste aller unendlichen Zahlen, die grösser ist als alle endlichen Zahlen ν. Eine wachsende endliche Zahl ν kommt der Zahl ω nicht beliebig nahe, sondern jede noch so grosse Zahl ν bleibt von ω ebensoweit entfernt als die kleinste endliche Zahl. Dagegen bestreitet der Verfasser, im Gegensatze zu Stolz und Dubois-Reymond, die Existenz actualer unendlich kleiner Zahlgrössen. (Differentiale sind veränderliche, beliebig klein anzunehmende Hülfsgrössen.) Das Archimedische Axiom, dass aus jeder noch so kleinen begrenzten Strecke durch endliche Vervielfachung beliebig grosse endliche Strecken erzeugt werden können, erscheint im Lichte der Cantor'schen Theorie als ein bewiesener Satz.

Der achte Abschnitt der Abhandlung giebt im ersten Teile die Fundamente einer Theorie der Cardinalzahlen. Aequivalente Mengen sind solche, die sich gegenseitig eindeutig und vollständig zuordnen lassen. Weiter werden Begriff und Eigenschaften der Addition und Multiplication endlicher und unendlicher Mengen erörtert. Wesentlich ist hierbei der Umstand, dass einer unendlichen Menge dieselbe Zahl zukommen kann, wie einem ihrer Bestandteile. Der in diesem Satze von Alters her gefundene Widerspruch löst sich nach Cantor durch folgende Unterscheidung: Ist M' Teil einer Menge M, so hat M mehr Realität als M', die den beiden Mengen M und M' zukommenden Cardinalzahlen sind aber gleich. Die Theorie der transfiniten Cardinalzahlen erfordert die Heranziehung der Ordnungstypen, mit welchen sich der zweite Teil dieses Abschnittes beschäftigt. Man kann diese Untersuchungen wohl als eine Ausdehnung der

Combinationslehre aus dem linearen in höher dimensionirte Gebiete bezeichnen, insofern jede gewöhnliche Permutations- oder Combinationsform als lineare Gruppe von Buchstaben, Ziffern, Punkten oder sonstigen Elementen bezeichnet werden kann. Diese Untersuchungen gipfeln in der Lösung der Aufgabe: ,die Anzahl aller „zweifachen Ordnungstypen von gegebener Cardinalzahl *m*“ zu bestimmen, d. h. die Anzahl aller Stellungen, welche *m* Punkte auf den m^2 Eckpunkten eines ebenen quadratischen Gitters von der Seitenzahl *m* einnehmen können. Mit der Erweiterung auf *n*-fache Ordnungstypen tritt die Aufgabe sodann aus dem ebenen in das *n*-dimensionale Gebiet. Es handelt sich dabei offenbar um eine Aufgabe der Combinationslehre, welche im linearen Gebiete gegenstandlos wird, da *m* Punkte auf einer Geraden in dem hier festgestellten Sinne nur eine Anordnung zulassen. Eine Fortsetzung dieser Untersuchungen ist in Aussicht gestellt. Schg.

GERCKEN. Die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Pr. Perleberg.

Gercken, der für den jungen mathematischen Lehrer eine Encyklopädie der Mathematik für notwendig hält, die von den philosophischen Grundlagen bis zu den praktischen Handgriffen führt, liefert einen Anfang zur Verwirklichung dieses Gedankens, indem er die psychologischen Grundlagen der Mathematik untersucht. Er stellt Kant's und Mill's Grundlehren über das Wesen der Mathematik gegenüber, zergliedert die psychischen Functionen, die dem wissenschaftlichen Denken zu Grunde liegen und gewinnt das Ergebnis, dass das mathematische Denken es mit ursprünglich apriorischen Gegebenheiten und daraus selbst geschaffenen Objecten zu thun hat. Es beruht auf Thatsachen der Anschauung, bei denen jeder aus dem Object stammende Irrtum ausgeschlossen ist. Für die Geometrie wie für die Arithmetik nimmt Gercken in Uebereinstimmung mit Lange die Raumanschauung als Grundlage an. Die Rechtfertigung der Behauptung, dass die Arithmetik auf Raumanschauung beruhe, — Gercken behauptet, dass man die fundamentalen Sätze der Arithmetik

nur streng beweisen könne, wenn man die Einheit als Intervall zweier gleich weit von einander entfernter Punkte einer Punktreihe auf einer geraden Linie ansieht —, ist ebenso unzureichend wie die in Lange's logischen Studien. Die Gegenüberstellung von Kant und Mill in einer Untersuchung über die psychologischen Grundlagen der Mathematik kann nur irre leiten. Nur Mill führt eine psychologische Untersuchung. Kant's Ansichten über das Wesen der Mathematik beruhen auf logischen Betrachtungen, wie z. B. überzeugend Riehl nachgewiesen hat. Mi.

BINDE. Begriff, Urteil und Schluss. Pr. Glogau.

Binde setzt die Entwickelung der logischen Verhältnisse aus erkenntnistheoretischem Gesichtspunkte fort. Er verfolgt die Bildung der Begriffe, Urteile und Schlüsse und zeigt deren inneren Zusammenhang. Kategorien sind ihm die Causalität, Substantialität und Qualität, während er (mit Recht?) die Quantität als eine blosse Merkmalsbestimmung der Qualität unterordnet.

Mi.

TROGNITZ. Die mathematische Methode in Descartes' philosophischem Systeme. Pr. Saalfeld.

Trognitz prüft die Gründe, die Descartes bewogen haben, in der Philosophie die mathematische Methode anzuwenden, und untersucht, wie weit das System diese Methode thatsächlich befolgt. Eine eigentliche Kritik der für den Rationalismus massgebenden mathematischen Methode innerhalb der Philosophie ist nicht gegeben. Trognitz begnügt sich, das sehr bestreitbare Verdienst von Descartes um Durchführung der mathematischen Methode in der Philosophie zu constatiren. Mi.

Die Philosophie der Mathematik nach der Lehre Hoëne Wronski's. Phys. math. Wiss. II. 271-288. (Russisch.)

M. W. Drobisch. Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft. 5. Aufl. Hamburg. Voss. XXVIII u. 247 S.

P. O. Schmidt. Ursprung und Bedeutung des Raum- und Zeitbegriffs im Lichte der modernen Physik. Diss. Halle. 57 S. 8°.

R. Bettazzi. Sul concetto di numero. Besso Per. mat. II. 97-113, 129-145.

Sehr gedrängte, nur für Sachkundige verständliche Zusammenfassung der verschiedenen modernen Ansichten in Bezug auf den Zahlbegriff. Vergleichung der analytischen und der synthetischen Methode für die Einführung dieses Begriffs; und Skizze einer Entwickelung der Principien der Arithmetik nach der zweiten Methode, welcher der Verfasser, namentlich in pädagogischer Hinsicht, den Vorzug giebt. Vi.

Ch. Méray. Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 341-360.

Hr. Méray führt eine in seinem Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale 1872 aufgestellte neue Begriffsbestimmung der incommensurablen Zahlen durch. Es existirt keine Eigenschaft der incommensurablen Zahlen, die sich nicht auf eine Eigenschaft der Variablen zurückführen liesse. Mi.

E. G. Husserl. Ueber den Begriff der Zahl, psychologische Analysen. Habilitationsschrift Halle. 64 S. 8°.

Macfarlane. The logical form of geometrical theorems. Annals of Math. III. 154-155.

Hr. Macfarlane stellt für geometrische Sätze die logischen Grundformeln $\Sigma A\{x = xy\}$ und $\Sigma A\{xy = xyz\}$ anstatt der im Syllabus of Geometry und in Halsted's Elements of Geometry gewählten Ausdrücke auf. Aus seinen Formeln lassen sich drei Regeln für Contraposition und Conversion geometrischer Sätze algebraisch beweisen. Mi.

A. Wernicke. Die Grundlage der Euklidischen Geometrie des Masses. Pr. Gymn. Braunschweig. 58 S. 4°.

Vorliegender Versuch, der freilich nach des Verfassers Selbstkritik noch nicht die zu einem Lehrbuche geeignete Abrundung gewonnen hat, ist als ein Repetitorium für obere Klassen höherer Schulen bestimmt, will „die euklidische Geometrie des Masses als Ausfluss eines Princips kennen lehren und dabei deren Stellung im Organismus unseres Wissens bestimmen". („Die systematische Kraft der Mathematik wird selbst von den Lehrern der Mathematik durchaus noch nicht allgemein in richtiger Weise gewürdigt." Wernicke, Goniometrie und Grundzüge der Trigon. S. V.) Die Capitelüberschriften: „Die Geometrie" (S. 5-25), „Die Euklidische Geometrie" (S. 25-33), „Die Euklidische Geometrie des Masses" (S. 33-51), „Die Gliederung der Euklidischen Geometrie des Masses" (S. 51-57) kennzeichnen den Inhalt und dessen methodische Behandlung. Tn.

Ganser. Die Entstehung der Bewegung. Graz. Leuschner u. Lubensky.

Um die Entstehung der Bewegung zu erklären, stellt Ganser folgende Erklärung auf: „Die einheitliche Substanz besitzt virtuelles Vermögen. Ein Vermögen zu wirken, wird erst zur wirklichen Kraft, indem es von einem Punkte aus sich teilt und geteiltes gegensätzliches Streben äussert, was es aber wieder nur kann, indem es sich auf denselben Punkt, von dem aus es sich teilte, (den Subjectpunkt) bezieht". Er nimmt dann an, dass die Organisation von einem einzigen Punkt aus beginnt, wo aus dem virtuellen Vermögen lebendige Kraft entsteht. Danach entwickeln sich ähnliche primitive Kraftsysteme und successive

Linien-, Flächen- und Körperkräfte. Ganser glaubt hiermit eine Kosmogonie geliefert zu haben. Mi.

J. EPSTEIN. Die logischen Principien der Zeitmessung. Diss. Leipzig. 48 S. 8°.

C. LAGRANGE. Sur la conception purement mécanique de l'Univers. Flammarion Rev. d'Astr. VI. 420-424.

Der Artikel führt den Gedanken aus, dass wegen der Massenverlegungen, die auf der Erde durch den Menschen und die Tiere erfolgen, die Vorherbestimmung aller Bewegungen des Erdkörpers und daher auch der Himmelskörper von Aufgaben der Psychologie abhängig wird, also nicht durch rein mechanische Gesetze erfolgen könne. Lp.

F. KERZ. Plaudereien über die Kant-Laplace'sche Nebularhypothese. Jena. Fr. Maucke's Verlag (A. Schenk). VIII u. 103 S. gr. 8°.

Der Verfasser ist entschiedener Gegner der Kant'schen Hypothese, nach welcher das Sonnensystem sich durch Verdichtung eines kosmischen Nebels gebildet haben solle; die Laplace'sche Hypothese dagegen, welche mit einem schon verdichteten Centralkörper beginnt, der von einer in gleicher Richtung mit ihm sich drehenden Atmosphäre umgeben ist, wird für die einzig wissenschaftliche erklärt. Herr Kerz vervollständigt die Laplace'sche Hypothese durch Hinzufügung einer Ergänzung: Die Atmosphäre der Sonne sei durch den excentrischen Stoss eines anderen kleineren Weltkörpers gegen die Sonne entstanden. Wegen der hiermit verbundenen Wärmeentwickelung habe sich der Körper in eine Gasmasse verflüchtigt; die Rotation der Sonne und der Gasmasse in der Richtung des Stosses sei Folge des letzteren; das Planetensystem sei durch spätere Zusammenballung der zerstreuten Masse zu kleineren Körpern entstanden, welche sich gegenseitig anzogen und zu grösseren Weltkörpern angewachsen

seien. Um auf bekannte physikalische Gesetze zurückgreifen zu können, wird ein vierter Aggregatzustand der zerstreuten Masse angenommen, auf den je nach Bedürfnis bald die Eigenschaften der flüssigen, bald die der festen, bald die der gasförmigen Körper übertragen werden. Die Durchführung dieser Gedanken ist vom Verfasser in einer Reihe von Schriften versucht worden, zuletzt 1884 in den „Erinnerungen an Sätze aus der Physik und der Mechanik des Himmels" mit mehr mathematischer Begründung.

Der Verfasser hebt wiederholt hervor, dass er ein Dilettant ist, und spricht durchweg mit Ironie von den gelehrten Fachmännern, wendet sich daher zur Entscheidung über seine Ideen an die gebildeten Laien. Vor allem müsste man dann aber verlangen, dass er die Gesetze genau kennt, auf welche er seine Schlussfolgerungen gründet. Weder ist er jedoch mit den Wirkungen des Gravitationsgesetzes hinreichend vertraut, wie das aus den (S. 6) gegen Kant vorgebrachten Gründen erhellt, noch weiss er die Gesetze der specifischen Wärme zu handhaben. Man liest z. B. S. 31: „Wenn ein Körper von einer Höhe gleich beiläufig 424 Meter zur Erde herabfällt, nimmt er um 1° C. an Wärme zu." Daher fallen denn auch alle Berechnungen, denen diese Annahme zu Grunde gelegt ist, in nichts zusammen. Die neueren Arbeiten über die Beschaffenheit des Erdinnern sind ganz unberücksichtigt geblieben. Im ganzen haben wir es also mit einer zwar phantasievollen und mit vielen dichterischen Citaten durchsetzten, im übrigen aber nur schwach begründeten Vorstellung von der Entstehung des Planetensystems zu thun.

Lp.

F. Blass. Naturalismus und Materialismus in Griechenland zu Platon's Zeit. Rede. Kiel. 19 S. 8°.

B. Pädagogik.

K. H. SCHELLBACH. Ueber die Zukunft der Mathematik an unsern Gymnasien. Berlin. G. Reimer. 34 S. 8°.

Die kleine Schrift hat den Zweck, der Mathematik und Physik zu der ihnen gebührenden Stellung an unsern Gymnasien zu verhelfen. In der Schilderung der traurigen Lage, in der sich die genannten Wissenschaften noch jetzt am Gymnasium befinden, sieht der Herr Verfasser unsrer Ansicht nach zu schwarz. Doch sind die Winke, wie man der Mathematik im Gymnasialunterricht einen grösseren Einfluss verschaffen könnte, wohl beherzigenswert. M.

H. SCHÜTZ. Die gegenwärtige Bedeutung des mathematisch-physikalischen Unterrichts an Gymnasien. Pr. Gymn. Frankfurt a. M. (No. 363) S. 3-20. 4°.

Eine kurze Aufzählung der hauptsächlichsten Aenderungen, die im mathematisch-physikalischen Unterrichte entsprechend der Circularverfügung vom 31. März 1882 in den preussischen Gymnasien statt gefunden haben, wird vorausgeschickt. Danach werden elf Hauptmomente der formalen und realen Bildung, welche diesem Unterrichte eigentümlich sind, an einander gereiht und weitere sechs Momente als Vorzüge des revidirten Lehrprogrammes hervorgehoben. Bemerkungen über die Lehrmethode machen den Beschluss des Aufsatzes. Angehängt sind: I^a. Auszüge aus Wiese's Sammlung der Verordnungen und Gesetze für die höheren Schulen in Preussen. I^b. Entwurf eines Lehrplanes für den mathematisch-physikalischen Unterricht an Gymnasien, entsprechend den zur Zeit (1887) für Preussen geltenden Bestimmungen. II. Auszug aus dem in Frankreich geltenden „Plan d'Études des Lycées". Programmes de l'Enseignement Secondaire Classiques. (22 janv. 1885). III. Uebersicht des mathematisch-physikalischen Lehrplanes an den östreichischen Gymnasien (26. Mai 1884). IV. Uebersicht über die Stunden-

zahl, welche an Gymnasien verschiedener Staaten auf Mathematik, Naturgeschichte und Physik verwandt wird (Preussen, Bayern, Württemberg, Sachsen, Oestreich, Frankreich). Lp.

W. Dahl. Lehrplan für den mathematischen Unterricht am Realgymnasium zu Braunschweig. Pr. Realgymn. Braunschweig (No. 640). S. 3-28. 4°.

Drei Gesichtspunkte werden als die wichtigsten angeführt: 1) Der Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts soll in die Schule, nicht in die häusliche Thätigkeit des Schülers gelegt werden. 2) Der Unterricht soll ein Klassenunterricht sein, nicht in das Unterrichten besonders bevorzugter Schüler ausarten. 3) Rücksicht auf diejenigen Schüler, welche die Anstalt bereits vor Vollendung des Cursus verlassen. Ueber die Verteilung des Unterrichtsstoffes auf die einzelnen Klassen (S. 5-16) und die Unterrichtsmethode (S. 16-28), für welche die heuristische als die einzige empfohlen wird, welche durchgreifende Anwendung finden kann, ist ein eingehender Bericht nicht am Platze. Lp.

W. Lichtenberg. Aus der Praxis des mathematischen Unterrichts. Pr. Realprogymn. Oldesloe (No. 278). S. 3-11. 4°.

1. Die Lücken im Wissen der Schüler. 2. Die ungenaue Ausdrucksweise. 3. Die häufig wiederkehrenden Flüchtigkeitsfehler. Lp.

Th. Fries. Ueber den Rechenunterricht in den unteren Klassen höherer Schulen. Pr. Realsch. Bockenheim (No. 373). S. 16-27. 4°.

Ueber den Rechenunterricht als Vorbereitung für den nachfolgenden mathematischen Unterricht. Lp.

G. SQUARZINA. Dell' insegnamento dell' aritmetica, del sistema metrico e della geometria nelle scuole elementari. Faenza.

J. C. V. HOFFMANN. Einige wichtige pädagogische Tagesfragen mit besonderer Berücksichtigung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. Hoffmann Z. XVIII. 237-264.

I. Die Notwendigkeit und Heilsamkeit einer Rectoratsprüfung.

II. Ist die Einheitsschule möglich?

III. Welche Prüfungen (der Schüler höherer Schulen) sind beizubehalten und welche sind zu beseitigen?

IV. Sind die Extemporalien beizubehalten oder abzuschaffen?

Lg.

O. SCHLÖMILCH. Betrachtungen über das Unendliche. Hoffmann Z. XVIII. 161-167.

Es werden einige noch in manchen neueren Werken vorkommende Unrichtigkeiten besprochen, so die Behauptung, dass eine endliche Constante s gegen eine unendlich wachsende Zahl ω vernachlässigt werden darf, dass $\frac{1}{\infty}$ gleich 0 ist, wofür auch Beispiele angeführt werden. Zuletzt werden alle Versuche zur Elimination des richtig aufgefassten Unendlichkleinen als wissenschaftliche und pädagogische Rückschritte zurückgewiesen.

Lg.

S. DICKSTEIN. Ueber Knilling's Reform des Rechenunterrichtes. Pädag. Rev. Warschau. (Polnisch.) Dn.

G. HAUCK. Ueber die Systematik in der Stereometrie mit Beziehung auf Heinze's „Genetische Stereometrie". Hoffmann Z. XVIII. 81-93.

L. LIEBETRUTH. Entgegnung hierauf. Hoffmann Z. XVIII. 424-430.

Bezugnehmend auf eine Besprechung der Heinze'schen Stereometrie durch Herrn Holzmüller, stellt Verfasser seine Bedenken über jene Arbeit zur Discussion. Seit Monge ist auch die Behandlung der elementaren Stereometrie eine andere geworden, Heinze's Behandlungsweise aber stammt noch aus vor-Monge'scher Zeit, die Systematik ist verfehlt, weil sie die Inhaltsbestimmung als massgebend annimmt, die Terminologie, weil wir mit den gewählten Bezeichnungen heute ganz andere Begriffe verbinden. Der Versuch, die Gesamtheit der stereometrischen Formen aus einem einzigen Centralkörper durch fortgesetzte Specialisirung zu entwickeln, ist im allgemeinen undenkbar und daher ein zweiter Missgriff. Verfasser kann einen Fortschritt für die Methodik der Stereometrie in Heinze's System nicht finden und erblickt für die Schule viel mehr Gefahren als Vorteile darin. Dagegen erkennt er das Buch als tüchtige akademische Arbeit an, in welcher der verständige und reife Lehrer viele hübsche und anregende Entwickelungen findet. Lg.

D. Besso. Sull' insegnamento della trigonometria nelle scuole secondarie. Besso Per. mat. II. 41-49.

Nachdem der Verfasser einige Betrachtungen über den Unterricht in der Trigonometrie angestellt hat, welche durch die im Jahre 1885 veröffentlichten officiellen Programme der italienischen Lyceen veranlasst sind, erklärt er sich mit der Ansicht von Houël einverstanden (Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie, F. d. M. VII. 1875. 322), dass die Tafel der trigonometrischen Functionen derjenigen ihrer Logarithmen vorzuziehen sei, und er ergänzt die Arbeit des genannten Geometers durch die Vorführung einer Methode Stevin's zur Auffindung von $\sin 1^\circ$ (vgl. Oeuvres mathématiques de Simon Stevin etc. Leyde. 1634).

La. (Lp.)

E. Röhr. Methodologisch - mathematische Aphorismen. Pr. Gymn. Oppeln.

Lösung von 41 Aufgaben, welche aus einer hier nicht nam-

haft gemachten Sammlung entnommen sind, um an denselben Vereinfachungen resp. Verbesserungen zu erzielen: 1) durch Aenderungen in Constructionen und Beweisen; 2) durch vielfache Einführung der Analysis statt der Construction; 3) durch zweckmässige Wahl der Buchstaben, übersichtlichere Form der Darstellung, passendere Lage der Figurenteile u. dergl. mehr.

Lg.

F. Poske. Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von Dr. E. Mach und Dr. B. Schwalbe, herausgegeben von Dr. F. Poske. Berlin. J. Springer.

Von dem ersten Bande dieser neuen Zeitschrift fallen die beiden ersten Hefte (October und December) in das Berichtsjahr. Ausser Originalarbeiten, über welche, falls sie mathematischen Inhalts sind, besondere Referate im Jahrbuche gegeben werden, liefert die Zeitschrift Berichte über Versammlungen und Vereine, Mitteilungen aus Werkstätten, Correspondenzen. Den Lehrern ist das von frischen Kräften getragene Unternehmen warm zu empfehlen.

Lp.

F. Poske. Zur Einführung. Ziel und Wege des physikalischen Unterrichts. Poske Z. I. 1-2.

Vorwort zu der neu gegründeten Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Lp.

E. Mach. Ueber den Unterricht in der Wärmelehre. Poske Z. I. 3-7.

Methode zur Entwickelung der Grundbegriffe. Lp.

J. W. Glaisher. The mathematical Tripos. Lond. M. S. Proc. XVIII. 4-38.

Diese Rede liefert einen interessanten Beitrag zur mathematischen Prüfung an englischen Universitäten. Der Name Tripos stammt von dem dreibeinigen Stuhl, auf dem der Baccalaureus sass. W. W. Rouse Ball behandelte historisch im Jahre 1880 die Tripos in dem Werke: „The Origin and History of the Mathematical Tripos“, Cambridge, abgedruckt in der Cambridge Review. Die vorliegende Rede atmet durchweg eine glühende Begeisterung des Verfassers für seine Wissenschaft, besonders aber für die Disciplin, die er seit Jahren zum Gegenstande seiner Vorlesungen gemacht hat, die Theorie der elliptischen Functionen. M.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische Gleichungen.)

N. VANDERMONDE. Abhandlungen aus der reinen Mathematik. In deutscher Sprache herausgegen von Carl Itzigsohn. Berlin. Springer. 104 S

Der Name des Verfassers ist bekannter als seine Werke; daher ist die Herausgabe seiner Abhandlungen von Wert, um zu erkennen, dass sein Ruhm ein verdienter ist, dass seine algebraischen Arbeiten den bedeutendsten Leistungen auf diesem Gebiete zugerechnet werden müssen. Die Sammlung umfasst: die Abhandlung über die Auflösung von Gleichungen; die Abhandlung über die irrationalen Grössen verschiedener Ordnung nebst einer Anwendung auf den Kreis; den Bericht über diese Abhandlung; die Abhandlung über die Elimination. No.

TICHOMANDRITZKY. Lehrbuch der höheren Algebra. Charkow (Russisch.)

Das Lehrbuch von Hrn. Tichomandritzky, bestimmt für die Studirenden in den Universitäten und den höheren technischen

Lehranstalten, behandelt nur die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, sowie die Theorie ihrer numerischen Auflösung, ohne in die Theorie der algebraischen Auflösung einzugehen. Für die nähere Bekanntschaft mit dem Inhalte des für die russische mathematische Literatur sehr nützlichen Werkes führen wir das Inhaltsverzeichnis an. Einleitung. I. Die Eigenschaften der complexen Grössen. II. Die binomischen Gleichungen. III. Auflösung der Gleichungen 3ten und 4ten Grades. IV. Eigenschaften der Polynome. V. Bestimmung der rationalen Wurzeln einer gegebenen Gleichung. VI. Bestimmung der mehrfachen Wurzeln. VII. Reelle Wurzeln und ihre Grenzen. VIII. Absonderung der Wurzeln. Methode von Sturm. IX. Absonderung der Wurzeln. Methode von Fourier. X. Berechnung der Wurzeln. XI. Symmetrische Functionen der Wurzeln einer Gleichung. XII. Theorie der Determinanten. XIII. Systeme der simultanen Gleichungen. Wi.

Ch. de Comberousse. Cours de mathématiques, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique etc. Tome III. Algèbre supérieure. Ire partie. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars.

Dieser dritte Band des sechsbändigen Werkes enthält Ergänzungen zur elementaren Algebra (Determinanten, Kettenbrüche, u. dgl. m.), die Combinatorik, die Theorie der Reihen, die Einleitung in die Functionenlehre, die Begriffe der Ableitung und der Differentiale, die Taylor'sche und die Maclaurin'sche Reihe nebst ihren wichtigsten analytischen Anwendungen, die Anfänge der Integralrechnung. Lp.

H. Laurent. Traité d'algèbre, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. 4e éd. I. Algèbre élémentaire. II. Analyse algébrique. III. Théorie des équations. Paris. Gauthier-Villars.

Der Inhalt entspricht etwa den Ansprüchen auf den deutschen Realgymnasien, giebt jedoch auch einige weiter gehende Betrach-

tungen, wie z. B. die Elemente der Differentialrechnung, den Sturm'schen Satz in der Theorie der Gleichungen, u. a. m.

Lp.

H. S. HALL and S. R. KNIGHT. Elementary Algebra for schools. Fourth edition. London. Macmillan & Co. X + 405 S.

H. S. HALL and S. R. KNIGHT. Higher Algebra; a sequel to Elementary Algebra. London. Macmillan & Co. XXII + 516 S.

CH. SMITH. Elementary Algebra. London. Macmillan & Co. (1886). VIII + 352 S.

CH. SMITH. A treatise on Algebra. London. Macmillan & Co. (1888). XVIII + 571 S.

W. STEADMAN ALDIS. A textbook of Algebra. Oxford. Clarendon Press. XIII + 588 S.

W. THOMSON. Algebra for the use of schools and colleges. London. Sampson, Low, Marston, Searle, and Rivington. VII + 291 S.

Viele Jahre hindurch hat als englisches Musterlehrbuch für die Algebra das des verewigten Todhunter gegolten; jüngst aber sind teils wegen der Verbreitung richtigerer Ansichten über die Principien algebraischer Schlussweisen, teils unter dem Drucke der öffentlichen Prüfungen nicht gering zu achtende Nebenbuhler aus der Presse hervorgegangen. Wir befürchten jedoch, dass keins der oben genannten Werke einem Meister der neueren algebraischen Wissenschaft genügen dürfte. Es sind Sachen aufgenommen, welche in eine logische Entwickelung der grundlegenden Principien nicht hineinzupassen scheinen, andere sind ausgeschlossen worden, die passender Weise eine Stelle finden können. Zweifelsohne haben Gründe, die aus praktischen Bedürfnissen zu rechtfertigen sind, in manchen Fällen das Ziel der Lehrbücher bestimmt, und während keins von ihnen als das ideale Lehrbuch des wissenschaftlichen Algebraikers betrachtet werden kann, besitzen alle auch wieder grosse Vorzüge. In allen Capiteln werden gut ausgewählte Beispiele vollständig

durchgearbeitet, um die Principien zu erläutern, welche vorher, oft mit grossem Geschick und mit Klarheit, entwickelt sind, und Uebungsbeispiele zur Bearbeitung für die Studirenden sind in grosser Vollständigkeit beigegeben. Wir hegen ernste Zweifel, ob nicht dem Streben nach einer Ebenung des Pfades für den Lernenden allgemein in den neueren Lehrbüchern ein zu grosser Platz eingeräumt ist. Jedenfalls ist in den vorliegenden alles geschehen, um Schwierigkeiten zu beseitigen, welche Studirende finden könnten; und noch mehr Hülfe leisten, als hier gewährt ist, hiesse eher sie schädigen als fördern. Wir haben mit Freude bemerkt, dass die Determinantentheorie in die Lehrbücher für Fortgeschrittene aufgenommen ist, und dass die Notwendigkeit, Literaturnachweise zu geben, in den (allzu wenigen) Anführungen ausführlicherer Werke und Abhandlungen anerkannt ist. Ein weiteres Eingehen auf diese Lehrbücher würde schwerlich am Platze sein; alle sind aus den Händen erfahrener Lehrer hervorgegangen und mit grosser Sorgfalt geschrieben worden.

Gbs. (Lp.)

J. Cook. Class-book of algebra for middle and high schools. Part II, for high schools. **Madras. Lawrence Asylum Press, Mount Road.**

Anzeige in Nature XXXVII. 102. Lp.

A. Cayley. On multiple algebra. **Quart. J. XXII. 270-308.**

Die Arbeit enthält in ihrem Hauptteile einen Ueberblick über die grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiete der geometrischen Analyse, mit Hervorhebung der besonders charakteristischen Resultate. Es werden der Reihe nach vorgeführt: Arbeiten über die Bedeutung der imaginären Einheit, Gauss' Darstellung der complexen Zahlen, Möbius' Barycentrischer Calcul, Bellavitis' Aequipollenzen, Hamilton's Quaternionen, Grassmann's Ausdehnungslehre. Als Einleitung ist eine 1883 vom Verfasser an die British Association gerichtete allgemeine Mitteilung über höhere Einheiten wiederholt, worauf die verschiedenen Möglichkeiten

erörtert werden, wie aus gegebenen Symbolen von der Form (x, y, ...) Summen und Producte gebildet werden können.

Schg.

R. LIPSCHITZ. Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. Darb. Bull. (2) IX. 115-120.

Unveränderter Abdruck des in den Comptes rendus XCI. October 1880 veröffentlichten Aufsatzes, über welchen in diesem Jahrbuch XII (1880) berichtet wurde. Schg.

L. KRONECKER. Ueber den Zahlbegriff. Festschrift zum 50-jährigen Doctorjubiläum von E. Zeller. 263-274.

L. KRONECKER. Ueber den Zahlbegriff. J. für Math. CI. 337-355.

Der zweite Aufsatz ist durch teilweise Umarbeitung und Erweiterung des ersten entstanden, und unterscheidet sich von demselben besonders durch die letzten, der Theorie der Gleichungen gewidmeten Betrachtungen.

Herr Kronecker geht von einer Reihe verschiedener und für uns unterscheidbarer Objecte aus, denen man gewisse, nach fester Reihenfolge geordnete Bezeichnungen, die „Ordnungszahlen" beilegen kann. Die Gesamtheit der bei einer gegebenen Schar verwendeten Bezeichnungen fasst man in den Begriff der „Anzahl der Objecte" zusammen und knüpft denselben unzweideutig an die letzte der verwendeten Bezeichnungen. Dies führt auf den Begriff der „Cardinalzahl" oder der „Zahl" schlechthin. Einer Schar von Objecten kann man die Reihe der Ordnungszahlen auf verschiedene Weise beilegen, indem man neue Reihenfolgen der Bezeichnungen festsetzt; aber die Gesamtheit der Bezeichnungen und also die „Anzahl" der Objecte bleibt ungeändert; sie tritt als einzige „Invariante" hierbei auf. Hieraus folgen dann einfache Beweise für die Vertauschbarkeit der Summanden einer Summe und der Factoren eines Products, da sich die auf

verschiedenen Wegen erlangten Resultate als verschiedene Ausdrücke für die Anzahl derselben Objecte nur in verschiedenen Anordnungen ausweisen. Es wird dann gezeigt, wie die principielle Einführung der „Unbestimmten" zur Behandlung der Algebra ausreicht, ohne dass die Einführung der negativen, der gebrochenen, der reellen oder imaginären algebraischen Zahlen notwendig wäre. Mit Hülfe gewisser Moduln oder Modulsysteme ist man im Stande jene Grössen auszuscheiden. In der Abhandlung „ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik" ist gezeigt worden, wie die Einführung und Verwendung der algebraischen Zahlen überall da entbehrlich ist, wo nicht die Isolirung der unter einander conjugirten erforderlich wird; hier wird diese Isolirung selbst ohne Einführung neuer Begriffe durchgeführt. Es werden nämlich Intervalle von beliebiger Kleinheit bestimmt, innerhalb deren die Function ihrem absoluten Werte nach eine beliebig kleine Grösse nicht übersteigt, und für welche sie am Anfangs- und am Endpunkt verschiedene Vorzeichen besitzt. No.

T. N. Thiele. Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tellignende Bestemmelser. Kjob. Skrift. (6) II. 453-514. (1886.)

Der Verfasser dieser in mehrfacher Hinsicht bemerkenswerten Arbeit, von welcher ein gedrängtes Referat keine rechte Vorstellung geben kann, beabsichtigt die Definition der Zahl und die mit derselben verwandten Begriffe einer Analyse zu unterwerfen. Die Basis des Zahlenbegriffes findet er in den sogenannten „Numeralien", welche er als „unbedingte einzelne relative und vollständig eindeutige Bestimmungen" definirt. Als Beispiele werden concrete Orts- oder Zeitbestimmungen angeführt. Die Numeralien können zwei Operationen unterworfen werden, welche als „Wiedersetzung" und „Zufügung" bezeichnet werden, sind aber noch nicht eigentliche Zahlen. Solche entstehen, wenn man durch Vergleichung von Numeralsbestimmungen auf „Numeralsnumeralien" stösst. Auf dieser Grundlage folgt sodann eine genauere Klassification der Zahlenarten, wobei auf in sich ge-

schlossene Systeme besondere Rücksicht genommen wird. Als „notwendige Zahlen“ treten dann solche hervor, die zur Vervollständigung des Systemes unentbehrlich sind, als „mögliche“ Zahlen solche, deren Existenz nur hypothetisch festgestellt werden kann.

Als solche treten z. B. die zweidimensionalen Zahlen auf, für welche der Verfasser als notwendige Rechnungsart ausser den gewöhnlichen vier Species noch die „Umlegung“ behauptet, d. h. die Operation, durch die man von $q = z + yk$ zu $\dot{q} = z - yk$ übergeht. Schliesslich kommt er zur Untersuchung der verschiedenen Arten von mehrdimensionalen Zahlen und deren Rechnungsarten. Beigefügt sind zwei Beilagen, von denen die erste eine mathematische Behandlung der Fundamentalgleichungen der allgemeinsten Addition von zweidimensionalen Zahlen enthält, die andere über die Multiplication der n-dimensionalen Zahlen handelt. Gm.

L. Kronecker. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. J. für Math. C. 490-510.

Die arithmetische Behandlung der algebraischen Grössen führt mit Notwendigkeit dazu, den Gauss'schen Congruenzbegriff so zu erweitern, dass „Systeme von Moduln“ an Stelle des einfachen Congruenzmoduls zugelassen werden. Dadurch ergiebt sich zugleich der wichtige Fortschritt, dass die Untersuchung der algebraischen Grössen auf die der rationalen Functionen von Variabeln reducirt wird. Diese weittragenden Ideen sind von Herrn Kronecker zuerst in seiner „Festschrift“ und dann in einer Reihe von Abhandlungen dargelegt und begründet worden, von denen nur die aus dem Bande IC des Journals „Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen“ hervorgehoben werden möge. Ein Ziel der Untersuchungen war darin zu finden, durch die Modulsysteme die Auffassung der algebraischen als „irrationaler“ Grössen überhaupt entbehrlich zu machen und dieselben in principieller Weise durch rationale zu ersetzen. Dieses Ziel wird durch die vorliegende

Abhandlung erreicht, in welcher für jede vorgelegte ganze Function ein Primmodulsystem bestimmt wird, für welches die Function sich als Product von Linearfactoren darstellen lässt.

Bedeuten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ganze Grössen des natürlichen Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(n-1)})$ und setzt man

$$F(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n;$$

definirt man andererseits $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ durch

$$\mathfrak{F}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n,$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unbestimmte Variable bedeuten, so hat man sofort

$$F(x) \equiv (x-x_1)\ldots(x-x_n) \equiv \mathfrak{F}(x) \quad (\text{modd. } \mathfrak{f}_1 - c_1, \mathfrak{f}_2 - c_2, \ldots, \mathfrak{f}_n - c_n);$$

aber dieses Modulsystem ist kein Primmodulsystem n^{ter} Stufe, und auf die Bestimmung eines solchen kommt es gerade an. Dieselbe wird auf zwei verschiedene Arten geliefert; als erstes Resultat folgt, dass, wenn man

$$G(z, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n) = \Pi(z - u_1 x_{i_1} - u_2 x_{i_2} - \cdots - u_n x_{i_n})$$

setzt, jeder irreductible Factor der Galois'schen Function $G(z, c_1, \ldots, c_n)$ einen Primmodul der verlangten Eigenschaft liefert; als zweites Resultat ergiebt sich, dass das Primmodulsystem

$$(\mathfrak{f}_1 - c_1, \ldots, \mathfrak{f}_n - c_n;\quad \mathfrak{g}' - c', \mathfrak{g}'' - c'', \ldots)$$

dasselbe leistet, falls $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \ldots$ ein Fundamentalsystem der Affect-Gattung bilden und diese Functionen die rationalen Werte $c', c'', \ldots$ annehmen. Durch Verwendung solcher Modulsysteme wird die Einführung der algebraischen Grössen überall da entbehrlich gemacht, wo nicht die Isolirung der verschiedenen Wurzeln einer irreductibeln Gleichung erfordert wird, so dass in der arithmetischen Theorie der zerlegbaren Formen auf Grund dieses Fundamentalsatzes nirgends der absolute Rationalitätsbereich der natürlichen Zahlen verlassen zu werden braucht. No.

A. Kneser. Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. J. für Math. CII. 20-55.

Die vorliegende Arbeit gehört zu denjenigen, welche das

weittragende Kronecker'sche Princip zur Durchführung zu bringen suchen, die rein arithmetisch formulirten Sätze der Algebra auf rein arithmetischem Wege abzuleiten, d. h. auf die Benutzung aller unendlichen Processe zu verzichten und insbesondere die Einführung irrationaler Grössen zu vermeiden. Zunächst wird eine elementare Ableitung der Hauptsätze über die Galois'sche Resolvente gegeben, womit eine arithmetische Begründung der Galois'schen Theorie der Affecte und Gruppen gewonnen wird. Daran schliesst sich eine elementare Theorie der Gattungsbereiche, der enthaltenen und enthaltenden Gattungen, derjenigen Gattung niedrigster Ordnung, welche zwei gegebene Gattungen umfasst, u. s. f. No.

A. Kneser. Zur Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. XXIX. 171-186.

Es handelt sich um die Frage, ob eine gegebene algebraische Function von mehreren Variabeln als rationale Function mehrerer algebraischer Functionen von je einer Variabeln dargestellt werden kann oder nicht. Es zeigt sich: Eine algebraische Function der Variabeln $u, v_1, \ldots, v_k$ ist dann und nur dann rational ausdrückbar durch eine algebraische Function von u allein und eine algebraische Function der v allein, wenn bei der Betrachtung von x als algebraischer Function von u allein und dementsprechende Adjunction aller algebraischen Functionen der Grössen v die Discriminante der gegebenen, die Function x definirenden Gleichung einen von den Grössen v unabhängigen wesentlichen Teiler besitzt. No.

A. Kneser. Ueber die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Grössen enthalten sind. Math. Ann. XXX. 179-202.

Zuerst auf algebraischem, dann auf rein arithmetischem Wege werden einige Sätze über die Irreductibilität der Normen ganzer Functionen $f(y, \xi)$ abgeleitet, in denen ξ die Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung $F(x) = 0$ durchläuft;

danach wird die Zerlegung ganzer Functionen in ihre irreductiblen Factoren nach Adjunction irrationaler Grössen gleichfalls vom arithmetischen Standpunkte aus behandelt, d. h. in der Form, dass die Zerlegung einer ganzen Function $G(y, x)$ (mod. $F(x)$) in ihre irreductiblen Factoren betrachtet wird. Darauf geht Herr Kneser zur Hauptfrage seiner Arbeit über und beweist: „Ist in einem beliebigen Rationalitätsbereiche $\mathfrak{R}$ die Grösse ξ_1 Wurzel einer irreductiblen Gleichung m^{ten} Grades, und nach Adjunction von ξ_1 die Grösse η_1 Wurzel einer irreductiblen Gleichung r^{ten} Grades, so ist das mit der Unbestimmten u gebildete Binom $u\xi_1 + \eta_1$ Wurzel einer im Bereich $\mathfrak{R}$ irreductiblen Gleichung vom Grade $m.r$". Mit Hülfe der so erlangten Resultate lässt sich dann der allgemeine Fall beliebig vieler Gattungen erledigen. „Sind irgend h Gattungen algebraischer Grössen, welche einem beliebigen Rationalitätsbereiche $\mathfrak{R}$ entstammen, gegeben, und reducirt sich die Ordnung der ν^{ten} unter ihnen nach Adjunction der $(\nu-1)$ vorhergehenden auf r_ν, so sind die sämtlichen h Gattungen unter einer Gattung von der Ordnung $r_1 \dots r_h$ und unter keiner von geringerer Ordnung enthalten." No.

K. Hensel. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor. J. für Math. CI. 99-141.

Ein Hauptzweck der Arbeit ist der, die von Herrn Kronecker in seiner Festschrift aufgestellten Begriffe des Gattungsbereiches, der Gattung und des Fundamentalsystems in der Weise zu fassen, dass sie ihre Bedeutung und ihre wesentlichen Merkmale auch dann noch beibehalten, wenn man die ganzen algebraischen Zahlen nur in Beziehung auf einen beliebigen algebraischen Primdivisor betrachtet. Wenn P_1 ein solcher Primdivisor von p für den Gattungsbereich $(\mathfrak{G})$ ist, dann lässt sich eine Zahl k so bestimmen, dass für jede ganze algebraische Zahl w von $(\mathfrak{G})$ stets $w^{p^k} \equiv w$ (mod. P_1) wird. Aus jedem Fundamentalsystem von $(\mathfrak{G})$ lassen sich dann k Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ auswählen, die

für ($\mathfrak{S}$) (mod. P_1) ein Fundamentalsystem bilden. Die p^k incongruenten Zahlen mod. P_1 kann man in Gattungsbereiche (Γ_h) und Gattungen Γ_h einteilen, indem man alle die zusammenfasst, für welche schon $w^{p^{k_h}} \equiv w$ (mod. P_1) bei $k_h < k$ ist, resp. für welche k_1 den kleinsten Exponenten angiebt, der jene Congruenz befriedigt. Auch für Γ_h lässt sich ein Fundamentalsystem herstellen, die Anzahl der zu Γ_h gehörigen Zahlen bestimmen, und die Congruenz angeben, welcher gerade diese Zahlen genügen. Die Zahlen von Γ_h zerfallen in weitere Klassen, je nach dem niedrigsten Exponenten $\sigma_h^{(\gamma)}$, für welchen $w^{\sigma_h^{(\gamma)}}+1 \equiv w_1$ (mod. P_1) wird, und die Anzahl dieser Klassen wird bestimmt. Endlich teilen sich die Zahlen einer Klasse in Gruppen von je k_h Gliedern, welche den von einander verschiedenen p^{ten} Potenzen einer beliebigen unter ihnen congruent sind; die Elemente einer solchen Gruppe sind die Wurzeln einer im Bereiche ($\mathfrak{S}$) irreductiblen Congruenz mod. P_1 mit reellen Coefficienten. Für (Γ_h) und den Modul P_1 bilden diese Zahlen ein Fundamentalsystem. Zum Schluss wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet, welche das Verhältnis verschiedener Gattungen und ihrer Ordnungszahlen zu einander behandeln und den entsprechenden Resultaten der Algebra völlig analog sind. No.

A. E. Pellet. Mémoire sur la théorie algébrique des équations. S. M. F. Bull. XV. 61-103.

Im ersten Teile der Abhandlung wird eine allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen hinsichtlich ihrer Resolventen und deren Zerfällung durch Adjunction der Wurzeln anderer Gleichungen gegeben. Es sind dabei die Sätze über Substitutionen grundsätzlich vermieden; alles in dieser Beziehung Notwendige wird durch die Betrachtung der zugehörigen Functionen geliefert; und so werden die Galois'schen und Jordan'schen Theoreme begründet. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Kreisteilungsgleichung und liefert eine Darstellung der einfachsten Periodengleichungen; darauf folgt eine Behandlung der

durch eine lineare Transformation auf binomische zurückführbaren Gleichungen. No.

C. Juel. Om Argand's Bevis for Algebraens Fundamentalsatning. Zeuthen T. (5) V. 161-169.

Wiedergabe und Vervollständigung des Beweises von Argand (Cauchy), dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. Die Vervollständigung ist wesentlich dieselbe, welche sich in Lipschitz „Lehrbuch der höheren Analysis" I. p. 248-282 findet, doch bedeutend kürzer als daselbst. V.

C. A. Laisant. Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations. S. M. F. Bull. XV. 42-44.

Der Beweis ist im wesentlichen einer der von J. C. Ullherr (Crelle J. XXI, 231-234) gegebenen. No.

J. Collin. Sur le théorème de Rolle. Nouv. Ann. (3) VI. 266-268.

Schreibt man $f(x)=0$ homogen in der Form $f(x,y)=0$, so folgt: Damit $f(x,y)=0$ nur reelle Wurzeln habe, ist es notwendig und hinreichend: 1) dass alle Wurzeln von $f'_x=0$, $f'_y=0$ reell seien; 2) dass für $x=\pm\infty$ die Werte $f(xy)$, f'_y verschiedene Vorzeichen haben; 3) dass zwischen zwei Wurzeln von $f'_x=0$ je eine und nur eine von $f'_y=0$ liege. No.

Ch. Biehler. Sur une application du théorème de Rolle. Nouv. Ann. (3) VI. 190-204.

I. Ist $\Phi(x)=\Pi(x^2+a_\lambda^2)$, so haben die Ableitungen von Φ die Form $x^\nu\Pi(x^2+b_\lambda^2)$.

II. Ist $\Phi(x)=\Pi(x^2+a_\lambda^2)(x+c_\mu)$, so haben die Ableitungen von Φ die Form $\Pi(x^2+b_\lambda^2).(x+d_\mu)$, wobei die d_μ zwischen dem grössten und dem kleinsten Werte der c_μ liegen.

III. Ist $\Phi(x) = \Pi(x^{2m} + a_\lambda^{2m})$, so sind die Wurzeln der gleich Null gesetzten Ableitungen von Φ alle rein imaginär oder Null.

IV. Ist $\Phi(x) = \Pi(x^{2m} + a_\lambda^{2m})(x^{2m} - c_\mu^{2m})$, so liegen die reellen Wurzeln der gleich Null gesetzten Ableitungen von Φ zwischen der grössten und der kleinsten reellen Wurzel von $\Phi(x) = 0$.

No.

Ch. Biehler. Sur le théorème de Rolle. Nouv. Ann. (3) VI. 75-79.

Es wird ein Satz abgeleitet, durch welchen mit Hülfe der Wurzeln von $f'(x) = 0$ erkannt werden kann, ob $f(x) = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt, auch wenn $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln haben sollte. No.

Ch. Biehler. Sur l'élimination par la méthode d'Euler. Nouv. Ann. (3) VI. 67-75.

Es werden einige auf die Gleichung

$$F(x) . U + G(x) . V = 0$$

bezügliche, übrigens bekannte Resultate abgeleitet. (Vgl. z. B. Faà di Bruno, übersetzt von Walter S. 62.) No.

F. Brioschi. Sulla trasformazione delle equazioni algebriche. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 364-370.

Es sei in $f(x) = 0$ mit den Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ zunächst $\Sigma x_\lambda = 0$; ferner $\Sigma x_\lambda^r = s_r$; dann setzen wir

$$\varphi_\varkappa(x) = x^\varkappa + \varrho_\varkappa x - \frac{1}{n} s_\varrho, \qquad (\varkappa = 2, 3, \dots, n-1)$$

und es wird

$$\sum_\lambda \varphi_\varkappa(x_\lambda) = 0. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n;\ \varkappa = 2, \dots, n-1).$$

Ueber die ϱ kann man so verfügen, dass auch

$$\sum_\lambda \varphi_2(x_\lambda)\, \varphi_\varkappa(x_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, \dots, n;\ \varkappa = 2, \dots, n-1)$$

wird; dazu ist für ϱ_2 eine quadratische, sonst sind nur lineare

Gleichungen zu lösen. Bildet man weiter lineare Functionen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ der $\varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$ mit unbestimmten Coefficienten, wobei $m = (n-3):2$ gesetzt ist, so kann man über die letzteren derart verfügen, dass

$$\sum_\lambda \psi_\varkappa(x_\lambda) = 0, \qquad \sum_\lambda \varphi_2(x_\lambda)\psi_\varkappa(x_\lambda) = 0, \qquad \sum_\lambda \psi_\varkappa^2(x_\lambda) = 0,$$
$$\sum_\lambda \psi_\varkappa(x_\lambda)\,\psi_\mu(x_\lambda) = 0$$

wird. Dabei bleiben in den ψ noch $(n-1)(n-3):8$ willkürliche Grössen zurück. Zwischen der Discriminante von $f(x)$ und der aus den Elementen $\Sigma\varphi_\varkappa(x_\lambda)\,\varphi_\mu(x_\lambda)$ gebildeten Determinante besteht eine für diese Transformationsart charakteristische Beziehung.

No.

F. Brioschi. Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten. Math. Ann. XXIX. 327-330.

Es sei $f(x, y) = (a_0 a_1 \dots a_n)(xy)^n$ eine Form, $\varphi(x, y) = (c_0 c_1 \dots c_n)(xy)^n$ eine Covariante von f der Ordnung n; $f(x, 1) = 0$ habe die ungleichen Wurzeln $x_0, \dots, x_n$. Setzt man nun

$$\alpha_1 = a_0 x_\nu + a_1, \quad \alpha_2 = a_0 x_\nu^2 + 2a_1 x_\nu + a_2,$$
$$\alpha_3 = a_0 x_\nu^3 + 3a_1 x_\nu^2 + 3a_2 x_\nu + a_3, \dots,$$

so lässt sich der Wert von $\varphi(x, 1)$ aus dem letzten Coefficienten c_n von φ dadurch ableiten, dass man in ihm die Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 0$ ersetzt. No.

J. P. Gram. Om Transformationen af den bineere Ligning. Zeuthen T. (5) V. 44-50.

Es wird untersucht, wann die Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} a_{n-1} x + a_n = 0$$

mit der Gleichung

$$(2) \qquad A(x+\zeta_1)^n + B(x+\zeta_2)^n = 0$$

identisch sein kann.

Wenn a_i, a_{i+1}, a_{i+2} drei willkürliche auf einander folgende Coefficienten der Gleichung (1) sind, muss man haben

$$(3) \qquad Pa_i + Qa_{i+1} + Ra_{i+2} = 0,$$

ferner müssen die Grössen ζ_1, ζ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(4) \qquad P + Q\zeta + R\zeta^2 = 0$$

sein.

Eliminirt man mittels der Gleichungen (3) P, Q, R, so bekommt man die Gleichungen

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_{n-2} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{i+1} & \dots & a_{n-1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{i+2} & \dots & a_n \end{matrix} \right\| = 0.$$

Die Bedingungen (3) sind notwendig, aber nicht zulänglich, damit (1) mit einer Gleichung (2) identisch sein kann. Zulänglich sind sie nur, wenn die Gleichung (4) verschiedene Wurzeln hat, oder aber (was damit identisch ist), wenn die Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \zeta \\ a_2 & a_3 & \zeta^2 \end{vmatrix} = 0$$

verschiedene Wurzeln hat.

In diesem Fall sind ζ_1, ζ_2 die Wurzeln der Gleichung (5). Darnach findet man

$$A = \frac{a_0\zeta_2 - a_1}{\zeta_2 - \zeta_1}, \quad B = \frac{a_0\zeta_1 - a_1}{\zeta_1 - \zeta_2}.$$

Hat dagegen die Gleichung (5) gleiche Wurzeln, während die Gleichungen (4) stattfinden, so ist die Gleichung (1) von der Form

$$C(x+\zeta)^{n-1}(x+k),$$

wenn nicht alle Coefficienten der Gleichung (5) Null sind. Ist dieses der Fall, so hat die Gleichung (1) die Form $A(x+\zeta)^n$.

Endlich giebt der Verfasser einige Beispiele von Gleichungen, die mittels quadratischer Transformationen auf die Form (2) gebracht werden können. V.

J. JUNKER. Die Verallgemeinerung der Hermite'schen Transformation im Zusammenhang mit der invarianten theoretischen Reduction der Gleichungen. Diss. Freiburg i. B. 32 S. 4°.

V. DANTSCHER v. KOLLESBERG. Zur analytischen Darstellung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Innsbruck Ber. 6-18.

Es wird der Weierstrass'sche Gedanke für den Wurzelexistenzbeweis benutzt, der darin besteht, von einer beliebigen Gleichung mit rationalen Wurzeln aus durch Vermittelung von Zwischengleichungen der vorgelegten beliebig nahe zu kommen. Bei diesem Uebergange darf dann nie die Discriminante einer Zwischengleichung verschwinden. Geht man mit Hülfe der Fortsetzbarkeit von Potenzreihen einem so gewonnenen Wege nach, so erhält man eine analytische Darstellung für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung. No.

N. MADSEN. Om Rakkendviklinger af en algebraisk Lignings Rődder. Zeuthen T. (5) V. 129-136.

Es wird gezeigt, dass, wenn

$$\varphi(y)+x=0$$

eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades in y ist, man y in eine convergente Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickeln kann, wenn x der Bedingung unterworfen ist, dass

$$|x| < \left|\frac{\varphi'(a)^2}{(n+1)\,\varphi^{(q)}(a)}\right|,$$

indem $y=a$ für $x=0$, und $\varphi^{(q)}(a)$ unter allen derivirten Functionen von $\varphi(a)$ den grössten numerischen Wert hat.

Infolge dessen kann man immer eine Wurzel einer algebraischen Gleichung in eine convergente Reihe entwickeln.

Es werden hierauf Beispiele gegeben, und es wird gezeigt, wie man am bequemsten die Reihenentwickelung machen kann. V.

E. Netto. Zur Theorie der iterirten Functionen.
Math. Ann. XXIX. 148-153.

Versteht man unter $\theta(x)$ eine ganze rationale Function, und setzt man $\theta(\theta(x)) = \theta_2(x)$, $\theta(\theta_2(x)) = \theta_3(x)$, ..., so werden folgende Sätze abgeleitet: 1) So lange die Coefficienten von $\theta(x)$ unbestimmt bleiben, ordnen sich die Wurzeln von $T_n(x) \equiv \frac{\theta_n(x)-x}{\theta(x)-x}$ zu je n einander zu, derart, dass zwischen denjenigen eines Systems die Beziehungsreihe

$$x_1 = \theta(x_0),\quad x_2 = \theta(x_1),\quad x_3 = \theta(x_2),\quad \ldots,\quad x_{n-1} = \theta(x_{n-2})$$

herrscht. Haben dagegen für eine specielle Function $\theta(x)$ die beiden Gleichungen $\theta(x)-x=0$, $T_n(x)=0$ eine Wurzel gemeinsam, so ist dies eine n-fache Wurzel der letzteren Gleichung und folglich eine $(n+1)$-fache der Gleichung $\theta_n(x)-x=0$, falls sie eine einfache der Gleichung $\theta(x)-x=0$ ist. 2) Bezeichnet man mit $\psi_n(s)=0$ die Gleichung, deren Wurzeln die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln sind, und ist

$$\theta(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots,$$

so gilt die Congruenz

$$\theta_n(x) \equiv a^n x + d_n x^{n+1} + e_n x^{n+2} + \cdots \qquad (\text{mod. } \psi_n(a)).$$

3) Ist ξ eine Wurzel von $\theta(x)-x=0$, für welche $\theta'(\xi)$ eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist, dann wird ξ eine $(n+1)$-fache Wurzel von $\theta_n(x)-x=0$ werden. Die beiden letzten Sätze bleiben auch gültig, wenn man unter $\theta(x)$ eine beliebige für $x=0$ verschwindende und in eine convergente Reihe entwickelbare Function versteht. T.

G. Paxton Young. Forms, necessary and sufficient, of the roots of pure uni-serial Abelian equations.
American J. IX. 225-277.

Die Abhandlung knüpft an die von Abel gegebene Form für die Wurzeln der „einfaltigen“ Abel'schen Gleichungen

$$x_1 = R_0^{\frac{1}{n}} + R_1^{\frac{1}{n}} + R_2^{\frac{1}{n}} + \cdots + R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

an, in welcher R_λ aus R_1 in bekannter Weise abgeleitet ist.

Barbarin. Sur les racines de l'équation du 3ième ordre. Franç. Ass. (Toulouse). 126-127.

H. Timmermann. Die Auflösung der Gleichungen dritten Grades mittelst des Hülfswinkels. Pr. Gymn. Osnabrück (No. 298). S. 3-16. 4°.

Der Verfasser „widmet die kleine Abhandlung den Schülern mit dem Wunsche, dass sie ihnen einige angenehme Stunden in belehrender Lectüre verschaffen möge". Auf der ersten Textseite lautet der Titel: „Ueber den Gebrauch des Hülfswinkels bei der Auflösung der Gleichungen dritten Grades". Lp.

A. X. Schbikoffsky. Ueber die kubischen Gleichungen, deren Wurzeln die Seiten eines Dreiecks sind. Kas. Ges. V. 182-185. (Russisch.)

Die Gleichung, deren Wurzeln die Seiten eines Dreiecks sind, ist $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4Rrp=0$; p ist die Hälfte des Umfangs, r der Radius des eingeschriebenen Kreises und R der Radius des umgeschriebenen Kreises.

Wi.

P. Gordan. Ueber biquadratische Gleichungen. Math. Ann. XXIX. 318.

Es wird auf einfachem Wege der Nachweis für die beiden Sätze geliefert: 1) Diejenigen Resolventen von biquadratischen Gleichungen, in denen nur ein Parameter vorkommt, haben den Grad 3. 2) Eine Gleichung von höherem als dem vierten Grade besitzt keine Resolvente mit nur einem Parameter. Vorausgesetzt wird bei dem Beweise nur der Lüroth'sche Satz, dass zu je zwei rationalen Functionen $f_0(x)$, $f_1(x)$ eine rationale Function $\chi(f_0, f_1)$ gefunden werden kann, von der f_0 und f_1 rational abhängen,

$$f_0=p_0(\chi),\quad f_1=p_1(\chi).$$

No.

J. Schumacher. Zur Theorie der biquadratischen Gleichungen. Pr. Schweinfurt. 57 S.

Zwei auf Functionen von 4 Variabeln bezügliche Fragen werden in der Arbeit behandelt. Einmal wird zu jeder Functionenklasse eine „specifische Hauptfunction“, d. h. eine solche Function aufgestellt, durch welche jede Function der Klasse als ganze Function mit symmetrischen Coefficienten darstellbar ist. Zweitens werden die „associirten Functionen“ der Klasse bestimmt, d. h. diejenigen von einander linear unabhängigen Functionen, durch welche alle Functionen der Klasse ganz und linear mit Hülfe symmetrischer Coefficienten ausgedrückt werden können. Die letzte Frage wird für die achtwertige und für die beiden zwölfwertigen Klassen vollständig durchgeführt. No.

J. J. Sylvester. On the so-called Tschirnhausen Transformation. J. für Math. C. 465-486.

Die Arbeit knüpft an einen im Jahre 1837 erschienenen Aufsatz von W. R. Hamilton an, in welchem derselbe die Jerrard'sche Methode der Gleichungstransformationen eingehend untersucht. Die Grundaufgabe ist dabei die folgende: Es sind h_1 homogene Gleichungen ersten, h_2 homogene Gleichungen zweiten, ..., h_t homogene Gleichungen t^{ten} Grades zwischen m Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gegeben; die Verhältnisse dieser m Grössen sollen bestimmt werden, ohne dass bei der Elimination Graderhöhungen eintreten; welches ist die untere Grenze für m, bei der die Aufgabe lösbar ist? Die Aufgabe wird so behandelt, dass jedes $a_\lambda = a'_\lambda + a''_\lambda$ gesetzt, und das neue Gleichungssystem in andere zerlegt wird, deren eines die Verhältnisse der a', das andere die der a'' zu einander bestimmt, während das dritte aus einer Gleichung t^{ten} Grades besteht, welche das Verhältnis $a'_1 : a''_1$ liefert. Die beiden ersten Systeme enthalten je eine Gleichung höchsten Grades weniger als das vorgelegte; in dieser Art fährt man fort, bis man zu Systemen kommt, die ausser Gleichungen ersten Grades nur eine einzige Gleichung höheren Grades ent-

halten, und die Anzahl der Variabeln muss gross genug sein, alle diese durch Werte zu befriedigen, die nicht sämtlich verschwinden. Diese Methode benutzt Herr Sylvester, um eine „Zerstörungsformel“ aufzustellen: bezeichnet $[h_t, h_{t-1}, \ldots, h_1]$ die Anzahl der notwendigen Variabeln a, so findet er

$$[h_t, h_{t-1}, \ldots, h_1] = [h_t - 1, h_t + h_{t-1} + h_{t-2}, \ldots, h_t + h_{t-1} + \cdots + h_2 + h_1] + 1;$$

und diese bildet die Grundlage zur Aufstellung des „Zerstörungsdreiecks“, welches auf die gesuchte Zahl führt. Durch diese zu Grunde gelegte Methode wird aber das Resultat beeinflusst; lässt man bei der Zerlegung der Systeme auch solche zu, in denen nicht nur Gleichungen ersten Grades mit einer einzigen Gleichung höheren Grades combinirt werden, sondern alle, bei denen die Elimination nicht auf Gleichungen von höherem als dem t^{ten} Grade führt, dann wird die Zahl der notwendigen Variabeln geringer. Die Anwendung dieser Untersuchungen auf die Bring-Tschirnhausen'sche Transformation von Gleichungen ist bekannt.

Bring wird von Herrn Sylvester als derjenige nachgewiesen, der zuerst jene Transformation angab. Den Beginn der Abhandlung bildet der Nachweis dafür, dass bei der Anwendung der Methode auf die Umformung der Gleichung 5ten Grades in $z^5 + az + b = 0$ die zurückbleibenden Coefficienten nur dann reell werden können, wenn höchstens eine Wurzel der Gleichung reell ist. No.

J. J. Sylvester. Sur une découverte de M. James Hammond relative à une certaine série de nombres qui figurent dans la théorie de la transformation Tschirnhausen. C. R. CIV. 1228-1231.

Herr J. Hammond hat für die in der eben besprochenen Arbeit angeführte Zahlenreihe 2, 3, 5, 11, 47, ... eine Recursionsformel mit Hülfe der erzeugenden Functionen gefunden.

No.

J. J. Sylvester and J. Hammond. On Hamilton's numbers. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII. 285-312.

Die fraglichen Zahlen sind diejenigen, welche in Hamilton's Untersuchung über die Gültigkeit von Jerrard's Methode zur Transformation und Lösung von Gleichungen höheren Grades vorkommen. (Brit. Ass. Rep. for 1836). Es wird Bezug genommen auf Hrn. Sylvester's Arbeit: On the Bring-Tschirnhausen transformation (Journ. für Math. C, s. die vorangehenden Referate). Die Folge dieser Zahlen ist:

$$2,\ 3,\ 5,\ 11,\ 47,\ 923,\ 409\,619,\ 83\,763\,206\,255,\ \ldots$$

Die vorliegende Abhandlung enthält sehr interessante Forschungen über diese Zahlen. Als Beispiel genüge der Hinweis auf Hrn. Hammond's wunderbar schöne Formel zu ihrer Berechnung. Gebraucht man nämlich das Zeichen E_i für die $(i+1)^{te}$ Hamilton'sche Zahl, nachdem sie um eins vergrössert ist, so dass also

$$E_0 = 3,\quad E_1 = 4,\quad E_2 = 6,\ \ldots,$$

dann ist die Formel:

$$(1-t)^{E_0} + t(1-t)^{E_1} + t^2(1-t)^{E_2} + \cdots \equiv 1-2t;$$

man setze die Potenzen von t auf beiden Seiten der Identität einander gleich, so erhält man die vorstehenden Werte $E_0 = 3$, $E_1 = 4$, u. s. w. Bemerkenswert ist auch der Umstand, dass die linke Seite für $t = \frac{1}{2}$ eine convergente Reihe ist; allein wir haben das paradoxe Ergebnis, dass die Summe einer Reihe von positiven Potenzen von $^1/_2$ Null ist. Cly. (Lp.)

Sylvester. Sur les nombres dits de Hamilton. Franç. Ass. (Toulouse.) 164-168.

S. Roberts. Solution of question 8726. Ed. Times XLVII. 33-34.

Im Anschluss an die Abhandlung von Hrn. Hill in Lond. M. S. Proc. XIV (F. d. M. XV. 1883. 62) beweist Hr. Roberts, dass, wenn irgend vier der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades ein harmonisches System bilden, die Beziehung stattfindet:

$$J^2 - 2^7 . 3^2 . JK + 2^{13} . 3^3 . L = 0,$$

worin J, K, L bezw. die drei Fundamentalinvarianten von den Ordnungen 4, 8, 12 bedeuten. Lp.

G. Paxton Young. Solvable quintic equations with commensurable coefficients. American J. X. 99-130.

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. XV. 61-62) liefert Herr Young eine Methode zur Auffindung der Wurzeln lösbarer Gleichungen fünften Grades mit rationalen Coefficienten; an einer Reihe von 20 Beispielen legt er die Verwendbarkeit der Methode dar. No.

A. Cayley. Note on the Jacobian sextic equation. Math. Ann. XXX. 78-84.

Bezeichnet man die Quadratwurzeln aus den Wurzeln der Gleichung
$(z-a)^6-4.a(z-a)^5+16.b(z-a)^3-4.c(z-a)+5b^2-4ac=0$
mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_6$ und eine imaginäre fünfte Einheitswurzel mit ε, so finden die drei Gleichungen statt

$$\begin{aligned} 0 &= -\zeta_1\sqrt{5}+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4+\zeta_5+\zeta_6, \\ 0 &= \zeta_2+\varepsilon^3\zeta_3+\varepsilon\zeta_4+\varepsilon^4\zeta_5+\varepsilon^2\zeta_6, \\ 0 &= \zeta_2+\varepsilon^2\zeta_3+\varepsilon^4\zeta_4+\varepsilon\zeta_5+\varepsilon^3\zeta_6, \end{aligned}$$

durch welche der Quadratwurzel ζ_1 eine Ausnahmestellung angewiesen wird. Es giebt also sechs solcher Systeme, welche sich durch Vertauschung der Wurzeln z auseinander ableiten. Dabei brauchen aber die Quadratwurzeln ζ nicht dieselben Zeichen zu behalten. Herr Cayley bestimmt die Aenderungen, welche in den Vorzeichen der ζ bei Permutationen der z eintreten. No.

F. Klein. Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Math. Ann. XXVIII. 499-532.

Entsprechend den Theorien des Herrn Verfassers bei den Gleichungen 4ten und 5ten Grades, wird auch hier eine geometrische Untersuchung an das Gleichungssystem

$$(1) \qquad \sum_0^{n-1} x_k = 0, \quad \sum_0^{n-1} x_k^2 = 0 \qquad (n = 6, 7)$$

geknüpft, wobei die x als überzählige Punkt-Coordinaten eines

Raumes von ($n-2$) Dimensionen aufgefasst werden, in welchem (1) eine quadratische Mannigfaltigkeit von ($n-3$) Dimensionen darstellt, $M_{n-2}^{(2)}$. Es folgt, dass diese als lineare Räume R_ν von möglichst grosser Dimensionenzahl enthält: für $n = 6$ eine Schar von $\infty^3 R_1$, für $n = 7$ zwei Scharen von $\infty^3 R_2$. Man kann R_1, resp. eine Schar der R_2 durch vier Verhältnisgrössen $z_1:z_2:z_3:z_4$ festlegen, so dass die Beziehung zwischen diesen Wertsystemen und den linearen Räumen eindeutig ist, und dass die z bei allen Vertauschungen der x, für $n = 7$ nur bei geraden Vertauschungen lineare Transformationen erleiden. So erhält man Gruppen linearer Transformationen von 6! bezw. 7!:2 Operationen, und es handelt sich nun darum, aus den x vier Functionen z von der angegebenen Eigenschaft zu bestimmen. Gelingt dies, dann kann man die Gleichungen 6[ten] und 7[ten] Grades durch ein Gleichungssystem der z ersetzen.

Die z lassen sich als homogene Punktcoordinaten im gewöhnlichen Raume auffassen, und man sucht von ihnen aus durch Vermittelung der sechs homogenen Coordinaten der Raumgeraden zu sechs Grössen x zu gelangen, welche dem System (1) genügen. Zwischen den sechs homogenen Coordinaten besteht eine quadratische Relation, und daher können sechs lineare Functionen der Coordinaten bestimmt werden, welche das System befriedigen. Dann lässt sich nachweisen, dass die z bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x sich linear transformiren. Nach diesen Auseinandersetzungen werden Formeln geliefert, welche die x durch zwei Reihen von Punktcoordinaten z, z' darstellen, und es werden die Wirkungen der elementaren Vertauschungen der x auf die Transformationen der z berechnet. Dabei stellt sich heraus, dass die Gesamtheit der Substitutionen der z mit der Gruppe der Vertauschungen der x nur hemiedrisch isomorph ist, so dass die Reduction der Gleichungen der x auf das Gleichungssystem der z ohne Zuhülfenahme accessorischer Irrationalitäten unmöglich ist. Endlich wird die geforderte Zurückführung im Princip gelöst, d. h. es werden aus beliebig vorgelegten Grössen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ Functionen $z_1, \ldots, z_4$ zusammengesetzt, für welche die besprochenen Transformationsbeziehungen

gelten. Die Lösung stützt sich hierbei wiederum auf geometrische Betrachtungen. No.

Ch. Biehler. Sur l'abaissement des équations réciproques. Nouv. Ann. (3) VI. 251-256.

Die allgemeinste Form der Substitution, durch welche in einer reciproken Gleichung nur die Quadrate der neuen Variabeln erscheinen, ist

$$y=\frac{1-x}{1+x}\,\frac{\varphi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(x)},$$

wobei φ_{2n}, ψ_{2n} reciproke Functionen des Grades $2n$ sind. No.

Ch. Biehler. Sur l'équation de degré m qui donne $\tang\frac{a}{m}$ lorsqu'on connaît $\tang a$. Nouv. Ann. (3) VI. 5-9.

Mit der erwähnten Gleichung hängt das Polynom V_m zusammen, welches durch

$$iV_m=(1+ix)^m(1-ia)-(1-ix)^m(1+ia)$$

gegeben ist. Mit Hülfe des Sturm'schen und des Rolle'schen Theorems erkennt man, dass $V_m=0$ nur reelle Wurzeln besitzt. No.

Ch. Biehler. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. Nouv. Ann. (3) VI. 9-18.

Es sei

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},\qquad \frac{\partial^n y}{\partial\alpha^n}=\frac{Q_n(x,\alpha)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

und x liege zwischen -1 und $+1$. Dann hat $Q_n(x,\alpha)=0$ nach α aufgelöst nur reelle Wurzeln. Die Legendre'sche Function X_n ist gleich $Q_n(x,0):n!$; auch diese liefert gleich Null gesetzt nur reelle Wurzeln x. No.

E. Pascal. Sulla costruzione del poligono regolare di 257 lati. Napoli Rend.

Es wird eine Construction des regulären 257-Ecks auf Grund der Richelot'schen Formeln und der Schröter'schen Construction der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades gegeben. No.

H. W. LLOYD TANNER. On the binomial equation $x^p-1=0$: Quinquisection. Lond. M. S. Proc. XVIII. 214-234.

Die Untersuchungen schliessen sich an die Arbeiten des Herrn Cayley (Proc. XI, XII, XVI; F. d. M. XII. 128, XVII. 153) und des Fräulein Charlotte A. Scott (Am. J. 1886; F. d. M. XVIII. 1886. 66) an. Bedeuten $X_0, X_1, \dots, X_4$ die fünf Perioden für $p=5\lambda+1$, ferner

$F(\omega)=X_0+\omega X_1+\omega^2 X_2+\omega^4 X_3+\omega^3 X_4$ und $q(\omega)=F(\omega)^2:F(\omega^2)$,

dann werden die Coefficienten der Gleichung für die fünf Perioden von λ Gliedern durch die Grössen

$\Sigma q(\omega)=5\sigma_1+1$, $\Sigma q(\omega)q(\omega^2)=5\sigma_2-1$, $\Sigma q(\omega)^2 q(\omega^2)=5\sigma_3+1$

ausgedrückt. Ist

$$\eta^5+\eta^4+P_2\eta^3+P_3\eta^2+P_4\eta+P_5=0$$

die Periodengleichung, dann wird

$$P_2=-2\lambda,\quad P_3=-\tfrac{1}{5}(2\lambda+p[1+\sigma_1]),\quad P_4=\tfrac{1}{5}(\lambda^2-\tfrac{1}{5}p(1+2\sigma_1+\sigma_2))$$

$$P_5=\tfrac{1}{25}(\lambda^3-\tfrac{1}{5}[p\{\sigma_1+\sigma_2\}+\tfrac{1}{5}\{p\sigma_3+\lambda+1\}]).$$

Die ersten drei Werte stimmen mit den von Fräulein Scott angegebenen überein. Es wird ferner das umgekehrte Problem behandelt, aus der gegebenen Periodengleichung q zu finden.

No.

P. NEKRASSOFF. Ueber trinomische Gleichungen. Math. Ann. XXIX. 413-440.

Zunächst giebt der Herr Verfasser Flächenstücke an, die aus, um den Nullpunkt als Mitte gezeichneten Kreisringen durch Radien ausgeschnitten werden, derart, dass in jedem derselben genau eine Wurzel der trinomischen Gleichung sich befindet. Dann beschäftigt sich derselbe mit der Untersuchung der Convergenz der Reihen, in welche sich die Potenzen der Gleichungswurzeln entwickeln lassen, und liefert dabei einige bisher noch nicht bemerkte Sätze. Weiter werden die Eigenschaften der

trinomischen Gleichung zur Reihenentwickelung von Integralen benutzt, deren Integrand das Polynom der Gleichung mit einer Potenz der Variabeln multiplicirt enthält; und ebenso werden die Gleichungen zur Integration einer Differentialgleichung verwendet. No.

E. CATALAN. Remarques sur une équation trinôme. Belg. Bull. XIII. 414-417.

Ist $P_k = x^{2k} + x^k + 1$, so hat man

$$P_n + 2x^k = (x^2 + x + 1) P_1 P_2 P_3 \dots P_{n-1},$$

und

$$\frac{1-x}{1-x^3} = P_1 P_2 P_3 \dots P_n \dots;$$

dies gestattet die Berechnung der Producte $P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3, \dots$ Mn. (Lp.)

A. S. GULDBERG. Om Tverödder. Zeuthen T. (5) IV. 97-120. (1886.)

Für eine Wurzel der trinomischen Gleichung $x^n = c(1+x)$ führt der Verfasser ein neues Zeichen ein, indem er das Symbol

$$x = \sqrt[n]{\overline{c}}$$

benutzt. Er discutirt demnächst sowohl die verschiedenen Weisen, auf welche x aus c und n berechnet werden kann, insbesondere die beiden von Gauss und Åstrand gegebenen Methoden, sowie überhaupt die Rechnungsarten, welche mit dem neuen Symbol angestellt werden können. Gm.

CH. BIEHLER. Sur une application de la méthode de Sturm. Nouv. Ann. (3) VI. 421-426.

Entwickelt man tang$x$ in einen Kettenbruch und bezeichnet den n^{ten} Näherungswert mit $P_n : Q_n$, so sind P_{2n-1}, P_{2n} vom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Auf die zwischen den P herrschenden Recursionsformeln kann man eine Anwendung des Sturm'schen Satzes

gründen und erkennt, dass alle Wurzeln von $P_n = 0$ reell und von einander verschieden sind. Aehnliches gilt von den Q_n.

No.

T. J. STIELTJES. Sur les racines de l'équation $X_n = 0$. Acta Math. IX. 385-400.

Herr Bruns hatte für die Wurzeln x_i der Gleichung $X_n = 0$ die folgende Grenzbestimmung gegeben

$$\cos\frac{2i\pi}{2n+1} < x_i < \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+1};$$

diese wird auch hier wieder abgeleitet und dann noch eine zweite schärfere aufgestellt:

$$\cos\frac{i\pi}{n+1} < x_i < \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}p.$$

Herr Stieltjes bemerkt aber selbst in einer Note, dass das zweite Resultat bereits von Herrn Markoff (Math. Ann. XXVII) gegeben, aber auf andere Art bewiesen sei.

No.

E. NETTO. Ueber einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen. Math. Ann. XXIX. 141-147.

Die Berechtigung des bekannten Verfahrens zur Auflösung der trinomischen Gleichung $x^n - x - a = 0$ durch den Algorithmus

$$x_1 = \sqrt[n]{x_0 + a}, \quad x_2 = \sqrt[n]{x_1 + a}, \quad x_3 = \sqrt[n]{x_2 + a}, \ \ldots$$

erfordert insofern noch eine Ergänzung, als es sich fragt, ob das Verfahren convergent ist, d. h. ob sich x_k mit wachsendem k wirklich einer reellen Wurzel der Gleichung nähert. Seine Untersuchungen über diese Frage führt der Herr Verfasser der besseren Einsicht halber gleich an der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades durch. Für die trinomische Gleichung ergiebt sich aus diesen sofort Folgendes. Ist n eine ungerade Zahl, und hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel, so führt der Algorithmus von jedem beliebigen Anfangswert x_0 asymptotisch zu derselben; hat sie dagegen drei reelle Wurzeln $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3$, so führt jedes

x_0 zwischen ξ_2 und $+\infty$ auf ξ_1, jedes x_0 zwischen ξ_2 und $-\infty$ auf ξ_2. Ist n gerade und hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln $\xi_1 \geqq \xi_2$, die positiv sein müssen, so führt der Algorithmus, falls unter der n^{ten} Wurzel hierbei stets ihr einziger in p negativer Wert verstanden wird, von jedem x_0 zwischen ξ_2 und $+\infty$ auf ξ_1, von jedem x_0 zwischen ξ_2 und $-a$ dagegen auf Werte x_k, welche $< -a$ sind, daher den Radicanden negativ machen, so dass die Rechnung abgebrochen werden muss; hat sie dagegen nur eine positive Wurzel, so führt jedes x_0 zwischen $-a$ und $+\infty$ auf diese; hat sie gar keine reelle Wurzel, dann führt jedes x_0 auf Werte x_k, die den Radicanden negativ machen. Benutzt man den negativen Wert der n^{ten} Wurzel, so gelangt man entweder von allen Werten zwischen $-a$ und $a^{2n}-a$ auf die etwa vorhandene negative Wurzel, oder alle diese führen mit Ausnahme des Wurzelwertes selber auf Werte x_k, die den Radicanden negativ machen. T.

A. Siebel. Exacte Trennung der reellen Wurzeln numerischer algebraischer und transcendenter Gleichungen. Hoppe Arch. (2) V. 279-344.

Hat $f(x) = 0$ die der Grösse nach aufeinanderfolgenden Wurzeln x_r, x_{r+1}, so wird eine Function t hergestellt, welche mit x gleichzeitig von x_r bis x_{r+1} wächst, aber so, dass $t > x$ für $x_r < x < x_{r+1}$ wird. Das Maximum t_r von t in diesem Intervall giebt dann eine Strecke $t_r - x_r$, in welcher nur eine weitere Wurzel x_{r+1} liegen kann, falls t_r keine weitere Wurzel x_{r+2} überschreitet. Die Verwendung der Functionen t ist danach ersichtlich. No.

W. Laska. Einige Anwendungen der Methode der wiederholten Substitutionen. Hoppe Arch. (2) V. 199-210.

Die an sich richtige Idee, eine Wurzel von

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

welche kleiner ist als 1, dadurch zu berechnen, dass man die Werte

$x^{n+k} = A_{k,1}x^{n-1} + A_{k,2}x^{n-2} + \cdots$ bestimmt, für hinlänglich hohe k die linken Seiten gleich Null setzt und aus $(n-1)$ derartigen Gleichungen x bestimmt, wird mit einer grossen Menge von Unrichtigkeiten vermischt vorgetragen. No.

P. O'Connell. Note on the use of common logarithms in the numerical solution of equations of the higher orders. Ed. Times XLVI. 166-168.

Ist c ein angenäherter Wert für eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist die erste Correction nach dem sogenannten Newton'schen Näherungsverfahren

$$-\frac{f(c)}{f'(c)}, \quad \text{und } c - \frac{f(c)}{f'(c)} = c\left(1 - \frac{f(c)}{cf'(c)}\right)$$

ist ein folgender angenäherter Wert. Stellt man daher x in der Form dar $x = a_1(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots$, so ist in jenem Werte der Anfang dieser Entwickelung gegeben, die dann in ähnlicher Weise fortgesetzt wird. Lp.

F. J. van den Berg. Over de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen. Amst. Versl. en Meded. III. (3) 196-252.

Handelt über die graphische Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Die Gleichungen werden auf ein Axensystem bezogen, und die Uebereinstimmung zwischen den Wurzeln und den Durchschnittspunkten paralleler Geraden mit diesen Axen wird nachgewiesen. Eingehender verweilt Verfasser bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen mit drei Unbekannten, deren Wurzeln in Beziehung stehen zu den Flächen von Dreiecken und den Inhalten von Vierecken. Dieselbe Methode wird sodann auf den allgemeinen Fall ausgedehnt. Die Lage der Wurzelpunkte wird untersucht und in Verbindung gesetzt mit den Eigenschaften der Determinanten, welche durch Elimination der Unbekannten entstehen. Darauf wird gezeigt, wie aus der Lage der Wurzelpunkte die Werte

der Wurzeln abgeleitet werden können. Die Rechnungen werden durchgeführt für ein System von vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Zum Schlusse wird die Literatur über diesen Gegenstand vollständig mitgeteilt. G.

C. Reuschle. Appareil grapho-mécanique pour la résolution d'équations numériques, avec des explications à la portée de tous. Paris. Gauthier-Villars.

Uebersetzung der Schrift, welche F. d. M. XVI. 1884. 68 besprochen ist. Lp.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

J. J. Sylvester. Lectures on the theory of reciprocants. Continuation. American J. IX. 113-161.

Die grundlegenden Principien der Sylvester'schen Reciprocantentheorie sind F. d. M. XVIII. 73ff. ausführlich besprochen worden. In dieser Fortsetzung untersucht der Verf. den eigentümlichen Zusammenhang genauer, der zwischen den Reciprocanten und den binären Semiinvarianten (Quellen) besteht.

Die beiderseitige Anordnung nach der „Ausdehnung" d. i. der Anzahl der Buchstaben a, b, c, d, ... lässt wohl manche Analogien hervortreten, es zeigen sich aber auch auffallende Verschiedenheiten. So z. B. weist eine binäre Grundform vierter Ordnung fünf Quellen auf, denen fünf, zum Grundsystem a, b, c, d, e gehörige, irreducible Reciprocanten von ähnlichem Aufbau correspondiren; zu diesen letzteren gesellt sich indessen eine sechste, die demnach kein Analogon im binären Invariantengebiet besitzt. In der That sind sich allgemein die beiderlei „Erzeugenden Functionen" wohl ähnlich, stimmen aber durchaus

nicht ganz überein; vielmehr bieten die für Reciprocanten Sonderheiten dar, die noch zum Teil der Erklärung bedürftig sind.

Die Verschiedenheit zwischen Reciprocanten und Invarianten zeigt sich am deutlichsten bei einer Anordnung nach dem „Grade"; es wird der Satz bewiesen: „Die Anzahl der reinen Reciprocanten von einem gegebenen Grade ist eine endliche, dagegen die der Semiinvarianten vom nämlichen Grade eine endlose". Es geschieht dies mit Hülfe der zahlentheoretischen Function $N(w:i)$, d. i. der Anzahl von Möglichkeiten, die für die Teilung einer ganzen positiven Zahl w in i positive ganzzahlige Teile bestehen. Bedeutet nun i den Grad, w das Gewicht, und bildet man für $w = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Summe der Differenzen

$$N(w:i) - N(w-1:i+1),$$

so würde nach einem allgemeinen Satze eben diese Summe die Anzahl aller reinen Reciprocanten vom Grade i liefern, wobei negative Differenzen nicht mitzuzählen sind. Von einem gewissen, von i abhängigen w an werden aber stets sämtliche Differenzen Null oder negativ, woraus der mitgeteilte Satz folgt.

Der Verf. wendet sich dann zu einigen ihm von Hrn. MacMahon mitgeteilten Sätzen, die wiederum ein neues Licht auf die Verwandtschaft zwischen Reciprocanten und Invarianten werfen. Wir greifen etwa den ersten der Sätze heraus. „Sei V der „Annihilator für Reciprocanten" (d. h. $V = 0$ die Differentialgleichung der Reciprocanten), und entsprechend Ω der Annihilator der Invariantenquellen, so ist der Operator $V\Omega - \Omega V$ ein beiden Gebieten gemeinsamer, d. h. er führt eine Reciprocante in eine andere, und ebenso eine Invariantenquelle in eine andere über."

Derartige Sätze reichen indessen doch nicht aus, um die vollständigen Grundlagen für eine Theorie zu gewinnen, welche die der Reciprocanten und der Invarianten umfassen soll. Um dies zu ermöglichen, wird eine Reihe fundamentaler Betrachtungen herangezogen, welche Hr. Halphen über die Existenz von Invarianten im allgemeinen angestellt hat. Es liege eine Reihe willkürlicher Grössen $A, B, C, \ldots, L$ vor. Ersetzt man diese durch andere $a, b, c, \ldots, l$, welche algebraische Functionen der ersteren

von vorgeschriebener Form, aber mit beweglichen Parametern darstellen, so ist das der Act einer „Substitution“. Derartige Substitutionen bilden eine „Gruppe“, wenn die Anwendung von irgend zwei Substitutionen derselben mit einer dritten äquivalent ist. Dann führt die Elimination der beweglichen Parameter zu Gleichungen zwischen „absoluten Invarianten“. Danach lassen sich die allgemeinsten Invarianten geradezu durch ein System von Substitutionen, die eine Gruppe bilden, charakterisiren.

Die Anwendung dieser Theorie auf die Reciprocanten soll in einer weiteren Fortsetzung erfolgen. Zur Vorbereitung wird eine Reihe von eigentümlichen Identitäten zwischen verschiedenartigen Operatoren entwickelt. My.

J. J. Sylvester. Lectures on the theory of reciprocants. American J. IX. 297-352, X. 1-16.

Zunächst teilt der Verfasser zwei von Halphen herrührende Beweise für die folgende Formel mit

$$A_n = (-1)^n x^{2n-1}\left\{a_n + \frac{n-2}{1.x}a_{n-1} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2.x^2}a_{n-2} + \cdots\right\},$$

worin

$$X = \frac{1}{x},\quad Y = \frac{y}{x},$$

und

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n},\quad A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n Y}{dX^n}$$

gesetzt ist. Im Anschluss hieran wird unter anderem bewiesen, dass eine Principiante vom Grade und Gewichte Null durch Differentiation nach der unabhängigen Variabeln x wiederum eine Principiante ergiebt. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit dem Cayley'schen Theorem, dem zufolge die Zahl der unter einander unabhängigen Semiinvarianten von dem Gewichte w, dem Grade i und der Ausdehnung j durch den Ausdruck

$$(w;\ i,j) - (w-1;\ i,j)$$

gegeben wird. Für dieses Theorem giebt der Verfasser einen neuen Beweis, welcher freilich das Reciprocitätsgesetz von Her-

mite (vgl. Cambridge and Dublin Math. Journal 1854) zur Voraussetzung hat. Zur Darlegung des Beweises hält der Verfasser die Einführung folgender Bezeichnungen für nützlich. Eine ganze rationale homogene und isobare Function wird eine „Gradiente" genannt; die drei Zahlen w, i, j bilden den „Typus" der Gradiente; die Zahl $ij-2w$ heisst der „Excess", und die Zahl der Glieder der allgemeinsten Gradiente vom Typus w, i, j heisst die „Denumerante". Die beiden Typen w, i, j und $ij-w, i, j$ heissen complementär, und es wird bewiesen, dass die Denumeranten zweier Gradienten gleich sind, sobald die Typen der Gradienten complementär sind. Hierauf wird das Cayley'sche Theorem für $i \gtreqless 0$ und dann endlich allgemein bewiesen. (Man vergleiche dem gegenüber die Beweise von E. Stroh und dem Referenten in den Mathematischen Annalen Bd. XXXI. 441, beziehungsweise Bd. XXX. 20). Es folgt der Beweis des Satzes, dass jede Principiante nach Multiplication mit einer geeigneten Potenz von $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine Invariante der binären Form

$$(A, B, C, \ldots)(u, v)^j$$

wird, wo $A, B, C, \ldots$ eine bekannte Reihe von reinen Reciprocanten darstellt. Diese Thatsache wird an einer Reihe von Beispielen erläutert. So erhält man aus der Jacobi'schen Differentialgleichung

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)(lx+my)+\frac{dy}{dx}(l'x+m'y+n')+l''x+m''y+n''=0$$

nach siebenmaliger Differentiation nach x und nachheriger Elimination der Constanten $l, m, l', m', n', l'', m'', n''$ eine Differentialgleichung, deren linke Seite eine Principiante ist. Der Verfasser findet für dieselbe den Wert

$$\frac{A^2D-3ABC+2B^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4}.$$

Ein weiteres Beispiel liefert die Differentialgleichung der ebenen Curve n^{ter} Ordnung, d. h. diejenige Differentialgleichung, welcher y als Function von x genügt, wenn y und x durch eine Gleichung n^{ten} Grades mit einander verknüpft sind. Die fragliche

Differentialgleichung wird erhalten, wenn man aus jener Gleichung und den durch Differentiation derselben nach x entspringenden Gleichungen die Coefficienten der Gleichung eliminirt. Die Rechnung wird für die ebene kubische Curve vollständig durchgeführt. Auch beschäftigt sich der Verfasser eingehend mit der Differentialgleichung für ebene kubische Curven, deren absolute Invariante $\frac{S^3}{T^2}$ einen bestimmten vorgeschriebenen Wert besitzt. Ht.

P. A. MacMahon. The theory of a multilinear partial differential operator, with applications to the theories of invariants and reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVIII. 61-88.

Um eine gemeinsame Behandlung der Theorie der algebraischen Invarianten und der Reciprocanten zu ermöglichen, betrachtet der Verfasser das allgemeine Differentiationssymbol

$$(\mu, \nu;\ m, n) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (\mu+s\nu) A_{s,m} \frac{\partial}{\partial a_{n+s}},$$

wo

$$A_{s,m} = \Sigma \frac{(m-1)!}{k_0!k_1!k_2!\dots} a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2}\dots \qquad \begin{pmatrix} k_0+k_1+k_2+\dots = m \\ k_1+2k_2+3k_3+\dots = s \end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Dieses Differentiationssymbol umfasst die in der Theorie der Invarianten und Reciprocanten üblichen Processe. Es ist nämlich

$$(1,0;\ 1,1) = a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + a_2\frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots,$$

$$(1,0;\ 1,0) = a_0\frac{\partial}{\partial a_0} + a_1\frac{\partial}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots,$$

$$(0,1;\ 1,0) = a_1\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_2\frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_3\frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots,$$

$$(1,1;\ 1,1) = a_0\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots,$$

$$(4,1;\ 2,1) = 2a_0^2\frac{\partial}{\partial a_1} + 5a_0a_1\frac{\partial}{\partial a_2} + 3(2a_0a_2 + a_1^2)\frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots.$$

Nimmt man zwei verschiedene Differentiationssymbole der obigen Art, etwa die Symbole

$$(\mu, \nu;\ m, n), \quad (\mu', \nu';\ m', n'),$$

so gilt der Satz, dass

$$(\mu', \nu';\ m', n')(\mu, \nu;\ m, n) - (\mu, \nu;\ m, n)(\mu', \nu';\ m', n')$$

wieder ein Symbol derselben Art ist, nämlich gleich dem Symbol

$$(\mu_1, \nu_1;\ m'+m-1, n'+n),$$

wo

$$\mu_1 = (m'+m-1)\left\{\frac{\mu'}{m'}(\mu+n'\nu) - \frac{\mu}{m}(\mu'+n\nu')\right\},$$

$$\nu_1 = (n'-n)\nu'\nu + \frac{m-1}{m'}\mu'\nu - \frac{m'-1}{m}\mu\nu'$$

gesetzt ist. Das erhaltene Symbol heisst die Alternante der beiden ursprünglichen Symbole, und indem der Verfasser nach den Bedingungen für das Verschwinden der Alternante forscht, gelangt er zu folgendem Resultat. Wendet man auf eine homogene isobare und der partiellen Differentialgleichung

$$(\mu, \nu;\ m, n) = 0$$

genügende Function eins der beiden Symbole

$$\left\{n m', m-1;\ m', \frac{\mu}{m\nu}(m'-1)\right\}, \quad \left\{\mu m', m\nu;\ m', n + \frac{\mu}{m\nu}(m'-m)\right\}$$

an, so wird jene Function ungeändert reproducirt. Diese beiden Symbole heissen daher die Commutoren des Symbols $(\mu, \nu;\ m, n)$. Nach weiteren auf die Theorie der Commutoren bezüglichen Bemerkungen wird noch der Satz bewiesen, dass jede Semiinvariante der binären Form

$$(B_0, B_1, B_2, \ldots B_t)(X, Y)^t,$$

wo

$$B_s = (-1)^s s!\,(\mu, \nu;\ m, n)^{t-s} a_{tn}$$

bedeutet, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(\mu, \nu;\ m, n) = 0$$

ist. Ht.

E. B. Elliott. On the linear partial differential equations satisfied by pure ternary reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVIII. 142-164.

Der Verfasser stellt das vollständige System der Differentiationssymbole auf, deren Anwendung eine reine ternäre Reciprocante zum Verschwinden bringt. Die Methode beruht auf der Berechnung der entsprechenden unendlich kleinen Zuwachse der Veränderlichen. Nachdem diese Methode an dem Falle der binären Reciprocanten erläutert ist, wird eine Function z von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y betrachtet. Der Verfasser gelangt zu drei Paaren von Differentiationssymbolen, welche unter Benutzung der Abkürzung

$$z_{rs} = \frac{1}{r!\,s!}\,\frac{d^{r+s}z}{dx^r\,dy^s}$$

die folgende Gestalt annehmen

$$E_1 = \mu - \left(3z_{20}\frac{d}{dz_{20}} + 2z_{11}\frac{d}{dz_{11}} + z_{02}\frac{d}{dz_{02}}\right)$$
$$-\left(4z_{30}\frac{d}{dz_{30}} + 3z_{21}\frac{d}{dz_{21}} + 2z_{12}\frac{d}{dz_{12}} + z_{03}\frac{d}{dz_{03}}\right) - \cdots,$$

$$E_2 = \mu - \left(z_{20}\frac{d}{dz_{20}} + 2z_{11}\frac{d}{dz_{11}} + 3z_{02}\frac{d}{dz_{02}}\right)$$
$$-\left(z_{30}\frac{d}{dz_{30}} + 2z_{21}\frac{d}{dz_{21}} + 3z_{12}\frac{d}{dz_{12}} + 4z_{03}\frac{d}{dz_{03}}\right) - \cdots,$$

$$\Omega_1 = \left(2z_{20}\frac{d}{dz_{11}} + z_{11}\frac{d}{dz_{02}}\right)$$
$$+\left(3z_{30}\frac{d}{dz_{21}} + 2z_{21}\frac{d}{dz_{12}} + z_{12}\frac{d}{dz_{03}}\right) + \cdots,$$

$$\Omega_2 = \left(z_{11}\frac{d}{dz_{20}} + 2z_{02}\frac{d}{dz_{11}}\right)$$
$$+\left(z_{21}\frac{d}{dz_{30}} + 2z_{12}\frac{d}{dz_{21}} + 3z_{03}\frac{d}{dz_{12}}\right) + \cdots,$$

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left[\{(z_{20}\xi^2 + z_{11}\xi\eta + z_{02}\eta^2)\right.$$
$$\left. + (z_{30}\xi^3 + z_{21}\xi^2\eta + z_{12}\xi\eta^2 + z_{03}\eta^3) + \cdots\}^2\right],$$

$$V_2 = \tfrac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\left[\{(z_{20}\xi^2 + z_{11}\xi\eta + z_{02}\eta^2)\right.$$
$$\left. + (z_{30}\xi^3 + z_{21}\xi^2\eta + z_{12}\xi\eta^2 + z_{03}\eta^3) + \cdots\}^2\right].$$

Die beiden Differentialgleichungen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ verlangen, dass die Function der Grössen z_{rs} homogen und isobar sei in Bezug auf jeden der beiden Indices r und s. Bezeichnet man den Grad mit i und die beiden Gewichte mit w_1 und w_2, so ist

$$u = i + w_1 = i + w_2.$$

Die beiden Differentialgleichungen $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ sagen aus, dass die reine ternäre Reciprocante eine Invariante ist für das Formensystem

$$(z_{20}, z_{11}, z_{02})(\xi, \eta)^2, (z_{30}, z_{21}, z_{12}, z_{03})(\xi, \eta)^3, \dots$$

Die beiden letzten Differentiationsprocesse V_1 und V_2 sind in symbolischer Gestalt geschrieben; man erhält die wirklichen Ausdrücke, wenn man die geschwungenen Klammern quadrirt und nach Ausführung der Differentiationen allgemein $\xi^r \eta^s$ durch $\frac{d}{dz_{rs}}$ ersetzt. V_1 und V_2 sind, wie man sieht, in den Grössen z_{rs} quadratisch; sie entsprechen dem in der Theorie der binären Reciprocanten auftretenden Differentiationssymbol V. Die sechs Differentialgleichungen

$$E_1 = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad V_1 = 0,$$
$$E_2 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad V_2 = 0$$

bilden das System der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine homogene Function der Grössen z_{20}, $z_{11}, z_{02}, z_{30}, \dots$ eine reine ternäre Reciprocante ist. Es werden zum Schluss noch einige einfache Beispiele für reine ternäre Reciprocanten behandelt. Ht.

L. J. Rogers. Third memoir on reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVIII. 130-141.

Wenn J und C zwei feste Punkte in einer Ebene sind, so lässt sich zu jedem Punkte P der Ebene ein Punkt Q derart finden, dass CQ umgekehrt proportional und parallel zu JP wird. Die durch diese geometrische Construction vermittelte Transformation der Punkte einer Ebene ist dieselbe, welche der Verfasser in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 90) die circulare reciprocante Transformation genannt hat.

Die solchen Transformationen gegenüber invariant bleibenden Bildungen heissen circulare Reciprocanten, und die aus letzteren durch Nullsetzen entspringenden Differentialgleichungen werden circulare reciprocante Differentialgleichungen genannt. Für die einfachsten Differentialgleichungen dieser Art giebt der Verfasser das vollständige Integral an und findet dabei einige von denjenigen Resultaten wieder, welche Halphen in seiner Thèse „Sur les invariants différentiels" ausgesprochen hat. Ht.

C. Leudesdorf. Second paper on change of the independent variable; with applications to some functions of the reciprocants kind. Lond. M. S. Proc. XVIII. 235-262.

Die Arbeit schliesst sich an frühere Untersuchungen des Verfassers an (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 88 und 89). Sind die drei Veränderlichen x, y, z durch zwei Relationen mit einander verknüpft und führt man für die totalen Differentialquotienten bezw. die Bezeichnungen ein

$$x_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n x}{dz^n}, \quad Y_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dx^n},$$

$$y_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n y}{dz^n}, \quad Z_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n z}{dx^n},$$

so lassen sich offenbar Y_n und Z_n darstellen als ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$, dividirt durch geeignete Potenzen von x_1. Der Verfasser erhält die Formeln

$$Y_n = x_1^{-n}\, e^{-\frac{W}{x_1}}\left(y_n - \frac{y_1}{x_1}x_n\right),$$

$$Z_n = -x_1^{-(n+1)} e^{-\frac{W}{x_1}} x_n,$$

und allgemein

$$f(Y_2, Y_3, \ldots, Z_2, Z_3, \ldots)$$

$$= x_1^{-w} e^{-\frac{W}{x_1}} f\left(y_2 - \frac{y_1}{x_1}x_2,\ y_3 - \frac{y_1}{x_1}x_3, \ldots, -\frac{x_2}{x_1},\ -\frac{x_3}{x_1}, \ldots\right),$$

wo f eine homogene und isobare Function vom Gewichte w bedeutet. W ist das Operationssymbol

$$W = (2x_2\xi + 3x_3\xi^2 + 4x_4\xi^3 + \cdots)(x_2\xi^2 + x_3\xi^3 + x_4\xi^4 + \cdots)$$
$$+ (2y_2\eta + 3y_3\eta^2 + 4y_4\eta^3 + \cdots)(x_2\eta^2 + x_3\eta^3 + x_4\eta^4 + \cdots),$$

wo man allgemein ξ^r, η^r durch $\frac{d}{dx_r}$, $\frac{d}{dy_r}$ zu ersetzen hat. Ausser der Operation W werden noch die folgenden Differentiationsprocesse behandelt

$$W' = (2x_2\xi + 3x_3\xi^2 + 4x_4\xi^3 + \cdots)(y_2\xi^2 + y_3\xi^3 + y_4\xi^4 + \cdots)$$
$$+ (2y_2\eta + 3y_3\eta^2 + 4y_4\eta^3 + \cdots)(y_2\eta^2 + y_3\eta^3 + y_4\eta^4 + \cdots),$$
$$J = x_1\eta + x_2\eta^2 + x_3\eta^3 + \cdots,$$
$$J' = y_1\xi + y_2\xi^2 + y_3\xi^3 + \cdots,$$

wo die Potenzen von ξ und η in der nämlichen symbolischen Bedeutung wie oben zu verstehen sind. Unter den Eigenschaften dieser Operationen heben wir diejenigen hervor, welche ihren Ausdruck finden in den Formeln

$$JW - WJ = 0, \qquad JW' - W'J = W,$$
$$J'W' - W'J' = 0, \quad J'W - WJ' = W'.$$

Ht.

P. Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie. Herausgegeben von G. Kerschensteiner. Zweiter Band: Binäre Formen. 360 S. Leipzig. Teubner.

Der erste Teil des vorliegenden zweiten Bandes behandelt die fundamentalen Processe für invariante Bildungen im binären Formengebiete. Nachdem für eine binäre Grundform die symbolische Bezeichnung und die lineare Transformation erklärt, sowie im Anschluss daran die Begriffe Invariante und Covariante definirt sind, folgt die Beschreibung des sogenannten Faltungsprocesses. Ein symbolisches Product

$$(ab)^\mu (ac)^\nu (bc)^\varrho \dots a_x^\sigma b_x^\tau c_x^\varkappa \dots$$

wird einmal „gefaltet", wenn man etwa die beiden symbolischen Factoren a_x und b_x herausgreift und an ihre Stelle den Klammerfactor (ab) einführt. Wird umgekehrt ein Klammerfactor (ab) durch $a_x\, b_x$ ersetzt, so ist dadurch der Ausdruck „entfaltet". Beide Processe sind offenbar rein symbolische Processe. Es folgt eine Darlegung der Elemente der symbolischen Rechnung (§ 1).

Der Polarenbegriff und die Aufstellung derjenigen Differentialgleichung, welcher eine jede Polare genügt, führt zu dem Omegaprocess

$$\Omega f = \frac{1}{mn}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}\right\},$$

wo f eine Form von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung bezw. in den cogredienten Variabelnreihen x_1, x_2 und y_1, y_2 bedeutet. Der Omegaprocess lässt die Invarianteneigenschaft eines Ausdruckes ungeändert (§ 2). Wiederholte Faltung oder wiederholte Anwendung des Omegaprocesses liefert den Process der Ueberschiebung, welchem andererseits auch eine unsymbolische Darstellung und Bedeutung zukommt. Die nähere Untersuchung zeigt, dass jedes symbolische Product sich als Summe von Ueberschiebungen ausdrücken lässt (§ 3). Beispiele für Ueberschiebungen sind die Functionaldeterminante und die Hesse'sche Covariante (§ 4). Sind zwei binäre Formen von gleicher Ordnung vorgelegt

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

$$\varphi = \alpha_0 x_1^n + \binom{n}{1} \alpha_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + \alpha_n x_2^n,$$

so wird eine Invariante derselben „deltairt", indem man auf dieselbe den Aronhold'schen Differentiationsprocess

$$\delta = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial a_n}$$

anwendet. Was die mehrfache Anwendung dieses Processes anbetrifft, so wird auch der Fall behandelt, in welchem die Coefficienten der Form φ Functionen der Coefficienten von f sind (§ 5). Eine Simultaninvariante, welche bei Anwendung des Aronhold'schen Processes identisch verschwindet, ist eine Combinante. Auch hier wird der Fall der Abhängigkeit der beiden Formen f und φ von einander berücksichtigt (§ 6). Eine jede Form von zwei cogredienten Variabelnreihen x_1, x_2 und y_1, y_2 lässt sich auf eine einzige Weise nach Potenzen von (xy) entwickeln, deren Coefficienten Polaren der sogenannten „Elementarcovarianten" sind (§ 7). Der eben erwähnte Process der Reihenentwickelung ist das wichtigste Hülfsmittel für die symbolische Rechnung, und

es folgen daher mannigfache Anwendungen desselben, darunter ein Beweis des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes sowie die Darlegung eines Verfahrens, wie man eine in symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen gegebene Covariante direct in ein symbolisches Product umformen kann (§ 8). Mit Hülfe der Reihenentwickelung wird ferner gezeigt, dass eine jede Invariante und Covariante als Summe von symbolischen Producten darstellbar ist. Für denselben Satz wird noch ein zweiter auf der Anwendung des Omegaprocesses beruhender Beweis gegeben, welcher sich überdies auf Formen von beliebig vielen Variabeln ausdehnen lässt (§ 9). Es folgt die Ableitung der partiellen Differentialgleichungen für Invarianten und Covarianten und die Behandlung des Evectantenprocesses

$$x_2^n \frac{\partial}{\partial a_0} - x_2^{n-1} x_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + (-1)^n x_1^n \frac{\partial}{\partial a_n}.$$

Mit Hülfe dieses Processes lässt sich der Nachweis für die wichtige Thatsache führen, dass ein jedes symbolische Product, welches den wirklichen Wert Null besitzt, in Teile zerlegt werden kann, deren jeder einen Factor von der Gestalt

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x$$

enthält (§ 10).

Der zweite Teil des Bandes beschäftigt sich mit den Formen von der zweiten, dritten und vierten Ordnung. Ein symbolisches Product heisst „reducibel“ entweder, wenn es identisch verschwindet, oder wenn es bereits in das System aufgenommene Formen zu Factoren hat, bezw. sich in symbolische Producte von dieser Eigenschaft überführen lässt. Ein symbolischer Klammerfactor heisst „Reducent“, sobald jedes denselben enthaltende symbolische Product reducibel ist. Nachdem durch Operiren mit diesen Begriffen das volle System von Invarianten und Covarianten für eine quadratische Form, sowie für zwei simultane quadratische Formen aufgestellt ist (§ 11), folgt in gleichem Sinne die Behandlung des Systems dreier und mehr simultaner quadratischer Grundformen (§ 12). Man gelangt ferner zu bemerkenswerten Systemen specieller quadratischer Formen, sobald man den zweiten Ueberschiebungen je zweier verschie-

denen Formen des Systems besondere Bedingungen auferlegt. So giebt es ein System dreier quadratischen Formen, deren drei wechselseitige Ueberschiebungen verschwinden, ferner ein System von vier quadratischen Formen, deren sechs Ueberschiebungen den nämlichen Wert besitzen, und endlich ein System von sechs quadratischen Formen, deren fünfzehn Ueberschiebungen bis auf das Vorzeichen einander gleich sind. Die Producte jener drei, vier und sechs quadratischen Formen liefern bezw. die Oktaeder-, Hexaeder- und Ikosaederform (§ 13). Es folgt die Aufstellung des vollen Systems der Invarianten und Covarianten der kubischen Form sowie der zwischen denselben herrschenden Relationen nebst Anwendungen (§ 14). Nach den nämlichen Principien wird das volle System der biquadratischen Form aufgestellt und untersucht (§ 15). Hieran schliesst sich die Behandlung desjenigen Gebildes, welches durch lineare Combination der biquadratischen Grundform und der Hesse'schen Covariante entsteht (§ 16), sowie die ausführliche Discussion der biquadratischen Gleichung auf Grund invariantentheoretischer Principien (§ 17 und § 18). Die Covariante sechster Ordnung der biquadratischen Grundform besitzt die Eigenschaft, dass ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst identisch verschwindet. Die Untersuchung der allgemeineren Frage nach allen Formen von der letzteren Eigenschaft führt wiederum zu den speciellen Formen des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders (§ 19).

Der dritte Teil endlich enthält als Kern den Gordan'schen Fundamentalsatz von der Endlichkeit des vollen Formensystems und entwickelt in steter Beziehung zu diesem die tiefer liegenden Partien der Invariantentheorie. Es werden zunächst gewisse vorbereitende Lehrsätze vorausgeschickt (§ 20), und hierauf wird der Beweis jenes Fundamentalsatzes mit Hülfe der symbolischen Rechnung durchgeführt, wobei man zugleich die Mittel zur wirklichen Aufstellung des vollen Formensystems an die Hand erhält (§ 21). Die entwickelten Principien werden durch die Berechnung des vollen Formensystems der Form fünfter Ordnung erläutert (§ 22). Es folgt die Ableitung von Relationen zwischen den gefundenen Formen (§ 23). Unter einer typischen Darstel-

lung wird eine solche Darstellung verstanden, bei welcher die Coefficienten Invarianten und die Variabeln Covarianten sind. Diese Darstellung und insbesondere die Darstellung der Form fünfter Ordnung als Summe von drei fünften Potenzen wird eingehend behandelt (§ 24). Die Auflösung der Gleichung fünften Grades wird in einigen Fällen durchgeführt, wo dieselbe in Folge gewisser Invariantenrelationen ohne transcendente Mittel möglich ist (§ 25). Nach den nämlichen Principien wird auch die Grundform sechster Ordnung behandelt (§ 26 und § 27). Sind φ und ψ zwei binäre Formen der gleichen Ordnung, so entsteht die Frage nach den Relationen, welche zwischen den Combinanten

$$(\varphi, \psi)_1, \ (\varphi, \psi)_2, \ (\varphi, \psi)_3, \ \dots$$

statthaben. Diese Frage steht in naher Beziehung zu der Aufgabe, alle diejenigen Formenpaare zu finden, deren Functionaldeterminante $(\varphi, \psi)_1$ eine gegebene Form ist. Diese Aufgabe wird für den Fall gelöst, wo die Formenpaare von der vierten, die gegebene Functionaldeterminante also von der sechsten Ordnung ist (§ 28). Die typische Darstellung der Form sechster Ordnung vermittelst dreier quadratischen Covarianten (§ 29) und die Auflösung specieller Gleichungen sechsten Grades (§ 30) sind diejenigen Probleme, mit deren Behandlung die Theorie der binären Formen sechster Ordnung abschliesst. Es wird nun das simultane System einer quadratischen und kubischen Form (§ 31) und dasjenige zweier kubischen Formen behandelt (§ 32). Insbesondere erscheint die typische Darstellung zweier kubischen Grundformen interessant und ihrer Anwendungen wegen wichtig (§ 33). Was endlich die Theorie der Schwesterformen anbetrifft, so steht im Mittelpunkte derselben der Satz, dass jede Invariante und Covariante einer Grundform f gleich ist einer ganzen Function der Formen $f, (f, f)_{2k}$ und $((f, f)_{2k}, f)_1$, dividirt durch eine Potenz von f (§ 34). Ht.

E. Study. Ueber den Begriff der Invariante algebraischer Formen. Leipz. Ber. 1886. 137-152.

In der vorliegenden Arbeit werden die von Hrn. L. Kronecker

in den „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ (J. für Math. XCII, F. d. M. XIV. 1882. 38) ausgesprochenen Principien für die Theorie der algebraischen Invarianten verwendet. Der Verfasser definirt zunächst die „Invarianteneigenschaft“ als diejenige, vermöge welcher eine Function der Coefficienten algebraischer Formen nach Ausführung einer linearen Transformation von der Substitutionsdeterminante Eins ungeändert bleibt. Es folgt die Definition des „Stammbereiches“. Zum Stammbereiche gehört jede ganze ganzzahlige Function der Coefficienten der Grundform und der adjungirten Parametersysteme, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Form und in den Parametern jedes einzelnen Systems homogen ist. Später wird jedoch der Begriff des Stammbereiches durch Zulassung rationaler Zahlencoefficienten erweitert. Nach diesen Festsetzungen werden die Grundbegriffe der algebraischen Invariantentheorie wie folgt definirt. Eine „ganze Invariante“ heisst jede Function des Stammbereiches, welche die Invarianteneigenschaft besitzt. Eine „ganze Covariante“ heisst jede ganze Invariante der Grundformen und gewisser hinzuzufügender Linearformen. „Rationale Invariante“ heisst jeder Quotient zweier Functionen des Stammbereiches, welcher die Invarianteneigenschaft besitzt. „Rationale Covariante“ heisst jede rationale Invariante der Grundformen und der hinzuzufügenden Linearformen, welche in Bezug auf die Coefficienten der letzteren eine ganze Function ist. In ähnlicher Weise werden die Begriffe „ganze algebraische Invariante“, „ganze algebraische Covariante“, „algebraische Invariante“, „algebraische Covariante“ festgelegt.

Was endlich das Operiren mit jenen Begriffen anbetrifft, so sieht der Verfasser in der sogenannten symbolischen Rechnung dasjenige Werkzeug, welches der Natur und den Grenzen invariantentheoretischer Forschung am vollkommensten gerecht wird. Ht.

H. Burkhardt. Beziehungen zwischen der Invariantentheorie und der Theorie algebraischer Integrale und ihrer Umkehrungen. Diss. München 26 S. 8°.

Sind u_1 und u_2 zwei nicht nur um eine ganze Periode verschiedene Werte des elliptischen Integrals

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

für $x = \infty$, so lassen sich die Invarianten und Covarianten der biquadratischen Form R mit Hülfe der Function $\wp$ ausdrücken. Es ist beispielsweise

$$\frac{H}{R} = -2\wp(2u - u_1 - u_2), \qquad \frac{T}{R^{\frac{3}{2}}} = \wp'(2u - u_1 - u_2).$$

Mit Hülfe dieser Formeln geht die Differentialgleichung für $\wp(2u - u_1 - u_2)$ in die Invariantenrelation

$$T^2 = -\tfrac{1}{2}H^3 - \tfrac{1}{4}iHR^2 - \frac{j}{6}R^3$$

über, und auf letzterem Umstande beruht jene elegante Methode, mittels welcher Hermite die Transformation des allgemeinen elliptischen Integrals erster Gattung auf die Normalform bewerkstelligt hat. Des weiteren zeigt der Verfasser, wie die Theorie der drei quadratischen Factoren der Covariante T sich in vollkommener Uebereinstimmung mit der Theorie der Sigmafunctionen mit Index befindet. Nachdem noch kurz mitgeteilt ist, wie sich der Bruch $\frac{1}{x - x_0}$ nach Potenzen von u mit invarianten Coefficienten entwickeln lässt, wendet sich der Verfasser zur Untersuchung des allgemeineren Integrals

$$u = \int_{y}^{x} R^{-\frac{2}{n}}\, dx,$$

wo R eine ganze rationale Function n^{ten} Grades in Bezug auf die Integrationsvariable x bedeutet. Bei Anwendung der homogenen Schreibweise $\left(x = \frac{x_1}{x_2},\ y = \frac{y_1}{y_2}\right)$ lässt sich unmittelbar erkennen, dass jenes Integral u die Eigenschaft einer Covariante besitzt, in welcher in beiden Integrationsgrenzen $(x_1, x_2;\ y_1, y_2)$ als zwei verschiedene cogrediente Variabelnpaare aufzufassen sind. Was die Umkehrung des Integrals u betrifft, so ergiebt

sich schliesslich das folgende Resultat: Wird für das Integral u eine lineare Function der oberen Grenze, welche beim Zusammenfallen beider Grenzen unendlich gross wird, nach steigenden Potenzen des Integralwertes entwickelt, so sind die Coefficienten Covarianten der binären Form R. Die erste dieser Covarianten ist die Hesse'sche H, die zweite ist deren erste Ueberschiebung über R, nämlich die Covariante T, u. s. f. Nachdem noch die Recursionsformeln aufgestellt sind, welche das allgemeine Bildungsgesetz dieser Covarianten bestimmen, folgt zum Schluss eine ausführliche Behandlung des Falles $n = 3$. Es werden hier die Covarianten der kubischen Form in analoger Weise, wie dies oben für die biquadratische Form geschehen ist, als elliptische Functionen des zugehörigen Integralwertes ausgedrückt.

Ht.

P. A. MacMahon. Observations on the generating functions of the theory of invariants. American J. IX. 189-192.

Bedeutet j die Ordnung einer binären Grundform und A_w die Anzahl ihrer Covarianten vom Grade i und Gewichte w, so ist

$$\frac{(1-x^{j+1})(1-x^{j+2})\dots(1-x^{j+i})}{(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^i)} = \Sigma A_w(x^w - x^{ji+1-w}).$$

Eine einfache Umformung dieser Gleichung führt zu der folgenden Formel

$$\frac{\sin\frac{j+1}{2}\psi \,\sin\frac{j+2}{2}\psi \dots \sin\frac{j+i}{2}\psi}{\sin\psi\,\sin\frac{3\psi}{2}\dots\sin\frac{i\psi}{2}} = \Sigma A_w \sin\frac{ji+1-2w}{2}\psi,$$

aus welcher man erkennt, dass jene Anzahl A_w auch durch das bestimmte Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{j+1}{2}\psi\dots\sin\frac{j+i}{2}\psi}{\sin\psi\dots\sin\frac{i\psi}{2}}\sin\frac{ji+1-2w}{2}\psi.d\psi$$

ausgedrückt wird. Ht.

A. Capelli. Osservazioni sopra le relazioni che possono aver luogo identicamente fra le operazioni invariantive. Napoli Rend. (2) I. 110-115.

Wegen der Begriffe und Bezeichnungen vergleiche man das Referat über eine frühere Arbeit des Verfassers (F. d. M. XVIII. 1886. 92). Die gegenwärtige Note beschäftigt sich mit dem allgemeinen Differentiationssymbol

$$\Delta = F(D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}), \quad \left(D = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \cdots\right),$$

wo k die Zahl der Variabelnreihen und F ein rationales und ganzes Aggregat der elementaren Differentiationsprocesse $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ bedeutet. Das Symbol Δ ist offenbar nicht bloss durch den algebraischen Charakter der ganzen Function F, sondern überdies noch durch die Reihenfolge der Factoren $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ in den einzelnen Gliedern von F bedingt. Wie es sich zunächst zeigt, ist es stets und zwar auf $k!$ verschiedene Arten möglich, aus den k^2 elementaren Operationen ein System von $k+1$ Operationen von der Eigenschaft auszuwählen, dass sich durch dieselben eine jede der obigen elementaren Operationen ausdrücken lässt. Der niedrigste Grad in $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$, auf welchen sich das Aggregat F vermöge identischer Umformungen zurückführen lässt, heisst der Grad des Operationssymboles Δ. Der Verfasser beweist nun folgende Theoreme:

Ist

$$\Delta' = F'(D_1, D_2, \ldots, D_{k^2})$$

ein Operationssymbol, welches sich von Δ nur durch die Reihenfolge der Factoren $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ in den Gliedern des Aggregates F' unterscheidet, so besitzt $\Delta - \Delta'$ stets einen niederen Grad als Δ oder Δ'.

Damit der Grad λ des Aggregates F in Bezug auf $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ sich nicht mehr durch identische Umformungen erniedrigen lasse, ist es notwendig und hinreichend, dass F auch dann vom Grade λ bleibe, wenn man für $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ ebensoviele unabhängige Variable einsetzt und F als algebraische Function derselben betrachtet.

Verschwindet für zwei beliebige Operationssymbole Δ_1 und

Δ_2 das Product $\Delta_1 \Delta_2$, so ist notwendigerweise wenigstens eines der beiden Operationssymbole Δ_1 oder Δ_2 identisch gleich Null.

Zwischen den Potenzen ein und derselben Operation Δ kann niemals eine lineare Identität mit constanten Coefficienten bestehen.

Ht.

A. Capelli. Determinazione delle operazioni invariantive, fra due serie di variabili, permutabili con ogni altra operazione della stessa specie. Napoli Rend. (2) I. 236-242.

Die Arbeit behandelt den einfachsten Fall von nur zwei Variabelnreihen $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$. Derselbe giebt zur Bildung der vier elementaren Differentiationssymbole $D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_{yx}$ Anlass, wo man allgemein

$$D_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \dots + q_n \frac{\partial}{\partial p_n}$$

zu setzen hat. Es ist nun eine schon früher berührte Aufgabe, alle diejenigen zusammengesetzten Operationssymbole

$$\Delta = F(D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_{yx})$$

zu bestimmen, welche mit jedem anderen Symbol derselben Art vertauschbar sind. Indem der Verfasser das Aggregat F in der allgemeinsten Gestalt ansetzt, gelingt es ihm schliesslich, unter Benutzung der in früheren Arbeiten entwickelten Sätze zu zeigen, dass das allgemeinste Symbol von der in Rede stehenden Eigenschaft sich darstellen lässt als ganzes und rationales Aggregat der beiden Symbole

$$K = D_{xx} + D_{yy},$$
$$H = D_{yy} D_{xx} + D_{xx} - D_{yx} D_{xy},$$

denen selber eben jene Eigenschaft der Vertauschbarkeit zukommt.

Ht.

E. d'Ovidio. Sopra due punti della „Theorie der binären algebraischen Formen" del Clebsch. Torino Atti. XII. 427-437.

Der Verfasser beschäftigt sich zunächst mit einem Satze

von Gordan, demzufolge nur die geraden Potenzen der Determinante (xy) auftreten, sobald man eine in den beiden Variabelnreihen x_1, x_2; y_1, y_2 symmetrische Form in der bekannten Weise nach Potenzen jener Determinante entwickelt. Die weiteren Bemerkungen beziehen sich auf die Theorie der biquadratischen Form und verbessern zugleich einige Ungenauigkeiten in dem Lehrbuche von Clebsch. Der Verfasser giebt die genauen Kriterien dafür an, damit eine biquadratische Form einen zweifachen, einen dreifachen Linearfactor oder zwei zweifache Linearfactoren besitze, und beschreibt überdies die gleichzeitigen Ausartungen der beiden Covarianten der Grundform. Man vergleiche jedoch die Habilitationsschrift des Referenten (Math. Ann. XXVIII. 432-437, s. S. 111), wo bei Anwendung eines allgemeinen Principes der innere Zusammenhang jener Thatsachen mehr hervortritt. Ht.

S. GUNDELFINGER. Zur Theorie der binären Formen.
J. für Math. C. 413-424.

Um für ein vorgelegtes System von binären Formen eine in allen Fällen gültige canonische Darstellung zu finden, stützt sich der Verfasser auf ein Lemma, welches die Lehre von den Ueberschiebungen zweier binären Formen auf die Behandlung gewisser linearen Differentialgleichungen zurückführt. Dieses Lemma lautet:

Sind U und V zwei binäre Formen bezw. von der n^{ten} und m^{ten} Ordnung in den homogenen Veränderlichen x und y, so gilt die Identität:

$$\frac{y^x}{x!}(U,V)_x = \binom{n}{x} U \frac{\partial^x V}{\partial x^x} - \binom{n-1}{x-1}\binom{m-x+1}{1}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^{x-1} V}{\partial x^{x-1}} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^x \binom{m}{x}\frac{\partial^x U}{\partial x^x} V.$$

Hieraus ergeben sich ohne Schwierigkeit mit Hülfe bekannter Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen die folgenden Theoreme:

I. Giebt es x linear unabhängige Formen $V_0, V_1, \ldots, V_{x-1}$

von der m^{ten} Ordnung, deren $\varkappa^{\text{te}}$ Ueberschiebungen über eine binäre Form U von der n^{ten} Ordnung identisch verschwinden, so ist jede andere Form V von der n^{ten} Ordnung, deren $\varkappa^{\text{te}}$ Ueberschiebung über U verschwindet, eine lineare Combination der Formen $V_0, V_1, \dots, V_{\varkappa-1}$. Zugleich ist die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{\varkappa-1} V_0}{\partial x^{\varkappa-1}} & \frac{\partial^{\varkappa-1} V_0}{\partial x^{\varkappa-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{\varkappa-1} V_0}{\partial y^{\varkappa-1}} \\ \frac{\partial^{\varkappa-1} V_1}{\partial x^{\varkappa-1}} & \frac{\partial^{\varkappa-1} V_1}{\partial x^{\varkappa-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{\varkappa-1} V_1}{\partial y^{\varkappa-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^{\varkappa-1} V_{\varkappa-1}}{\partial x^{\varkappa-1}} & \frac{\partial^{\varkappa-1} V_{\varkappa-1}}{\partial x^{\varkappa-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{\varkappa-1} V_{\varkappa-1}}{\partial y^{\varkappa-1}} \end{vmatrix}$$

bis auf einen constanten und von Null verschiedenen Factor gleich der $\frac{(m-\varkappa+1)}{n}^{\text{ten}}$ Potenz der Form U.

II. Wenn für $\varkappa$ binäre Formen $V_0, V_1, \dots, V_{\varkappa-1}$ von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung die obige Determinante dem Ausdrucke

$$\varDelta = C(x-ay)^{\lambda}(x-by)^{\mu}(x-cy)^{\nu}\dots$$
$$(\lambda+\mu+\nu+\dots = \varkappa)$$

gleich wird, so lassen sich dieselben in die Gestalt bringen:

$$V_i = \varphi_i(x-ay)^{\varkappa-\lambda+1} + \psi_i(x-by)^{\varkappa-\mu+1} + \cdots,$$
$$(i = 0, 1, \dots, \varkappa-1),$$

wo φ_i, ψ_i, ... passend gewählte Formen bezw. von der Ordnung $\lambda-1$, $\mu-1$, ... sind.

Durch die nämlichen Mittel erledigt der Verfasser im besonderen die Frage nach der canonischen Darstellung einer einzigen Grundform. Betreffs des obigen Lemmas vergleiche man die Dissertation des Referenten (Math. Ann. XXX. 15).

Ht.

P. A. MacMahon. The expression of syzygies among perpetuants by means of partitions. American J. X. 149-168.

Nach einigen auf die Theorie der Ueberschiebungen zweier binären Formen bezüglichen Bemerkungen wendet sich der Ver-

fasser dem Studium der sogenannten nicht-unitären symmetrischen Functionen zu, d. h. solcher ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung, in denen keine Wurzel in der ersten Potenz auftritt. Wie bekannt ist, entspricht einer jeden solchen nicht-unitären Function eine bestimmte Semiinvariante einer binären Form und umgekehrt (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 104), so dass die Theorie der nicht-unitären Functionen auf die Theorie der Semiinvarianten zurückkommt. Diesen Zusammenhang für die Theorie der binären Invarianten, insbesondere für die Theorie der Ueberschiebungen nutzbar zu machen, ist die Absicht der vorliegenden Arbeit. Bedient man sich zur Darstellung der symmetrischen Functionen der Cayley'schen Partitionssymbole, und bezeichnet man mit Θ und Φ irgend zwei nicht-unitäre symmetrische Functionen, so ist der Ausdruck

$$|(\Theta)(\Phi)|^{x} = (\Theta)(\Phi 1^{x}) - (\Theta 1)(\Phi 1^{x-1}) + \cdots + (-1)^{x}(\Theta 1^{x})(\Phi)$$

wiederum eine nicht-unitäre Function und wird vom Verfasser die x^{te} Incorporation von (Θ) und (Φ) genannt. Es wird bewiesen, dass jede Ueberschiebung zweier Covarianten sich als Summe solcher Incorporationen darstellen lässt. Um den nämlichen Gesichtspunkt für die Theorie der Syzygien zu verwerten, drückt der Verfasser die identisch verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} (\Theta) & (\Phi) & (\Psi) \\ (\Theta) & (\Phi) & (\Psi) \\ (\Theta 1) & (\Phi 1) & (\Psi 1) \end{vmatrix}$$

durch Partitionssymbole aus. Zum Schluss werden einige besondere Fälle von Incorporationen berechnet. So ist beispielsweise

$$|(2^{j})(0)|^{m} = \sum_{s=0}^{s \overline{\overline{<}} \frac{m}{2}} (-)^{s} \frac{(j-m+3s)!}{s!(j-m+2s)!} (3^{m-2s} 2^{j-m+3s}).$$

Ht.

D. Hilbert. Ueber einen allgemeinen Gesichtspunkt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete. Math. Ann. XXVIII. 381-446.

Der Verfasser stellt eine systematische Theorie einer ge-

wissen Gattung irrationaler In- und Covarianten auf, welche besonders dazu geeignet scheinen, Ausartungen der Grundformen zu verfolgen, wie sie unter Annahme der Existenz gewisser invarianter Relationen eintreten.

Beschränken wir uns hier auf den einfachsten, vom Verfasser wirklich durchgeführten Fall, so möge eine binäre Grundform von gerader Ordnung $n = 2i$ vorliegen. Irgend eine zweite Form φ von der Ordnung ν geht dann vermöge des Ueberschiebungsprocesses $(f, \varphi)_i$ in eine ebensolche Form ψ über. Es wird nun nach solchen Formen φ gefragt, die sich hierbei bis auf einen constanten Factor λ reproduciren, für die also identisch

$$(f, \varphi)_i = \lambda\varphi$$

gilt. Es giebt ein bestimmtes Formensystem φ $\left(\text{sobald } \nu \geqq \frac{n}{2}\right)$ dieser Art, denn die Vergleichung der Coefficienten lehrt, dass λ von einer Gleichung $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Grades $\varDelta(\lambda) = 0$ abhängt, die unter keinen Umständen identisch verschwinden kann. Die Coefficienten der Potenzen von λ sind Invarianten der Grundform f, sodass λ als Wurzel der Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ eine irrationale Invariante der Grundform f vom Gewichte i darstellt. Für die weitere Discussion macht sich die Unterscheidung von vier Hauptfällen notwendig, je nachdem die beiden Zahlen i und ν gerade resp. ungerade sind. In dreien dieser Fälle besitzt die Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ im allgemeinen $\nu+1$ verschiedene Wurzeln: im letzten dagegen (wenn i gerade, ν ungerade) $\frac{\nu+1}{2}$ Paare gleicher Wurzeln. Zur Bestimmung der zugehörigen Formen φ werde in den ersten drei Fällen die Determinante $\varDelta(\lambda)$ mit den Potenzen zweier Variabeln x, y gerändert, wodurch sie in die Form $\varDelta(x, y, \lambda)$ übergehe. Man hat dann z. B. im ersten Falle für irgend eine der Wurzeln λ von $\varDelta(\lambda) = 0$ und das entsprechende φ

$$\varDelta(x, y, \lambda) = \varphi(x)\,\varphi(y); \quad \varDelta(x, x, \lambda) = \{\varphi(x)\}^2;$$

φ erscheint dann als eine der irrationalen Invariante zugehörige irrationale Covariante der Grundform f.

Im vierten Falle macht sich eine Doppelränderung von $\varDelta(\lambda)$

mit zwei Reihen Veränderlicher x, y; x_1, y_1 notwendig. Während in den drei ersten Fällen jedem λ nur ein φ correspondirt, so gehört im letzten Falle zu jeder der ungleichen Wurzeln λ ein Büschel von Formen φ. In allen vier Fällen aber lassen sich $\nu+1$ linear von einander unabhängige Formen φ bilden, so lange die $\nu+1$ $\left(\text{resp. im vierten Falle die } \frac{\nu+1}{2}\right)$ Werte λ von einander verschieden sind.

Eine erste Anwendung findet das System der irrationalen Covarianten φ, insofern mittels ihrer Ueberschiebungen (über sich selbst) eine Reihe von rationalen Covarianten der Grundform f auf elegante Art dargestellt werden.

Für ein System von $\nu+1$ linear unabhängigen Formen ν^{ter} Ordnung lassen sich die Kriterien dafür aufstellen, dass sie ein Formensystem φ bilden: sie bestehen in der Existenz gewisser linearer Relationen zwischen den quadratischen Invarianten und Covarianten des gegebenen Formensystems.

Die Hauptanwendung des Systems φ beruht darin, ein rationelles Studium der Ausartungen einer Grundform f zu ermöglichen. Zu dem Zwecke ist indessen eine vorgängige eingehende Erörterung der Ausartungen des Systems φ nötig, wie sie eintreten, wenn die bisher als verschieden vorausgesetzten Werte λ teilweise zusammenfallen. Es geschieht dies vermöge einer successive fortschreitenden Ränderung der Determinante $\Delta(\lambda)$ mit Potenzen von Variabeln x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; etc. Fasst man die so geränderte Determinante als Form der genannten Variabelnpaare auf, so besteht für ihre lineare Invariante ein sehr einfaches Bildungsgesetz, ein Hülfssatz, der weiterhin von Wichtigkeit wird.

Behufs Beherrschung aller möglichen Ausartungen des Formensystems φ werden drei Hauptgattungen von Fällen unterschieden, für die je die charakteristischen Kriterien angegeben werden: erstens die Existenz einer vielfachen Wurzel λ von $\Delta(\lambda) = 0$; zweitens der Fall, wenn einer Wurzel λ eine mehrfach lineare Mannigfaltigkeit von Formen φ zugehört; die dritte

Gattung endlich, als allgemeinste, entsteht durch wechselseitige Combination der beiden erstgenannten.

Wie diese Verhältnisse es ermöglichen, die mannigfaltigsten Ausartungen von Grundformen invariantentheoretisch zu verfolgen, wird an den Beispielen $n = 2, 4, 6, 8$ gezeigt; einzelne Ausartungen, wie die Darstellungen der Grundformen als Potenzsummen finden eine allgemein gültige Erledigung. My.

D. Hilbert. Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. Math. Ann. XXX. 15-29.

Diese Darstellungsweise, die fruchtbare Anwendungen besonders auf Grundformen von speciellem Charakter gestattet, stützt sich wesentlich auf die nicht homogene Schreibart der Grundformen. Ist

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

und $f_i = \frac{(n-i)!}{n!} \cdot \frac{d^i f}{dx^i}$, so lautet das zu Grunde gelegte Theorem: „Jede homogene und isobare Function F der f_i von dem Grade g und Gewichte p ist eine Invariante oder Covariante der Form f von der Ordnung $m = ng - 2p$, sobald sie der Differentialgleichung

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3 f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \cdots = 0$$

genügt".

Eine invariante Bildung in gewöhnlicher Darstellung kann sofort in der neuen geschrieben werden: man hat nur die a_i durch die f_i zu ersetzen.

Das Entsprechende gilt für ein System von Grundformen. Die Einführung der bekannten Differentiationsprocesse D, Δ (wo sich die Differentiationen auf die f_i zu erstrecken haben) liefert daher Sätze von ähnlichem Typus, wie sie Clebsch mit Bezug auf die a_i aufgestellt hat.

Eine schöne Anwendung seiner Methode macht der Verfasser

auf einen Beweis für den Fundamentalsatz des Cayley-Sylvester'schen Abzählungscalcüls.

Die Methode des Verfassers empfiehlt sich vornehmlich bei solchen Grundformen, die algebraischen Differentialgleichungen genügen und dadurch charakterisirt sind. Als Beispiel dient die Aufstellung der Invariantenkriterien, die erfüllt sein müssen, damit eine binäre Form in eine (endliche) hypergeometrische Reihe, resp. eine Kugelfunction linear transformirbar sei. My.

D. Hilbert. Ueber die Büschel von binären Formen mit der nämlichen Functionaldeterminante. Leipz. Ber. 112-122.

D. Hilbert. Ueber binäre Formenbüschel mit Combinanteneigenschaften. Math. Ann. XXX. 563-570.

Die Functionaldeterminante f eines allgemeinen Büschels $\varkappa\varphi+\mu\psi$ von binären Formen n^{ter} Ordnung ist eine allgemeine binäre Form der Ordnung $2\nu-2$; nimmt man daher letztere als eine beliebig gegebene Form gerader Ordnung f an, so wird eine endliche Anzahl verschiedener (d. h. linear in einander nicht überführbarer) Formenbüschel existiren, deren Functionaldeterminante mit f zusammenfällt. Diese (zuerst vom Referenten angegebene, weiterhin von Schubert und Stephanos auf anderem Wege bestätigte) Anzahl hat den Wert $\frac{(2\nu-2)!}{(\nu-1)!\,\nu!}$. Der Verfasser unternimmt die wirkliche Aufstellung der Gleichung (des nämlichen Grades), von der die gemeinten Büschel abhängen; seine Methode erscheint dabei als Ausfluss allgemeinerer Betrachtungen, die er in seiner Habilitationsschrift (vgl. das Referat S. 111ff.) entwickelt hat.

Damit zwei Formen φ und ψ von der Ordnung n beziehungsweise zu zwei Büscheln mit der nämlichen Functionaldeterminante f gehören, ist es notwendig und hinreichend, dass eine gewisse Combinantinvariante J_n von φ und ψ verschwindet. Man kann J_n mittels einer Recursionsformel successive berechnen.

Ist nun v eine weitere Form n^{ter} Ordnung, so stellt das

Product $J(\varphi, \psi)\, J(\varphi, v)$ eine neue Simultaninvariante S von f, φ, v dar, mit der Eigenschaft, dass die Form φ des Büschels $\varkappa\varphi + \mu\psi$ nach Anwendung des invarianten Processes S ein Resultat ergiebt, welches, abgesehen von der Proportionalitätsconstanten

$$\lambda = J(\varphi, \psi),$$

von den anderen Formen ψ des Büschels unabhängig ist. Diese Identität

$$S(f, \varphi, v) = \lambda J(\varphi, v)$$

liefert durch Vergleichung der Coefficienten eine Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$, wo $\varDelta(\lambda)$ selbst wieder die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz eines Ausdruckes $\varDelta_1(\lambda)$ vom Grade $N = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}$ ist.

Die Gleichung $\varDelta_1(\lambda) = 0$ löst das gestellte Problem, da einer jeden ihrer Wurzeln einer der gesuchten Formenbüschel entspricht.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit einer nahe verwandten Frage. Der Büschel $\varkappa\varphi + \mu\psi$ n^{ter} Ordnung enthält $2n-2$ Formen mit doppeltem Linearfactor; das Product dieser Linearfactoren ist eben die Functionaldeterminante f des Büschels, während man die jenen Formen entsprechenden $2n-2$ Parameterverhältnisse $\frac{\varkappa}{\mu}$ durch Nullsetzen der Discriminante $\delta(\varkappa, \mu)$ des Büschels findet.

Diese Form $\delta(\varkappa, \mu)$ ist nun gleichfalls eine allgemeine Form der Ordnung $2n-2$, und man kann wiederum δ als eine beliebig gegebene Form gerader Ordnung ansehen und nach den zugehörigen (linear verschiedenen) Büscheln $\varkappa\varphi + \mu\psi$ fragen. Die aufgeworfene Frage findet für die einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4$ ihre Erledigung. Für $n = 4$ kommt man dabei auf die bekannte Aufgabe zurück, eine binäre Form sechster Ordnung als Summe eines Kubus und eines Quadrats darzustellen. Jeder dieser (vierzig) Darstellungen entsprechen dann immer noch drei verschiedene Büschel $\varkappa\varphi + \mu\psi$.

Allgemein wird dagegen der Satz bewiesen, dass die Discriminante der Discriminante δ in drei wesentlich verschiedene Factoren zerfällt.

My.

J. Deruyts. Sur quelques propriétés des semi-invariants. Belg. Bull. XIII. 226-235.

C. Le Paige. Rapport. Belg. Bull. XIII. 164-165.

1) Es sei T eine Semiinvariante, ferner

$$\frac{d}{d\omega_\sigma}=\Sigma_\sigma\left(a_1\frac{d}{da_0}+a_2\frac{d}{da_1}+\cdots+a_{n+1}\frac{d}{da_n}\right),$$

wobei sich die Summe auf eine Gruppe σ von Grössenreihen (a) erstreckt. Dann ist

$$\frac{d}{d\xi}\frac{dT}{d\omega_\sigma}-\frac{d}{d\omega_\sigma}\frac{dT}{d\xi}=T_\sigma.T,$$

wenn T_σ der Gesamtgrad von T bezüglich der Grössenreihen der Gruppe σ ist. 2) Ableitung neuer Semiinvarianten aus einer gegebenen Semiinvariante. Wenn insbesondere S und S' Semiinvarianten desselben Gesamtgrades bezüglich der Gruppe σ sind, so sind die Zähler der symbolischen Ableitungen $\frac{d^p(S':S)}{d\omega_\sigma^p}$ Semiinvarianten. 3) Durch die binäre Substitution

$$x_1=X_1-X_2\frac{\lambda}{S},\quad x_2=X_2,$$

wo S eine Semiinvariante ist und λ der Bedingung $\frac{d\lambda}{d\xi}=S$ genügt, verwandelt sich jede binäre Covariante derart, dass ihre neuen Coefficienten als Zähler neue Invarianten haben.

Mn. (Lp.)

J. Deruyts. Développements sur la théorie des formes binaires. Belg. Bull. XIV. 53-79.

Le Paige. Rapport sur ce mémoire. Belg. Bull. XIV. 4-5.

Wenn eine ganze, homogene und isobare Function k von x_1, x_2 und von den Coefficienten binärer Formen ihrer transformirten K gleich ist, die erhalten wird, wenn man

$$x_1=X_1+\lambda X_2,\ x_2=X_2$$

setzt, so nennt der Verf. sie eine „Semicovariante". Eine Semicovariante genügt einer der partiellen Differentialgleichungen für die Covarianten; der Coefficient der höchsten Potenz von x_1

in k ist eine Semiinvariante. Jede Semicovariante ist eine Summe von Potenzen von x_2, ausgedrückt in der Form

$$k_0 x_1^m + mk_1 x_1^{m-1} x_2 + \tfrac{1}{2} m(m-1) k_2 x_1^{m-2} x_2 + \cdots,$$

wo k_0 eine Semiinvariante und $k_1, k_2, \ldots$ Ausdrücke bedeuten, die sich daraus herleiten. Der Verf. stellt darauf eine Verbindung zwischen den Semicovarianten und der Theorie der Kettenbrüche her und findet die Canonizante Sylvester's durch eine originelle Methode wieder auf. Mn. (Lp.)

M. d'Ocagne. Sur les péninvariants des formes binaires. C. R. CIV. 961-964.

Sind w_p und w_q zwei Semiinvarianten bezw. vom Grade p und q in den Coefficienten der binären Form

$$a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n,$$

und setzt man

$$\varDelta = a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

so ist der Ausdruck

$$q w_q \varDelta w_p - p w_p \varDelta w_q$$

ebenfalls eine Semiinvariante. Ht.

R. Perrin. Sur les péninvariants des formes binaires. C. R. CIV. 1097-1099, 1258-1260.

Die erste Note enthält eine Verallgemeinerung des im vorigen Referate mitgeteilten Satzes von d'Ocagne. Bei Benutzung derselben Bezeichnungsweise wird der Beweis dafür erbracht, dass der Ausdruck

$$[w_p, w_q]_r = p^r w_p \varDelta^r w_q - \binom{r}{1} p^{r-1} q \varDelta w_p \varDelta^{r-1} w_q + \binom{r}{2} p^{r-2} q^2 \varDelta^2 w_p \varDelta^{r-2} w_q - \cdots$$

für jeden Wert von r eine Semiinvariante der Grundform darstellt.

In der zweiten Note werden noch drei weitere Theoreme

mitgeteilt, mit deren Hülfe man aus vorgelegten Semiinvarianten einer oder mehrerer Grundformen neue Semiinvarianten ableiten kann. Ht.

M. d'Ocagne. Sur les péninvariants des formes binaires. C. R. CIV. 1364-1365.

Zu dem im vorigen Referate erwähnten Satze von Perrin fügt der Verfasser folgende Bemerkung hinzu. Werden in dem Ausdrucke $[w_p, w_q]_r$ allgemein für $\Delta^i w_p$ und $\Delta^i w_q$ beziehungsweise die Grössen

$$w_p \Delta^{i+1} w_p - \Delta w_p \Delta^i w_p \quad \text{und} \quad w_q \Delta^{i+1} w_q - \Delta w_q \Delta^i w_q$$

eingesetzt, so ist das Resultat wiederum eine Semiinvariante.

Ht.

M. d'Ocagne. Sur les péninvariants des formes binaires. Brux. S. sc. XI. 314-319.

Neues System der vornehmlichsten Semiinvarianten.

Mn. (Lp.)

E. Pascal. Sopra un metodo per esprimere una forma invariantiva qualunque di una binaria cubica mediante quelle del sistema completo. Napoli Rend. (2) I. 245-251.

Bekanntlich besteht das volle Formensystem einer binären kubischen Grundform aus dieser Grundform selbst, ihrer Hesse'schen, der Functionaldeterminante der letzteren mit jener Grundform und der Discriminante. Jede andere Covariante der Grundform ist eine ganze rationale Function dieser vier invarianten Formen. Der Verfasser stellt nun Recursionsformeln auf, vermöge welcher diese Darstellung sich direct ausführen lässt, wenn die Covariante als symmetrische Function der Wurzelpunkte der Grundform gegeben ist. Ht.

Bolza. On binary sextics with linear transformations into themselves. American J. X. 47-70.

Die Arbeit zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten werden

alle binären Formen sechster Ordnung aufgestellt, welche durch die lineare Transformation

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= px'_1 + qx'_2 \\ x_2 &= p'x'_1 + q'x'_2 \end{aligned}\right\} pq' - p'q = 1$$

bis auf einen Factor ungeändert bleiben; es gelingt dies dadurch, dass sich die Gruppe G dieser Substitutionen als endliche Gruppe erweisen lässt, weshalb sie zu den bekannten sechs endlichen Gruppen linearer Substitutionen gehören muss. Anschliessend an F. Klein's Vorlesungen über das Ikosaeder ergeben sich dann unmittelbar die zu diesen sechs Gruppen gehörigen sechs Binärformen sechster Ordnung.

Indem sich der Verfasser sodann im zweiten Teile die Aufgabe stellt, die notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür zu finden, dass eine gegebene Binärform sechster Ordnung durch lineare Transformation auf eine der gefundenen sechs Formeln reducirt werden könne, findet er, dass dieselben in allen Fällen durch das Verschwinden gewisser Invarianten ausgedrückt sind. Die erwähnten Bedingungen werden von Clebsch (Theorie der binären Formen) für die zu den cyklischen Gruppen $n = 2$ und $n = 5$ gehörigen Formen vollständig gegeben, während Maisano (Sulla sestica binaria. Atti d. R. Accademia d. Lincei 1883-84, cf. F. d. M. XV. 82 und XVI. 94) sie für die übrigen vier Fälle durch das Verschwinden von gewissen Covarianten darstellte.

Diese Frage ist eng verknüpft mit der Feststellung der Bedingungen, unter welchen eine gegebene Binärform sechster Ordnung f durch lineare Transformation in eine andere f' übergeführt werden kann. Im allgemeinen ist notwendig und genügt hiezu, wie Clebsch nachgewiesen hat, die Gleichheit der rationalen absoluten Invarianten. Da aber die von ihm benutzte typische Darstellung nicht in allen Fällen möglich ist, so stellt sich der Verfasser die Frage, ob dieselbe Bedingung auch notwendig und hinreichend ist, wenn die typische Darstellung versagt, und gelangt durch eine eingehende Untersuchung schliesslich zu dem Theorem:

„Zwei binäre Formen sechster Ordnung, welche keinen

drei- oder mehrfachen Linearfactor besitzen, können durch lineare Substitution in einander übergeführt werden, wenn ihre entsprechenden rationalen, absoluten Invarianten gleich sind; diese Gleichheit genügt aber nicht, wenn eine der Formen einen solchen vielfachen Factor besitzt."

Im dritten Abschnitte werden die Relationen zwischen den transcendenten Invarianten, d. h. den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} der Binärformen sechster Ordnung aufgestellt, welche den zwischen den algebraischen Invarianten bestehenden Beziehungen entsprechen. Zunächst wird bewiesen, dass, wenn eine Binärform sechster Ordnung f mit lauter ungleichen Wurzeln lineare Substitutionen in sich besitzt, jeder linearen Substitution S der Variabeln, welche f invariant lässt, eine lineare Transformation s der Perioden entspricht, die das Wertsystem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} invariant lässt, und umgekehrt. Die Gleichungen, welche ausdrücken, dass das System der ϑ-Moduln bei der Periodentransformation s invariant bleibt, stellen dann die gesuchten Relationen zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ dar. Aus dieser Ableitung ergiebt sich, dass diese Beziehungen Kanten und Ecken des bisher noch unbekannten Fundamentalraumes für die hyperelliptischen Modulfunctionen vorstellen.

Die Bestimmung der linearen Periodentransformation wird dadurch bewerkstelligt, dass man die conforme Abbildung des bei der Berechnung der $\tau_{\alpha\beta}$ zu Grunde gelegten Systems von Periodenwegen betrachtet, welche durch die linearen Substitutionen S der Variabeln der Binärform vermittelt werden, und zwar genügt in allen Fällen die Betrachtung einer einzigen Substitution, um alle zwischen den $\tau_{\alpha\beta}$ bestehenden Relationen zu erhalten. Diese Relationen erweisen sich dann auch nicht nur als die notwendigen, sondern auch als die hinreichenden Bedingungen für die Transformirbarkeit der Binärformen. Bm.

Bolza. Ueber Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich. Math. Ann. XXX. 546-552.

Diese Arbeit ist ein Referat über die im vorangehenden Be-

richte von uns besprochene Abhandlung des Verfassers: On binary sextics with linear transformations into themselves. American J. X. 47-70. Bm.

Bolza. Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechster Ordnung durch die Nullwerte der zugehörigen ϑ-Functionen. Gött. N. 418-421.

In dieser Note sind die Resultate der ausführlicheren unter demselben Titel Math. Ann. XXX. 478-495 erschienenen Arbeit des Verfassers angeführt; vergl. das folgende Referat. Bm.

Bolza. Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechster Ordnung durch die Nullwerte der zugehörigen ϑ-Functionen. Math. Ann. XXX. 478-495.

Eine Darstellung der Invarianten der Binärform sechster Ordnung durch die Nullwerte der zugehörigen ϑ-Functionen wurde bisher nur für Doppelverhältnisse (von Rosenhain), für gewisse irrationale Invarianten, welche mit den vierten Potenzen der geraden ϑ-Nullwerte proportional sind, und für die Discriminante (von Thomae) geleistet. Da nun aber die Kenntnis der Ausdrücke aller Invarianten in den Nullwerten der zugehörigen ϑ-Functionen für die Theorie der hyperelliptischen Modulfunctionen von Wert ist, so hat es der Verfasser unternommen, dieselben zu berechnen. (Die Resultate wurden bereits in den Göttinger N. 418-421 mitgeteilt; vergl. das vorangehende Referat.)

Zu diesem Zwecke wird zuerst für die Binärform sechster Ordnung mittels einer linearen Transformation die transcendente Normalform

$$f(x_1, x_2) = \prod_i (\vartheta_i^{(1)} y_1 + \vartheta_i^{(2)} y_2) = F(y_1, y_2)$$

hergestellt, in welcher

$$\vartheta_i^{(\alpha)} = \left(\partial \frac{\vartheta_i(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})}{\partial v_\alpha}\right)_{v_1=0,\, v_2=0}$$

ist, und das Product sich auf die sechs ungeraden ϑ-Functionen erstreckt.

An dieser Form werden nun die einzelnen Invarianten berechnet, wobei sich das nach Analogie der elliptischen Functionen unerwartete Resultat ergiebt: Nicht alle ganzen rationalen Invarianten lassen sich als ganze Functionen der ϑ-Nullwerte ausdrücken, sondern die Invariante zweiten Grades A (nach Salmon's Bezeichnung in seinen Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformation) ist eine gebrochene Function der ϑ-Nullwerte, und erst das Product von A in die Discriminante wird eine ganze Function.

Ferner lässt sich von den Invarianten vierten und sechsten Grades nur je eine als ganze Function darstellen, nämlich

$$B^* = A^2 - 100B, \quad C^* = A^3 - 300AB + 250C.$$

Es sind dies gerade diejenigen beiden Invarianten, deren Verschwinden zusammen mit dem der Discriminante die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, dass f eine dreifache Wurzel besitzt. Wie A so verhält sich auch die schiefe Invariante E, und erst das Product $\varepsilon(\sqrt{\varDelta})^3$ ist durch eine ganze Function der ϑ-Nullwerte ausdrückbar. Daraus folgt, dass es angemessener ist, statt der Fundamentalinvarianten von Salmon und Clebsch die Invarianten

$$A, B^*, C^*, \varDelta, E$$

zu Grunde zu legen.

Der Verfasser bemerkt noch, dass der erwähnte Umstand, dass A sich nicht als ganze Function ausdrücken lässt, einen principiellen Unterschied zwischen den elliptischen und hyperelliptischen Functionen ausdrückt, der seinen Grund darin hat, dass bei den hyperelliptischen Modulfunctionen auch im Innern des Bereiches der Moduln $\tau_{\alpha\beta}$, für welchen die ϑ-Reihen convergiren, solche Stellen vorhanden sind, an denen die Discriminante verschwindet, nämlich die Stelle $\tau_{12} = 0$ und die mit ihr äquivalenten. Bm.

J. Bärthlein. Zur Theorie der associirten Formen. Pr. Nürnberg, auch als Diss. Erlangen. 32 S. 8°.

Bedeutet f eine binäre Form der n^{ten} Ordnung, so führt die Anwendung der linearen Substitution

$$y_1 = x_1\xi_1 - \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2,$$
$$y_2 = x_2\xi_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_2$$

zu der Identität

$$f(y_1, y_2) = f_0\xi_1^n + \binom{n}{2}f_2\xi_1^{n-2}\xi_2^2 + \binom{n}{3}f_3\xi_1^{n-3}\xi_2^3 + \cdots + f_n\xi_2^n.$$

Die Coefficienten $f_2, f_3, \ldots, f_n$ bilden ein associirtes Formensystem, d. h. ein System von Covarianten, durch welche jede andere Invariante und Covariante der Grundform f sich rational in der Weise darstellen lässt, dass im Nenner des Ausdruckes nur eine Potenz von f auftritt. Die Covarianten $f_2, f_3, \ldots, f_n$ ihrerseits können als ganze und rationale Functionen der einfacheren Covarianten

$$\varphi_{2\nu} = (f, f)_{2\nu}, \quad \psi_{2\nu+1} = (\varphi_{2\nu}, f)_1$$

ausgedrückt werden, und die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung dieser rationalen Ausdrücke. Die Covarianten $f_2, f_3, \ldots, f_n$ lassen sich, wie der Verfasser zunächst zeigt, abgesehen von gewissen Factoren f, in der Weise aus Producten der Formen φ und ψ zusammensetzen, dass das Gewicht jedes solchen Productes, d. h. die Summe der Gewichte seiner einzelnen Factoren, stets denselben Wert hat. Hierauf wird ein System von Formeln entwickelt, welches successive die bezüglichen numerischen Coefficienten in jenem Ausdrucke zu berechnen gestattet. Mit Hülfe dieser Formeln wird beispielsweise der Coefficient desjenigen Gliedes ausgerechnet, welches die Formen φ oder die Formen ψ allein in vorgeschriebener Weise enthält. (Vgl P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie Bd. II. §. 34.) Ht.

E. Pascal. Sopra un nuovo simbolo nella teoria delle forme binarie a due serie di variabili. Napoli Rend. (2) I. 200-207.

Die Arbeit unternimmt die Einführung eines neuen Opera-

tionssymboles, welches der Verfasser mit $\binom{a}{b}$ bezeichnet, und dessen Anwendung auf einen symbolischen Ausdruck $a_x^n b_y^m$ darauf hinausläuft, in irgend zwei Factoren a_x und b_y die beiden Symbole a und b mit einander zu vertauschen. Versteht man unter $\binom{a}{y}$ das entsprechend definirte Operationssymbol, so nimmt die fundamentale Relation

$$a_x b_y - a_y b_x = (xy)(ab)$$

die einfache Gestalt an:

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{y} = 1.$$

Es werden nun die Beziehungen dieser neuen Operation zu den bekannten symbolischen Processen der binären Invariantentheorie untersucht. Insbesondere wird das neue Operationssymbol in jene Formel eingeführt, vermöge welcher Gordan eine Form von zwei Variabelnreihen nach Potenzen der identischen Covariante (xy) entwickelt hat. Zum Schlusse gelangt der Verfasser zu einer anderen Formel, welche ebenfalls nach Potenzen der identischen Covariante fortschreitet, ohne jedoch die Eigenschaft zu besitzen, dass die Coefficienten der Entwickelung die Polaren von Formen mit einer Variabelnreihe sind. Ht.

M. Pasch. Bemerkung über Formen mit zwei Reihen Veränderlicher. Schlömilch Z. XXXII. 255.

Bedeutet f eine Form r^{ten} Grades von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und zugleich ϱ^{ten} Grades von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von der Beschaffenheit, dass mit f auch

$$f(x_1 + \lambda y_1,\ x_2 + \lambda y_2,\ \ldots,\ x_n + \lambda y_n,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

identisch für alle Werte von λ verschwindet, so ist $r \leqq \varrho$ und f darstellbar als Form $(\varrho - r)^{\text{ten}}$ Grades der y und r^{ten} Grades der Verbindungen $u_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$. Ht.

A. Voss. Ueber bilineare Formen. Gött. N. 424-433.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit der Frage nach

der allgemeinsten linearen Substitution, mittels deren eine bilineare Form in sich selbst eigentlich transformirt wird. Es ist von principieller Wichtigkeit, dass das zur Aufstellung dieser Substitution vom Verfasser eingeschlagene Verfahren lediglich die Auflösung von linearen Gleichungen verlangt und sich überdies mit den bekannten Untersuchungen über quadratische Formen in vollkommener Analogie befindet. Hieran schliesst sich ein allgemeingültiger Beweis eines zuerst von Stieltjes ausgesprochenen Satzes, demzufolge die Determinante $|a_{ik}+b_{ik}|$, wo a_{ik} und b_{ik} die Coefficienten zweier orthogonalen Substitutionen von der Determinante $+1$ sind, nur dann verschwinden kann, wenn zugleich alle ihre ersten Unterdeterminanten Null sind. Ht.

G. Battaglini. Sulle forme binarie bilineari. Batt. G. XXV. 281-297.

Zunächst werden die Invarianten einer einzigen binären bilinearen Form aufgestellt und wird ihr Verschwinden gedeutet. Geometrisch hat man es dabei mit den Eigenschaften einer projectivischen Beziehung auf einem Träger erster Stufe zu thun. Daran schliesst sich die Betrachtung von Büscheln, Netzen und Gebüschen bilinearer Formen. Indem diese Formen als homogene Variable in einem linearen Gebiete erster, zweiter, dritter Stufe aufgefasst werden, erhält man bekannte Sätze aus der projectivischen Geometrie auf einem Kegelschnitt und einer Fläche zweiten Grades. Die Methode ist die symbolische. My.

Poincaré. Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique. Journ. de Math. (4) III. 405-464.

Siehe Abschnitt VII.

Gross. Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind. Diss. Tübingen.

Siehe Abschnitt IX.

Krauss. Die geometrische Deutung einer gewissen Invariante bei ebenen Collineationen. Math. Ann. XXIX. 234-238.

Siehe Abschnitt IX.

E. Padova. Sulle espressioni invariabili. Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 14 S.

Ist $\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ eine quadratische Differentialform, welche, wenn man die n Variabeln x_r durch n neue Variabeln x'_r ersetzt, in $\bar{\varphi} = \sum_{rs} \bar{a}_{rs} dx'_r dx'_s$ übergeht, und verwandeln sich die Functionen U, V, ... durch dieselbe Substitution in $\bar{U}$, $\bar{V}$,..., so wird als ein „unveränderlicher Ausdruck" jede Function der a_{rs}, U, V, ... und der Abgeleiteten von ihnen bezeichnet, welche durch die betrachtete Substitution in dieselbe Function der $\bar{a}_{rs}$, $\bar{U}$, $\bar{V}$, ... und von deren Abgeleiteten übergeht.

Die Aufstellung von unveränderlichen Ausdrücken bildet den Hauptzweck der vorliegenden Untersuchung. Im Gegensatz zu der rein algebraischen, von Herrn Ricci (Brioschi Ann. (2) XII. 135-68; F. d. M. XVI. 1884. 230-31) angewandten Methode verfährt Herr Padova wie folgt. Ist $\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ das Quadrat des Bogenelementes in einem n-dimensionalen Raume, F ein in diesem Raume existirender unveränderlicher Ausdruck, und kann das Integral $\int F dS_{n-1}$, welches auf die (($n-1$)-dimensionale) Begrenzung eines n-dimensionalen Bereiches ausgedehnt ist, in ein über diesen Bereich selbst erstrecktes Integral $\int F_1 dS_n$ verwandelt werden, so ist F_1 ebenfalls ein unveränderlicher Ausdruck. Dieser Satz bietet das Mittel dar, aus bekannten unveränderlichen Ausdrücken neue Ausdrücke von derselben Beschaffenheit herzuleiten. Die Abhandlung beschäftigt sich ferner mit der Berechnung der symmetrischen Functionen der Hauptkrümmungsradien einer in einem ($n+1$)-dimensionalen ebenen Raume liegenden n-dimensionalen Fläche, sowie mit der Ermittelung

einiger Formeln, die bekannten Formeln der mathematischen Physik gewissermassen analog sind. Vi.

G. Ricci. Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale. Rom. Acc. L. Rend. (4) III. 15-18.

Ist die quadratische Differentialform:

$$\varphi^2 = \sum_{rs}^{n} a_{rs} dx_r dx_s$$

vorhanden, deren Discriminante durch a bezeichnet werden möge, und ist U eine beliebige Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so sind $U_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}$ offenbar die Coefficienten einer zu φ^2 covarianten Differentialform. Dieselbe Eigenschaft kommt denjenigen Functionen mit je $p+1$ Indices $U_{r_1 r_2 \ldots r_{p+1}}$ zu, welche durch die recurrirende Gleichung:

$$U_{r_1 r_2 \ldots r_{p+1}} = \frac{\partial U_{r_1 r_2 \ldots r_p}}{\partial x_{r_{p+1}}} - \sum_{qs} c_{qs} \sum_{h=1}^{p} a_{r_h r_{p+1}, s} U_{r_1 r_2 \ldots r_{h-1} r_{h+1} \ldots r_n}$$

definirt werden, wo:

$$c_{rs} = \frac{\partial \lg a}{\partial a_{rs}}, \qquad 2a_{rs,i} = \frac{\partial a_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{si}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}.$$

Diese Functionen $U_{r_1 r_2 \ldots}$ können füglich als „in Bezug auf die Form φ^2 covariante Ableitungen" bezeichnet werden. Die Indices der covarianten Ableitungen sind im allgemeinen nur bis zur zweiten Ordnung commutativ; sie sind aber unbedingt vertauschbar bei jeder Ordnung der Ableitung, wenn φ das Linienelement einer ebenen Mannigfaltigkeit darstellt, wenn nämlich die Relationen stattfinden:

$$0 = \frac{\partial a_{r_h r_p, u}}{\partial x_{r_{p-1}}} - \frac{\partial a_{r_h r_{p-1}, u}}{\partial x_{r_p}} + \sum_{s,t} c_{st} \{a_{r_h r_{p-1}, s} a_{u r_p, t} - a_{r_h r_p, s} a_{u r_{p-1}, t}\}.$$

Vi.

P. Gordan. Ueber die Bildung der Discriminante einer ternären Form. München. Ber. XVII.

Man bilde die Covariante

$\psi = (abc)^2 \Sigma a_y^\varkappa b_y^\lambda c_y^\mu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}$ $(\varkappa+\lambda+\mu = n-2)$.

Gleich Null gesetzt, stellt dieselbe für beliebige Werte von y_1, y_2, y_3 stets Curven der $(2n-4)^{ten}$ Ordnung dar, welche durch einen etwaigen Doppelpunkt der Curve $F \equiv a_x^n \equiv b_x^n \equiv c_x^n = 0$ hindurchgehen. Die gleiche Eigenschaft besitzen ferner die Curven

$$\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \varphi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \varphi_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ beliebige ternäre Formen von der $(n-3)^{ten}$ Ordnung sind. Auf diese Weise erhält der Verfasser $(n-1)(2n-3)$ Gleichungen, aus denen sich die in gleicher Zahl vorhandenen Potenzen und Producte von x_1, x_2, x_3 eliminiren lassen. Die entstehende Determinante stellt die Discriminante der ternären Form F dar. Ht.

E. Study. Ueber ternäre lineare Formen. Math. Ann. XXX. 120-126.

Zwischen den simultanen Invarianten der ternären linearen Formen

$$(U^{(\varkappa)}X) = U_1^{(\varkappa)}X_1 + U_2^{(\varkappa)}X_2 + U_3^{(\varkappa)}X_3,$$
$$(X^{(\varkappa)}U) = X_1^{(\varkappa)}U_1 + X_2^{(\varkappa)}U_2 + X_3^{(\varkappa)}U_3$$
$$(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

bestehen die folgenden Identitäten:

$$(X^{(\varkappa)}X^{(\lambda)}X^{(\mu)})(UX^{(\nu)}) - (X^{(\lambda)}X^{(\mu)}X^{(\nu)})(UX^{(\varkappa)})$$
$$+ (X^{(\mu)}X^{(\nu)}X^{(\varkappa)})(UX^{(\lambda)}) - (X^{(\nu)}X^{(\varkappa)}X^{(\lambda)})(UX^{(\mu)}) = 0,$$
$$(U^{(\varkappa)}U^{(\lambda)}U^{(\mu)})(U^{(\nu)}X) - (U^{(\lambda)}U^{(\mu)}U^{(\nu)})(U^{(\varkappa)}X)$$
$$+ (U^{(\mu)}U^{(\nu)}U^{(\varkappa)})(U^{(\lambda)}X) - (U^{(\nu)}U^{(\varkappa)}U^{(\lambda)})(U^{(\mu)}X) = 0,$$
$$(X^{(\varkappa)}X^{(\lambda)}X^{(\mu)})(X^{(\nu)}YZ) - (X^{(\lambda)}X^{(\mu)}X^{(\nu)})(X^{(\varkappa)}YZ)$$
$$+ (X^{(\mu)}X^{(\nu)}X^{(\varkappa)})(X^{(\lambda)}YZ) - (X^{(\nu)}X^{(\varkappa)}X^{(\lambda)})(X^{(\mu)}YZ) = 0,$$
$$(U^{(\varkappa)}U^{(\lambda)}U^{(\mu)})(U^{(\nu)}VW) - (U^{(\lambda)}U^{(\mu)}U^{(\nu)})(U^{(\varkappa)}VW)$$
$$+ (U^{(\mu)}U^{(\nu)}U^{(\varkappa)})(U^{(\lambda)}VW) - (U^{(\nu)}U^{(\varkappa)}U^{(\lambda)})(U^{(\mu)}VW) = 0,$$
$$(U^{(\varkappa)}U^{(\lambda)}U^{(\mu)})(X^{(\varkappa)}X^{(\lambda)}X^{(\mu)}) - |(U^{(\varkappa)}X^{(\varkappa)})(U^{(\lambda)}X^{(\lambda)})(U^{(\mu)}X^{(\mu)})| = 0;$$
$$(\varkappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots);$$

dabei sind die Variabeln X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3 einander cogredient; die Variabeln U_1, U_2, U_3; V_1, V_2, V_3; W_1, W_2, W_3

zu jenen contragredient. Die vorliegende Arbeit führt den Nachweis, dass überhaupt jede Identität zwischen den simultanen Invarianten aus den angegebenen Identitäten dadurch erhalten wird, dass man dieselben mit ganzen Functionen der Invarianten multiplicirt und dann addirt. Damit ist ein von P. Gordan für binäre Formen bewiesener Satz auf das Gebiet der ternären Formen ausgedehnt, und es folgt unmittelbar, dass auch im ternären Formengebiete die Rechnung mit Symbolen zur Aufstellung aller Relationen zwischen den Invarianten eines beliebigen Grundformensystems ausreicht. Ht.

F. Brioschi. Studi sulle forme ternarie. Annali di Mat. (2) XV. 235-252.

Für eine ternäre Grundform f der n^{ten} Ordnung wird eine Reihe von Covarianten aufgestellt. Zunächst giebt die Hesse'sche Form h Anlass zur Bildung der Covarianten

$$k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & h_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & h_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & h_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \varkappa = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & f_1 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & f_2 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$t = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

wobei die unteren Indices 1, 2, 3 eine Differentiation beziehungsweise nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 bedeuten. Setzt man dann

$$u_1 = \frac{\partial k}{\partial h_1}, \quad u_2 = \frac{\partial k}{\partial h_2}, \quad u_3 = \frac{\partial k}{\partial h_3},$$
$$w_1 = \frac{\partial \varkappa}{\partial f_1}, \quad w_2 = \frac{\partial \varkappa}{\partial f_2}, \quad w_3 = \frac{\partial \varkappa}{\partial f_3},$$

so ergiebt sich unter anderem die Covariante

$$P = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Die weiteren umfangreichen Rechnungen bezwecken die Ableitung von Relationen zwischen den betrachteten Covarianten.

Beispielsweise findet der Verfasser eine bemerkenswerte Formel für das Quadrat der Covariante P. Die Anwendung auf den Fall der ternären kubischen Grundform bestätigt bekannte Resultate.

Ht.

F. Mertens. Ueber invariante Gebilde ternärer Formen. Wien. Ber. XCV. 942-991.

Zunächst giebt der Verfasser eine systematische Behandlung gewisser Operationen (Polarbildungen und anderer Differentiationsprocesse), welche für die Invariantentheorie der ternären Formen von Wichtigkeit sind. Die zwischen jenen Operationen herrschenden Beziehungen werden folgestreng entwickelt und zum Beweise des Gordan'schen Satzes benutzt, nach welchem eine jede ganze bihomogene Function der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 einem Ausdrucke von der Gestalt

$$w_0+(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)w_1+(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2w_2+\dots$$

gleich wird, wo w_0, w_1, w_2, ... bihomogene, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial u_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2\partial u_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_3\partial u_3}=0$$

genügende Functionen derselben Variabeln sind. Man erhält nun die Invarianten eines Systems von ternären Grundformen, wenn man die letzteren linear transformirt, etwa mittels der Substitutionsformeln

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1x'_1+\beta_1x'_2+\gamma_1x'_3,\\ x_2 &= \alpha_2x'_1+\beta_2x'_2+\gamma_2x'_3,\\ x_3 &= \alpha_3x'_1+\beta_3x'_2+\gamma_3x'_3,\end{aligned}$$

dann aus den Coefficienten der transformirten Grundformen eine beliebige ganze Function bildet und auf diese das Differentiationssymbol

$$\frac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\beta_2\partial\gamma_3}-\frac{\partial^3}{\partial\alpha_1\partial\beta_3\partial\gamma_2}+\frac{\partial^3}{\partial\alpha_2\partial\beta_3\partial\gamma_1}-\frac{\partial^3}{\partial\alpha_2\partial\beta_1\partial\gamma_3}+\frac{\partial^3}{\partial\alpha_3\partial\beta_1\partial\gamma_2}-\frac{\partial^3}{\partial\alpha_3\partial\beta_2\partial\gamma_1}$$

so oft anwendet, bis der entstehende Ausdruck von den Substitutionscoefficienten frei wird. Um auch die Contravarianten

und Zwischenformen des Grundformensystems zu erhalten, bedarf das erwähnte Verfahren noch einer nahe liegenden Erweiterung, welche der Verfasser gleichzeitig ableitet.

Für den Fall eines Systems von linearen Grundformen ergiebt sich durch das obige Verfahren ohne Schwierigkeit der volle Bestand der invarianten Gebilde, wie derselbe bereits durch Clebsch gefunden worden ist. Es wird ferner der folgende Satz bewiesen: Wenn für jede von zwei ternären Grundformen ein endliches System von invarianten Gebilden existirt, durch welche jedes andere invariante Gebilde ganz und rational ausdrückbar ist, dann existirt auch stets für beide Grundformen zugleich ein System von simultanen Invarianten von derselben Beschaffenheit. Dieser Satz wird schliesslich an dem Beispiele zweier quadratischen Formen durch wirkliche Aufstellung des vollen Bestandes ihrer invarianten Gebilde bestätigt. Ht.

R. Perrin. Sur la théorie des formes algébriques à p variables. C. R. CIV. 108-111, 220-223, 280-283.

Ordnet man eine Form von der m^{ten} Ordnung in den p Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_p$ nach den Potenzen einer Variabeln, wie folgt, an:

$$u = ax_1^m + \binom{m}{1} u_1 x_1^{m-1} + \binom{m}{2} u_2 x_1^{m-2} + \cdots + u_m$$

und bildet dann nach den bekannten Gesetzen der binären Formentheorie die Quellen der associirten Covarianten von u, nämlich

$$\begin{aligned} v_2 &= a\, u_2 - u_1^2, \\ v_3 &= a^2 u_3 - 3au_1u_2 + 2u_1^3, \\ v_4 &= a\, u_4 - 4u_1u_3 + 3u_2^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so erhält man ein System von $m-1$ Formen der $p-1$ Variabeln $x_2, x_3, \ldots, x_p$. Jede Simultaninvariante dieses Formensystems ist eine Invariante der Form u oder der Coefficient der höchsten Potenz von x_1 in einer Covariante der Form u. Umgekehrt wird jede Invariante oder Semiinvariante der Form u nach Multiplication mit einer geeigneten Potenz von a eine ganze

Function von a und den Invarianten des Formensystems $v_2, v_3, \ldots, v_m$.

In der ersten Note wird dieser Satz bewiesen und auf ein System mehrerer Grundformen von p Veränderlichen ausgedehnt.

In der zweiten Note weist der Verfasser darauf hin, wie man mit Hülfe seines Satzes eine untere Grenze für die Zahl der unabhängigen Invarianten und Covarianten einer Form von p Veränderlichen angeben kann, wenn man die Zahl der unabhängigen Invarianten und Covarianten für Formensysteme von $p-1$ Variabeln bereits kennt. Das Verfahren wird an einem einfachen Beispiele erläutert.

Die dritte Note unterwirft die Contravarianten und Zwischenformen einer analogen Behandlung. Man gelangt zu diesen Bildungen, wenn man dem Formensystem $v_2, v_3, \ldots, v_m$ noch die lineare Form

$$v_1 = (a\xi_2 - b_1\xi_1)x_2 + (a\xi_3 - b_2\xi_1)x_3 + \cdots + (a\xi_p - b_{p-1}\xi_1)x_p$$

hinzufügt, wo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ die zu $x_1, x_2, \ldots, x_p$ contragredienten Variabeln und $b_1, b_2, \ldots, b_{p-1}$ die Coefficienten von $x_2, x_3, \ldots, x_p$ in der Form u_1 bedeuten. Ht.

R. Perrin. Sur le système de quatre formes binaires simultanées (deux linéaires et deux quadratiques). S. M. F. Bull. XV. 45-61.

Durch Anwendung eines bekannten, von Clebsch herrührenden und hier vom Verfasser neu begründeten Verfahrens wird das volle System der simultanen Invarianten und Covarianten zweier binären quadratischen und zweier binären linearen Formen aufgestellt. Ueberdies leitet der Verfasser mit Hülfe früher von ihm entwickelter Principien eine grosse Zahl von Relationen (Syzygien) zwischen den invarianten Formen des Systems ab. Insbesondere werden zwischen den 13 Invarianten jener Grundformen 20 unabhängige Relationen aufgeführt. Ht.

B. Igel. Zur Theorie der Combinanten und zur Theorie der Jerrard'schen Transformation. Wien. Abh. LIII. 155-184.

Bildet man aus den p binären Formen n^{ter} Ordnung

$$f_i = a_{i0} x_1^n + a_{i1} x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_{in} x_2^n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

die Determinante ihrer $(p-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen, so heisse diese p-reihige Determinante die Hauptcombinante von $f_1, f_2, \ldots, f_p$. Dieselbe wird bis auf eine numerische Proportionalitätsconstante der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{p0} & x_2^p & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{p1} & x_2^{p-1} x_1 & x_2^p \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & \cdots & a_{pp} & x_1^p & x_2 x_1^{p-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

gleich. Ferner gilt für die beiden aus $f_1, \ldots, f_{p-1}$ und aus $f_1, \ldots, f_{p-2}, f_p$ gebildeten Hauptcombinanten der Satz, dass die Jacobi'sche Determinante dieser beiden Hauptcombinanten gleich dem Producte aus den Hauptcombinanten von $f_1, \ldots, f_p$ und $f_1, \ldots, f_{p-2}$ wird. Hieran schliesst sich der Beweis eines zuerst von A. Brill bewiesenen Satzes, demzufolge die Discriminante der Hauptcombinante von $f_1, \ldots, f_p$ in zwei Factoren zerfällt. Auch werden die Grade dieser beiden Factoren in den Coefficienten der beiden Grundformen bestimmt, und der Verfasser findet dabei die von A. Brill ohne Beweis gegebenen Gradzahlen bestätigt.

Eine besondere Behandlung erfährt der Fall von vier Formen 4ter Ordnung f_1, f_2, f_3, f_4. Der Verfasser stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, dass zwei vorgelegte Formen 6ter Ordnung betrachtet werden können als die Hauptcombinanten von f_1, f_2, f_3 und f_1, f_2, f_4. Nachdem sich der Verfasser insbesondere mit der Hauptcombinante von n Formen n^{ter} Ordnung bei ungeradem n beschäftigt hat, werden als Beispiel diejenigen drei Formen 3ter Ordnung behandelt, welche die zweiten Ableitungen einer Form 5ter Ordnung sind. Damit kommt der Verfasser zu dem zweiten Teile seiner Untersuchungen, welcher von der Transformation der Gleichung 5ten Grades auf die Jerrard'sche Form handelt. Es wird hervorgehoben, dass eine solche nicht-lineare Transformation auch

dann existirt, wenn die Invariante C der Form 5ter Ordnung verschwindet, obgleich in diesem Falle die von Hermite herrührende invariantentheoretische Methode versagt. Im Anschluss an die im ersten Teil der Arbeit entwickelten Principien deutet der Verfasser einen neuen Weg an, auf welchem ihm eine allgemeingültige Durchführung der Jerrard'schen Transformation möglich erscheint. Ht.

P. Mansion. Définition d'un invariant. Mess. XVI. 127-129.

Note mit Bezug auf die Bemerkungen von Hrn. Elliott (F. d. M. XVIII. 1886. 91); Hr. Mansion skizzirt kurz einen Gedankengang, der zum gewünschten Resultate führt. Lp.

Kluyver. Sur un système d'invariants communs à deux coniques. Franç. Ass. (Toulouse.) 132-141.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

L. Schendel. Zur Theorie der Elimination. Schlömilch Z. XXXII. 46-55.

L. Schendel. Zerlegung einer Form m^{ter} Ordnung und n^{ten} Grades in ihre linearen Factoren. Schlömilch Z. XXXII. 83-90.

Der Verfasser bedient sich einer besonderen combinatorischen Symbolik und gelangt mittels derselben zu einer formalen Herstellung der Resultanten für gegebene Formensysteme. Es folgen einige Anwendungen und specielle Fälle. Ht.

E. Pascal. Sulla risultante di un' ennica e di una cubica. Batt. G. XXV. 257-280.

Der Verfasser berechnet die Resultante einer binären Form

n^{ter} Ordnung und einer binären kubischen Form mittels eines Verfahrens, wie es Clebsch für die Resultante einer Form n^{ter} Ordnung und einer quadratischen Form benutzt hat. Die Resultante der beiden binären Formen

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n, \qquad \varphi = p_x q_x r_x = \alpha_x^3 = \beta_x^3 = \cdots$$

wird nämlich

$$R = (ap)^n (bq)^n (cr)^n = \tfrac{1}{6}(\mu_1^n + \mu_2^n + \mu_3^n + \mu_4^n + \mu_5^n + \mu_6^n),$$

wo

$$\mu_1 = (ap)(bq)(cr), \quad \mu_4 = (cp)(bq)(ar),$$
$$\mu_2 = (ap)(cq)(br), \quad \mu_5 = (cp)(aq)(br),$$
$$\mu_3 = (bp)(cq)(ar), \quad \mu_6 = (bp)(aq)(cr)$$

gesetzt ist. Nach bekannten Formeln ist die Summe der n^{ten} Potenzen der sechs Grössen μ eine ganze und rationale Function der sechs elementarsymmetrischen Functionen jener μ. Die Durchführung der Rechnung erfordert die Unterscheidung zwischen einer geraden und einer ungeraden Ordnung n. Werden endlich in den sechs elementarsymmetrischen Functionen der μ statt der Symbole p, q, r die Symbole α, β, ... der kubischen Form eingeführt, so ergiebt sich der allgemeine symbolische Ausdruck für die gesuchte Resultante. Es folgt die Anwendung der Methode auf die speciellen Fälle $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$.

Ht.

G. Frobenius. Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. J. für Math. CI. 273-299.

Zwei Elemente A, B heissen äquivalent mod. $\mathfrak{G}$, wenn das Element AB^{-1} in der Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalten ist, und dann äquivalent mod. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, wenn $A = G.B.H$ ist, wo G, H Elemente bedeuten, die zu $\mathfrak{G}$ resp. $\mathfrak{H}$ gehören. Ist $\mathfrak{S}$ eine gegebene Gruppe, so heisst die Gesamtheit derjenigen Elemente von $\mathfrak{S}$, welche einem bestimmten unter ihnen mod. $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ congruent sind, eine „Klasse congruenter Elemente". Es ergiebt sich hierfür: Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{S}$, durchläuft das Element S alle Elemente von $\mathfrak{S}$, G die von $\mathfrak{G}$, H die von $\mathfrak{H}$, so ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $GSH = S$ gleich ghm,

wo g, h die Ordnungen von G resp. H und m die Anzahl der (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) incongruenten Elemente von $\mathfrak{S}$ ist. Aus diesem Resultate folgt eine Reihe sehr wichtiger Sätze, so vor allem die Sylow'schen Theoreme. Eine andere Betrachtung führt zu den folgenden schönen Sätzen: Ist eine Substitutionengruppe der Ordnung h in m transitive Gruppen zerlegbar, so ist die Summe der Anzahl der Symbole, die in den einzelnen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, gleich hm. Damit eine Gruppe transitiv sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Summe der Anzahl der Symbole, die in den einzelnen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, der Ordnung der Gruppe gleich ist. Auch für die Anzahl h_λ derjenigen Substitutionen von $\mathfrak{H}$, die genau λ Symbole ungeändert lassen, wird die Bestimmung geliefert; dabei tritt der Begriff „conjugirter Elementensysteme" auf; so gehören z. B. die Elemententripel $(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$; $(x_\delta, x_\varepsilon, x_\vartheta)$ einem conjugirten Systeme an, wenn die ersten drei Elemente durch eine Substitution von $\mathfrak{H}$ gleichzeitig in die letzten drei umgewandelt werden können.

Von den weiteren Resultaten mögen noch die folgenden angeführt werden: Die Anzahl der Substitutionen n^{ten} Grades, die kein Symbol ungeändert lassen, ist gleich derjenigen ganzen Zahl, die am wenigsten von $\frac{n!}{e}$ abweicht. Wenn diejenigen Substitutionen einer zweifach transitiven Gruppe $\mathfrak{H}$, welche ein bestimmtes Symbol ungeändert lassen, eine primitive Gruppe bilden, und wenn diese Untergruppe nicht von den Potenzen einer cyklischen Substitution gebildet wird, deren Ordnung gleich 2 oder eine Primzahl von der Form $2^\nu - 1$ ist, so kann keine von $\mathfrak{H}$ verschiedene Gruppe mit $\mathfrak{H}$ in allen Substitutionen übereinstimmen, die jedes Symbol versetzen. No.

E. Netto. Ein Theorem über die conjugirten Werte einer rationalen Function von n Veränderlichen.

J. für Math. C. 436-441.

In Verallgemeinerung eines von Hrn. Kronecker aufgestellten Satzes wirft der Verfasser die Frage auf: „Wie wirken die Per-

mutationen von n Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf die Umstellungen der conjugirten Werte einer rationalen Function der Variabeln x?" Bezeichnet φ_1 die rationale Function, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ ihre conjugirten Werte, so giebt es, wie zunächst bewiesen wird, „stets Substitutionen unter den x, durch welche alle conjugirten Werte der Function φ_1 sich unter einander vertauschen, und zwar giebt es deren mindestens $\varrho-1$." Dabei werden die x als Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades $f(x)=0$ gedacht, und somit die ϱ Werte φ als Wurzeln einer rationalen Gleichung ϱ^{ten} Grades $g(\varphi)=0$; diese ϱ Werte φ mögen eine Gruppe G bilden. Ueber die Natur der zur Gleichung $g(\varphi)=0$ gehörigen Gattung entscheidet sodann der Satz: „Diese Gattung ist dann und nur dann eine eigentliche, wenn G eine Maximal-Untergruppe der symmetrischen Gruppe der x ist". Hierauf gestützt leitet der Verfasser als Antwort auf die aufgeworfene Frage das Ergebnis ab: „Die Gruppe der Gleichung $g(\varphi)=0$ enthält für $\varrho>n>7$ keine Circularsubstitution, deren Ordnung die Potenz einer Primzahl wäre". My.

E. Netto. Ueber orthogonale Substitutionen. Acta Math. IX. 295-300

Es handelt sich um die von Hrn. Stieltjes für $n=2, 3$ zuvor gelöste Aufgabe: „Bedeuten $a_{\varkappa\lambda}$, $A_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n$) die Coefficienten zweier orthogonalen Substitutionen von der Determinante $+1$, und hat $|a_{\varkappa\lambda}+A_{\varkappa\lambda}|$ den Wert Null, wann verschwinden dann gleichzeitig alle Subdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung der letzteren Determinante?"

Mit Hülfe einer von Cayley gegebenen Darstellung der Coefficienten einer orthogonalen Substitution gelangt der Verfasser zu dem Resultat: „In der Determinante

$$|a_{\varkappa\lambda}+\delta_\varkappa A_{\varkappa\lambda}|$$

kann $\delta_\varkappa=+1$ oder $=-1$ so gewählt werden, dass sie bei geradem n nur verschwinden kann, wenn alle Elemente, bei ungeradem n, wenn alle Subdeterminanten zweiter Ordnung gleich Null sind". My.

R. Lipschitz. Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen. Acta Math. X. 137-144.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Substitution von n Veränderlichen nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution liefert, lässt sich so aussprechen, dass ihre charakteristische Determinante als Wurzeln nur μ^{te} Einheitswurzeln besitzt, und dass ihre sämtlichen Elementarteiler von der ersten Ordnung seien. Diesen Satz beweist Herr Lipschitz durch sehr einfache Betrachtungen, bei denen von der Zerlegung der rationalen ganzen Functionen einer Veränderlichen in Factoren ersten Grades kein Gebrauch gemacht wird. No.

F. Rudio. Ueber primitive Gruppen. J. für Math. CII. 1-8.

Herr Rudio beweist den Jordan'schen Satz: „Enthält eine primitive Gruppe G des Grades n eine solche g des Grades ν, so ist erstere mindestens $(n-\nu+1)$-fach transitiv“, indem er von wichtigen Kriterien über die Primitivität von Gruppen ausgeht, und insbesondere zeigt, dass unter den obigen Voraussetzungen in G eine zu g ähnliche Gruppe mit ν vorgeschriebenen Elementen vorkommt. No.

A. Bochert. Ueber die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten. Math. Ann. XXIX. 27-49.

Es werden durch verhältnismässig einfache Betrachtungen neue Sätze abgeleitet zwischen der geringsten Zahl von Elementen, welche eine nicht identische Substitution der Gruppe umsetzt, und der Grenze für die Primitivität derselben; und dadurch finden die von Herrn C. Jordan begonnenen schönen Untersuchungen ihre Fortsetzung. No.

F. Giudice. Un teorema sulle sostituzioni. Palermo Rend. I. 222-223.

Sind die Gruppen G, H der Ordnungen μ, ν unter einander vertauschbar, hat L, die Gruppe der gemeinsamen Substitutionen von G, H, die Ordnung λ, dann ist die Ordnung der kleinsten Gruppe, welche G, H umschliesst, $\mu\nu/\lambda$. No.

H. Maschke. Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln. Gött N 421-424, Math. Ann. XXX. 496-515.

Die Gruppe wurde von Herrn F. Klein zuerst aus der Liniengeometrie abgeleitet; später fand derselbe, dass die Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte 2 sich nach derselben Gruppe linear substituiren. Die in den Punktcoordinaten $z_1, \dots, z_4$ geschriebene Gruppe ist von der Ordnung $H = 7.640$; sie hat eine ausgezeichnete Untergruppe der Ordnung $\frac{1}{2}N$ und eine in dieser ausgezeichnete der Ordnung 64. Die letztere lässt das Tetraeder $z_1 z_2 z_3 z_4 = 0$ fest und enthält nur vierte Einheitswurzeln. Für sie bilden die Formen

$$z_1^4 + \cdots + z_4^4 = \varphi, \quad z_1^2 z_2^2 + z_3^2 z_4^2 = \psi_2, \quad z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_4^2 = \psi_3,$$
$$z_1^2 z_4^2 + z_2^2 z_3^2 = \psi_4, \quad z_1 z_2 z_3 z_4 = \chi$$

das volle System invarianter Formen. Aus diesen Grössen werden sechs andere Formen Φ_i zusammengesetzt, welche sich bei Anwendung der Gruppe von der Ordnung $\frac{1}{2}N$ nur unter einander vertauschen (ohne zutretenden Factor), und aus den symmetrischen Functionen derselben lässt sich dann das volle Formensystem der Gruppe ableiten. Am Schlusse der Arbeit in den Math. Ann. wird der Zusammenhang der Gruppe mit den Borchardt'schen Moduln behandelt. No.

E. Picard. Remarque sur les groupes linéaires d'ordre fini à trois variables. S. M. F. Bull. XV. 152-156.

Für eine jede lineare Gruppe endlicher Ordnung von zwei Variabeln besteht eine binäre quadratische Form mit conjugirten Unbestimmten, welche durch die Substitutionen jener Gruppe in sich selbst transformirt wird. In gleicher Weise besteht eine

quadratische ternäre Form mit conjugirten Unbestimmten, welche sich unter dem Einflusse der Substitutionen einer linearen Gruppe endlicher Ordnung von drei Variabeln reproducirt; in einem Falle tritt als Ausnahme ein Fall von einfacherer Natur auf. Der Beweis wird an den von Herrn C. Jordan aufgeführten Typen geführt. No.

Ed. Weyr. Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices. Prag. Ber. 616-618.

Ist ein System complexer Grössen mit n Haupteinheiten gegeben, für welches associative Multiplication herrscht, so kann man dasselbe realisiren, indem man für die n Einheiten passend gewählte Matrizen (lineare Substitutionen) einführt. No.

A. Aubry. Solution d'une question d'algèbre. Nouv. Ann. (3) VI. 175-190.

Es giebt sechs Substitutionen von der Form $y = lx^2 + mx + p$, welche $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ in sich selbst umwandeln; für diese werden die Coefficienten l, m, p bestimmt. Daran schliessen sich Bemerkungen über die gleiche Aufgabe für Gleichungen n^{ten} Grades. No.

L. Autonne. Sur les substitutions crémoniennes quadratiques. C. R. CIV. 767-770.

L. Autonne. Sur les groupes quadratiques crémoniens. C. R. CIV. 1422-1425.

L. Autonne. Sur les groupes cubiques Cremona d'ordre fini. C. R. CV. 267-270.

In der ersten dieser Noten setzt der Herr Verfasser seine früheren Untersuchungen fort (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 108, 655), indem er von den früheren speciellen Untersuchungen zu den allgemeinen Fragen übergeht und zunächst die explicite Form jeder Cremona'schen Substitution aufstellt. In der zweiten Note wird

untersucht, in welcher Art solche Substitutionen sich zusammensetzen, um Gruppen zu bilden.

Die dritte Note endlich beschäftigt sich mit den kubischen Gruppen, und zwar mit der allgemeinen Theorie derjenigen, deren Substitutionen sämtlich denselben einen Doppelpunkt oder Pol besitzen. Für die Substitutionen dieser Gruppen werden die verschiedenen Typen aufgestellt. No.

L. Autonne. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact. Journ. de Math. (4) III. 63-85.

Von den Untersuchungen über quadratische und kubische Cremona-Gruppen geht der Verfasser zu gleichen Untersuchungen im Gebiete derjenigen birationalen Substitutionen über, in welche zwei Reihen von 3 Variabeln, Punkt- und Linien-Coordinaten eingehen. Unter diesen sind die Contact-Substitutionen die wichtigsten, d. h. diejenigen, für welche der Contact der Figuren eine invariante Eigenschaft ist. Damit

$$|x_i, u_i \quad \varphi_i(x, u), \psi_i(x, u)| \qquad (i = 1, 2, 3)$$

eine Contact-Substitution sei, müssen die sechs Grössen

$$\Sigma \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \lambda u_k, \quad \Sigma \psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} - \mu x_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

zu gleicher Zeit mit $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ verschwinden, wenn λ, μ passend gewählt sind. Ist φ oder ψ in einer der Variabeln linear, so giebt es nur zwei Formen für die Substitution, die monistische

$$|x_i, u_i \quad \varphi_i(x), \sum_k u_k \Phi_{ik}(x)|$$

und die dualistische

$$|x_i, u_i \quad \varphi_i(u), \sum_k x_i \Phi_{ik}(u)|.$$

Jede lineare Contact-Gruppe lässt sich aus der einfachen dualistischen Substitution $|x_i, u_i \quad u_i, x_i|$ und einer lediglich aus monistischen Substitutionen gebildeten Gruppe zusammensetzen.

No.

O. Biermann. Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variabeln. Wien. Ber. XCV. 523-548.

Die von Hrn. F. Klein erledigte Aufgabe, die Ecken der regelmässigen Körper (im gewöhnlichen Raume) durch lineare Substitutionen einer complexen Variabeln auf alle möglichen Weisen in sich selbst überzuführen, wird hier auf Räume von n Dimensionen ausgedehnt und für den Fall $n = 5$ ausgeführt. Zunächst wird gezeigt, wie man zu sämtlichen regelmässigen Körpern eines solchen Raumes gelangt. Dass diese Aufgabe bereits von Hrn. Schlegel vollständig gelöst war, scheint dem Verfasser entgangen zu sein. Sodann wird untersucht, welcher Art die linearen Substitutionen sein müssen, die eine Drehung charakterisiren, und daraufhin eine Coordinatentabelle für die Ecken der regelmässigen Punktgruppen im Raume von fünf Dimensionen entworfen. Die in Betracht kommenden linearen Substitutionen führen zwei complexe Variabeln z_1, z_2 in zwei andere z'_1, z'_2 über; auf diese Substitutionen waren die Herren Jordan und Klein bereits von anderer Seite her gelangt. My.

A. Schönflies. Ueber Gruppen von Bewegungen I, II. Math. Ann. XXVIII. 319-342 und XXIX. 50-80.

Der Herr Verfasser bestimmt in diesen beiden Abhandlungen *alle* Gruppen von Bewegungen des euklidischen Raumes. Er will dabei die gruppentheoretische Seite der Aufgabe mehr zu ihrem Rechte kommen lassen, als dies Herr Sohncke bei seiner Bestimmung aller derartigen Gruppen gethan hat. Für Herrn Sohncke waren nämlich nicht die Gruppen an und für sich der Endzweck, sondern die ihnen entsprechenden regulären Gebietseinteilungen des Raumes, welche in der Theorie der Krystallstructur eine grosse Rolle spielen.

Herr Schönflies beschränkt sich auf solche Gruppen von Bewegungen, aus deren erzeugenden Bewegungen keine beliebig

kleinen Ortsveränderungen abgeleitet werden können, also schliesst er die continuirlichen Gruppen von Bewegungen aus.

Unter den Gruppen von Bewegungen sind zu unterscheiden: erstens solche Gruppen, welche bloss aus Translationen bestehen, zweitens solche, welche nur Rotationen um einen Punkt enthalten, und drittens alle übrigen, „die allgemeinen Bewegungsgruppen“, wie sie Herr Schönflies nennt.

Die beiden ersten Arten von Bewegungsgruppen setzt Herr Schönflies als bekannt voraus und beschäftigt sich daher bloss mit der Bestimmung der allgemeinen Bewegungsgruppen. Dabei benutzt er den Satz, dass es zu jeder allgemeinen Bewegungsgruppe eine isomorphe Gruppe von Rotationen um einen Punkt giebt, und dass diese isomorphe Rotationsgruppe nach Klein's Benennung entweder die cyklische Gruppe oder die Vierergruppe oder die Diedergruppe oder die Tetraeder- oder die Oktaedergruppe ist. Aus diesem Satze folgt, dass jede allgemeine Bewegungsgruppe eine invariante Untergruppe enthält, in welcher dieselben Translationen vorkommen wie in der betreffenden allgemeinen Bewegungsgruppe, und aus welcher diese letztere durch Multiplication mit einer geeigneten Bewegung hergestellt werden kann.

Auf die einzelnen Bewegungsgruppen kann dieser Bericht nicht eingehen; nur soviel sei bemerkt, dass Herr Schönflies seiner Untersuchung eine beträchtliche Anzahl von Figuren beigefügt hat, welche die Beschaffenheit der verschiedenen Bewegungsgruppen veranschaulichen. El.

W. Bermbach. Ueber n-mal nacheinander angewandte Substitutionen, durch welche drei Quadrate in sich selbst transformirt werden. Diss. Bonn. 50 S. 8°.

L. Maurer. Zur Theorie der linearen Substitutionen. Diss. Strassburg. 26 S. 4°.

Th. Muir. The theory of determinants in the historical order of its development. Part I (continued). Determinants in general (1799-1812). Edinb. Proc. XIV. 452-518.

Fortsetzung einer früheren Arbeit unter demselben Titel (s. F. d. M. XVIII. 1886. 110-111). Die Werke, auf welche sich die Besprechung erstreckt, sind von Bézout (1779), Hindenburg (1784), Rothe (1800), Gauss (1801), Monge (1809), Binet (drei Schriften 1811, 11, 12), De Prasse (1811), Cauchy (1812).

Cly. (Lp.)

A. Sickenberger. Die Determinanten in genetischer Behandlung zur Einführung für Anfänger. Zweiter Abdruck. München. Ackermann. VIII u. 80 S.

Eingehende Behandlung der Determinanten zweiten und dritten Grades auf Grund der zugehörigen linearen Gleichungssysteme. Uebertragung der gewonnenen Grundeigenschaften auf Determinanten n^{ten} Grades. Vgl. F. d. M. XVIII. 112—113.

No.

A. H. Anglin. Théorèmes sur les déterminants. S. M. F. Bull. XV. 120-129.

Herr Anglin zeigt, dass die Determinante

$$|a_x^{i_\lambda}|, \qquad (\lambda, x = 1, 2, \ldots, n)$$

durch $|a_x^\lambda|$ für beliebige i_λ teilbar ist; er bestimmt den Quotienten als eine Determinante, deren Glieder von der Form h_n sind. Hier bezeichnet h_n die Summe der homogenen Producte (und Potenzen) des Grades n der Grössen a_x. No.

W. Schrader. Beiträge zur Theorie der Determinanten. Neue Sätze und eine neue Bezeichnung. Halle. H. W. Schmidt. VI u. 155 S.

Die von Herrn Schrader eingeführte neue Bezeichnung hat den Vorzug, die Constitution der zu betrachtenden Subdeterminanten deutlich vor Augen zu führen, ohne dabei den Begriff

der partiellen Differentiirung zu benutzen. Das Buch liefert eine grosse Menge teils ganz neuer, teils wenig bekannter Sätze, besonders über die aus Subdeterminanten gebildeten Determinanten, über Nulldeterminanten, über schiefe (hemisymmetrische) und über solche Determinanten, welche die Form $|a_x^\lambda|$ besitzen; (vgl. auch das Referat über die vorstehende Arbeit). Ohne direct als Einführungsbuch gelten zu können, wird das Werk als Uebungsbuch zu empfehlen sein und jedenfalls anregend wirken.

No.

L. Schendel. Die r-stufige Determinante n^{ten} Grades. Schlömilch Z. XXXII. 185-187.

Es wird mit Hülfe combinatorischer Producte eine kurze Veranschaulichung dieser Determinante als Product von n Determinanten und als Gebilde im Raume von $(n+1)$ Dimensionen gegeben.

No.

G. Bergnera. Sopra i determinanti che si possono formare cogli stessi n^2 elementi. Batt. G. XXV. 220-231.

Unter den $n^2!$ möglichen Determinanten derselben n^2 Elemente können nur $(n^2!):(n!)^2$ ihrem absoluten Werte nach verschieden sein, und zwischen den übrigen müssen noch Relationen stattfinden. Zwei derartige werden abgeleitet. Die erste lautet: Bildet man die $n!$ Determinanten, welche durch Vertauschungen der Elemente einer Zeile untereinander entstehen, so ist das Product der Differenzen aus einer beliebig gewählten und denjenigen andern, deren Elementenumstellung aus ihr durch nur eine Transposition geliefert wird, constant.

No.

L. Schendel. Der Kronecker'sche Subdeterminantensatz. Schlömilch Z. XXXII. 119-120.

Herr Schendel leitet mit Hülfe seiner combinatorischen Bezeichnungen den Kronecker'schen Subdeterminantensatz her und wendet denselben auf die Darstellung von bilinearen und quadratischen Formen an.

No.

B. SPORER. Ein Satz über Determinanten. Böklen Mitt. II. 103-106.

B. SPORER. Einiges über gewisse Determinanten. Böklen Mitt. II. 106-107.

Der Satz der ersten Note bezieht sich auf die Determinanten von der Form $|\varphi_\lambda(\alpha_\mu)|$; die zweite Note zeigt, dass

$$|x+\lambda| = \frac{n+1}{2}\left(-n\right)^{n-1}$$

sei. No.

R. MARCOLONGO. Generalizzazione di un teorema sui determinanti. Batt. G. XXV. 298-302.

Der Wert der Borchardt'schen Determinante $|\varphi_h(t_k)|$, bei der

$$\varphi_h(t) = t^{h-1} + a_h t^{h-2} + b_h t^{h-3} + \cdots$$

ist, wird auf einfachem Wege abgeleitet; dann wird die Determinante berechnet, deren h^{te} Zeile lautet

$$\varphi_h(t_1), \quad \ldots, \quad \varphi_h(t_n), \quad \varphi_h'(t_1), \quad \ldots, \quad \varphi_h'(t_n).$$

No.

F. MERTENS. Ueber windschiefe Determinanten. Wien. Ber. XCVI. 1245-1255.

Eine windschiefe Determinante ($a_{ii} = 0$, $a_{ik} = -a_{ki}$) gerader Ordnung ist bekanntlich ein Quadrat der Elemente a_{ik}; es wird die directe Darstellung der Determinante als Quadrat geliefert.

No.

P. DRUDE. Ein Satz aus der Determinantentheorie. Gött. Nachr. 118-122.

Herr Voigt hat in Wied. Ann. XVI. 314 den Satz aufgestellt, dass Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & \ldots \\ b & -a & d & -c & \ldots \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \ldots \\ b_1 & -a_1 & d_1 & -c_1 & \ldots \end{vmatrix}$$

sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen lassen. Dieser Satz wird hier durch Zurückgehen auf lineare Gleichungen bewiesen,

und zugleich wird die Darstellung der Argumente jener Quadrate gegeben. (Vgl. d. folgende Referat.) No.

R. Baltzer. Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie. Gött. N. 389-391.

In einfachster Weise werden die Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & \dots \\ -b & a & -d & c & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

berechnet und als Summe zweier Quadrate dargestellt. (Vgl. d. vorige Referat.) No.

G. Fouret. Remarque sur certains déterminants numériques. S. M. F. Bull. XV. 146-147.

Herr Fouret teilt mit, dass eine von ihm angegebene und berechnete numerische Determinante ein Specialfall einer von Herrn Catalan früher gegebenen sei. No.

A. Buchheim. On a theorem of Prof. Klein's relating to symmetric matrices. Mess. (2) XVII. 79.

Der Satz, dass, wenn a eine reelle symmetrische Matrize ist, die Wurzeln von $|a-\lambda| = 0$ alle reell sind, ist alt und bekannt. Hr. Klein hat eine Verallgemeinerung von ihm in seiner Abhandlung über die allgemeinste Transformation von Linien-Coordinaten in folgender Form gegeben: Es seien a, b zwei reelle symmetrische Matrizen; wenn dann bei der Reduction von bx^2 (d. i. der Form $\Sigma b_{ij}\, x_i\, x_j$) auf eine Summe reeller Quadrate der Ueberschuss der Anzahl von Gliedern mit einem Vorzeichen über die mit dem anderen r ist, so hat die Gleichung $|a-xb| = 0$ wenigstens r reelle Wurzeln. In der vorliegenden Note giebt Hr. Buchheim einen Beweis dieses Satzes mittels einer Methode,

welche er in einem früheren Aufsatze beim Beweise des besonderen Falles $b = 1$ gebraucht hatte. Glr. (Lp.)

W. KRETKOWSKI. Ueber algebraische Division. Museum Lemberg. (Polnisch.)

Es werden die Coefficienten des bei einer Division zweier Polynome sich ergebenden Quotienten und des Restes sehr einfach in Determinantenform dargestellt. Dn.

A. H. ANGLIN. On the summation of certain series of alternants. Edinb. Proc. XIV. 194-203.

Formeln für die Summen von Determinanten, die aus einer gegebenen rechtwinkligen Matrize nach einem vorgeschriebenen Verfahren gebildet werden. Cly. (Lp.)

TH. MUIR. On the quotient of a simple alternant by the difference-product of the variables. Edinb. Proc. XIV. 433.

Der Verfasser knüpft an seine der Edinburgher Königlichen Gesellschaft im Jahre 1879 mitgeteilten Untersuchungen an, ferner an ein von Garbieri 1878 im Giornale di Matematica veröffentliches Theorem und an neuere Aufsätze von Hrn. Woolsey Johnson im American Journ. of Math. sowie im Quart. Journ. und führt einige Ergebnisse in Tabellenform vor. Die Theorie ergiebt sich aus einem Jacobi'schen Ausdrucke für eine aus den Termen $\frac{1}{a-x}$ bestehende Determinante, in der die a für die verschiedenen Zeilen, die x für die verschiedenen Colonnen gesonderte Werte erhalten. Cly. (Lp.)

TH. MUIR. On a class of alternating functions. Edinb. Trans. XXXIII. 309-312.

Der Verfasser geht von einem gewissen Ausdrucke aus, von welchem man leicht sieht, dass er in Bezug auf a, b, c, d und auch in Bezug auf α, β, γ, δ symmetrisch ist, und er bemerkt,

dass derselbe gleichermassen, obgleich es nicht ebenso augenscheinlich ist, eine alternirende Function bezüglich der Vertauschung

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

ist; wenn nämlich a mit α, b mit β, c mit γ und d mit δ vertauscht werden, dann wird die Function nicht an Grösse geändert, sondern wechselt dadurch nur das Zeichen. Dieser Ausdruck ist, wie Hr. Muir aussagt, nur einer aus einer grossen Klasse, auf welche er die Aufmerksamkeit zu lenken wünscht.

Cly. (Lp.)

A. Voss. Zur Theorie der Hesse'schen Determinante. Math. Ann. XXX. 418-424.

Es wird diejenige Covariante untersucht, durch deren Verschwinden für eine beliebige Form f ein parabolischer Punkt von f zugleich ein solcher von H wird. Ist $H = 0$, dann gelingt es, diese Form in sehr übersichtlicher Weise darzustellen, während die allgemeine Bildung der Hesse'schen Determinante von von H weitläufig zu sein scheint. Aus der gegebenen Entwickelung folgt: Ein gemeinsamer Punkt x der Curven $H = 0$, $f = 0$ ist für beide ein Inflexionspunkt, wenn für denselben auch $U = 0$ ist, d. h. wenn die Polare $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades des zugeordneten Punktes y der Steiner'schen Curve in x selbst einen Wendepunkt hat.

No.

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of question 8242. Ed. Times XLVII. 53-55.

Folgender Satz ist von Hrn. Sylvester zum Beweise vorgeschlagen und wird von Hrn. Sharp bewiesen. Unter einem Simplicissimum der Ordnung n verstehe man eine Figur im n-dehnigen Raume, welche durch die unbegrenzte Fortsetzung der Reihe entsteht, von der ein lineares Segment, ein Dreieck, eine Pyramide die drei ersten Glieder sind. Ist dann jede Kante gleich der Einheit, so ist der quadrirte Inhalt $\frac{(n+1)}{2^n.(1.2.3\dots n)^2}$; hieraus folgt, dass die Cayley'sche persymmetrische Invertebraten-Determinante der quadrirten Kanten, durch welche solch ein

quadrirter Inhalt dargestellt wird, im Verhältnisse der negativen Einheit zu $(-2)^n(1.2.3\ldots n)^2$ vermindert werden muss, damit sie seinen absoluten Wert darstelle. Z. B. die Determinante

$$\begin{vmatrix} . & (ab)^2 & (ac)^2 & 1 \\ (ba)^2 & . & (bc)^2 & 1 \\ (ca)^2 & (cb)^2 & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . \end{vmatrix}$$

stellt den quadrirten Inhalt eines Dreiecks dar, dessen Kanten (ab), (ac), (bc) sind; doch ist der Wert mit $-\frac{1}{16}$ zu multipliciren.

Lp.

A. Capelli. Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polaroperationen.

Math. Ann. XXIX. 331-338.

Bezeichnet Δ die Determinante der n Variabelnreihen

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n, \\ . & . & . & . \\ u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, \end{matrix}$$

und bildet man aus den letzteren die Cayley'sche Operation

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

so ist bekannt, dass die Operation $\Delta\Omega$ sich durch ein Aggregat der n^2 elementaren Polaroperationen

$$D_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots + q_n \frac{\partial}{\partial p_n} \qquad (p, q = x, y, \ldots, u)$$

ersetzen lässt. Die gegenwärtige Arbeit führt den Nachweis, dass $\Delta\Omega =$

$$\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & \ldots & D_{xu} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & \ldots & D_{yu} \\ . & . & \ldots & . \\ D_{ux} & D_{uy} & \ldots & n-1+D_{uu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1+D_{uu} & \ldots & D_{yu} & D_{xu} \\ . & \ldots & . & . \\ D_{uy} & \ldots & 1+D_{yy} & D_{xy} \\ D_{ux} & \ldots & D_{yx} & D_{xx} \end{vmatrix}$$

wird.

Ht.

R. Lachlan. On certain operators in connection with symmetric functions. Lond. M. S. Proc. XVIII. 39-48.

Es sei

$$(1-\alpha_1 x)\dots(1-\alpha_n x) = 1-p_1 x+p_2 x^2-\dots\mp p_n x^n$$
$$= 1:(1+h_1 x+h_2 x^2+\dots),$$

und mit σ, π, ϑ mögen die Operatoren bezeichnet werden, welche durch

$$\sigma = -\Sigma\frac{\partial}{\partial\frac{1}{\alpha}} = s_1-\pi = \vartheta-s_1$$

definirt sind. Dann folgt aus der Anwendung derselben

$$\sigma p_r = s_1 p_r-(r+1)p_{r+1},$$
$$\sigma h_r = (r+1)h_{r+1}-s_1 h_r,$$
$$\sigma^m p_x = m!\, S^x_{m+x},$$

wobei S^x_{m+x} die Summe der symmetrischen Functionen des Gewichts $m+x$ bezeichnet, in deren jede genau x Wurzeln α eingehen. Es folgt leicht weiter die MacMahon'sche Ausdehnung der Newton'schen Formeln:

$$\frac{(r+m)!}{r!m!}p_{r+m} = p_r S^m_m - p_{r-1}S^m_{m+1}+\dots\pm S^m_{m+r}.$$

Weiter sei angeführt

$$\pi^r(2p_2) = (r+2)!p_{r+2},$$

und daraus ergiebt sich

$$(r+1)(r+2)p_{r+2}+\Sigma(-1)^x(x+1)p_{r-x}s_{x+2}$$
$$= \Sigma(-1)^\gamma(\alpha+1)(\beta+1)p_{\alpha+1}p_{\beta-1}h_\gamma$$

und ähnliche Formeln mehr. No.

P. A. MacMahon. Properties of a complete table of symmetric functions. American J. X. 42-46.

Ordnet man die Tafeln der symmetrischen Functionen so an, wie es von Herrn Durfee geschehen ist (vgl. F. d. M. XIV. 114), so besitzen gewisse aus ihnen herausgeschnittene und als Determinanten betrachtete kleinere Quadrate Eigenschaften, von denen eine angegeben wird. No.

W. P. DURFEE. Symmetric functions of the 14^{ic}.
American J. IX. 278-296.

Fortsetzung der Tafeln der symmetrischen Functionen, über welche F. d. M. XIV. 1882. 114 und XVI. 1884. 130 referirt worden ist. Ht.

H. LAURENT. Sur le calcul d'une fonction symétrique.
Nouv. Ann. (3) VI. 416-419.

Ist $\varphi(x)=0$ eine Gleichung m^{ten} Grades, $\psi(x)$ eine Function μ^{ten} Grades und ψ_1 der Rest der Division von ψ durch φ; ψ_2 der Rest der Division von $x.\psi_1$ durch φ u. s. f., endlich

$$\psi_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} a_{\lambda\mu}\, x^{m-\mu}, \quad R = |a_{\lambda\mu}|$$

und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ das Wurzelsystem von $\varphi(x)=0$, dann folgt

$$\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_m) = R.$$

Hieraus ergiebt sich das Bézout'sche Theorem. Die Methode kann auf eine beliebige Anzahl von Gleichungen erweitert werden. No.

G. PESCI. Una formula relativa alle funzioni simmetriche.
Bologna Rend. 1886-87. 49-54.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

wo p_n nicht gleich Null ist, und setzt man $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^r = s_r$, so findet man:

$$\text{(b)} \qquad \left[\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu(x_1-x_\nu)\ldots(x_{\nu-1}-x_\nu)(x_{\nu+1}-x_\nu)\ldots(x_n-x_\nu)\right]$$
$$\times\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x_\nu(x_1-x_\nu)\ldots(x_{\nu-1}-x_\nu)(x_{\nu+1}-x_\nu)\ldots(x_n-x_\nu)}\right]$$
$$= -\frac{1}{p_n}\left[ns_n + (n-1)p_1 s_{n-1} + (n-2)p_2 s_{n-2} + \cdots + 2p_{n-2}s_2 + p_{n-1}s_1\right].$$

Zwei besondere Fälle werden behandelt.

Ist erstens $p_r = p$ oder $p_r = (-1)^r p$, so ist die rechte Seite von (b):

$$\frac{1}{p^2}\left[(1-p)^{n+1}+p(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}p^2-1\right].$$

Verschwinden zweitens in (a) die Coefficienten

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{\frac{n-1}{2}}$$

(nicht $p_{\frac{n-1}{2}-2}$, wie unrichtig angegeben wird), jenachdem n gerade oder ungerade ist, so ist n^2 der Wert der rechten Seite von (b). Vi.

G. Bauer. Ueber die Berechnung der Discriminante einer binären Form. München. Ber. 1886. 183-191.

Bezeichnet V die Discriminante der Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} y + \cdots + a_n y^{n-1},$$

so ergiebt sich die Discriminante der Form n^{ter} Ordnung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

aus der Formel

$$D = a_1^2 V - a_0 \Delta(a_1^2 V) + \frac{a_0^2}{1.2}\Delta^2(a_1^2 V) - \frac{a_0^3}{1.2.3}\Delta^3(a_1^2 V) + \cdots$$
$$\pm \frac{a_0^{n-1}}{1.2\ldots n-1}\Delta^{n-1}(a_1^2 V),$$

wo

$$\Delta = 2\frac{a_2}{a_1}\frac{\partial}{\partial a_1} + 3\frac{a_3}{a_1}\frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + n\frac{a_n}{a_1}\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$$

zu setzen ist und allgemein Δ^i die i-malige Ausführung dieses Differentiationsprocesses andeuten soll. Aus der erhaltenen Formel wird die Discriminante D schliesslich so weit wirklich berechnet, als zur Herstellung der Discriminante der Form achter Ordnung ausreicht. Ht.

G. Maisano. Die Discriminante der binären Form 6ter Ordnung. Math. Ann. XXX. 442-452.

Der Ausdruck, welchen P. Gordan für die Resultante zweier binären Formen fünfter Ordnung angegeben hat, wird dazu be-

nutzt, um die Discriminante einer binären Form sechster Ordnung als Function der bekannten Invarianten derselben darzustellen. Ht.

J. J. SYLVESTER, W. J. C. SHARP. Solution of question 2810. Ed. Times XLVII. 21.

Es bedeute S_i die Summe der Producte zu je i Factoren, dann ist

$$\Sigma S_i(a_2, a_3, \ldots, a_n)\frac{(a_1-\alpha_1)(a_1-\alpha_2)\ldots(a_1-\alpha_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$
$$= S_{i+1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) - S_{i+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Z. B. für $n = 3$, $i = 2$

$$bc\frac{(a-\alpha)(a-\beta)a-\gamma)}{(a-b)(a-c)} + ca\frac{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)}{(b-a)(b-c)}$$
$$+ ab\frac{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)}{(c-a)(c-b)} = abc - \alpha\beta\gamma.$$

Lp.

M. D'OCAGNE. Problème d'algèbre. Teixeira J. VIII. 171-174.

Im American J. IX untersucht der Verfasser Zahlen, die er mit K_m^p bezeichnet und die durch die Formeln

$$K_m^1 = 1, \quad K_m^m = 1, \quad K_m^p = pK_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1}$$

definirt sind. In diesem Aufsatz giebt er eine Anwendung der Zahlen K_m^p bei folgendem algebraischen Theorem:

Wenn ein ganzes rationales Polynom in x

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

gegeben ist und man dieses Polynom auf die Form

$$F(x) = h_0 + h_1 x + h_2(x+1) + \cdots + h_n x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$$

bringt, so lassen sich die Coefficienten h als Functionen der a und der Zahlen K_m^p ausdrücken. Tx. (Hch.)

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1.

Niedere Arithmetik.

J. van Hengel. Lehrbuch der Algebra. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, insbesondere an Gymnasien. Freiburg. Herder. 489 S.

„In den vorhandenen, zu Hülfsmitteln beim algebraischen Unterricht bestimmten Büchern zeigt sich allerdings zuweilen ein gewisser Anlauf, ausserdem dass ein mehr oder weniger grosser Uebungsstoff zur praktischen bezw. mechanischen Verarbeitung vorgelegt wird, auch der theoretischen Seite der Algebra Rechnung zu tragen; allein die Scheu, zu viel zu verraten, scheint doch in ihnen gross zu sein, und das Dargebotene ist nicht selten unbestimmt, verworren oder gradezu falsch.“ Mit diesen Worten schiebt der Verfasser Bücher wie die von Schubert, Spieker u. a. bei Seite, um für das seine Platz zu schaffen. Er zerlegt das Pensum in zwei Teile, allgemeine Arithmetik oder die Herleitung der Gesetze des Rechnens und Algebra oder das Bestimmen unbekannter Zahlen aus Gleichungen. Dass diese Einteilung didaktisch nicht gerechtfertigt ist, zeigt das Buch selbst, da Gleichungen schon in den ersten Paragraphen der Arithmetik, die Kettenbrüche, Reihen, Logarithmen und die Combinationslehre im zweiten Teil hinter den Gleichungen behandelt

werden. In der Arithmetik fehlen Reihen höherer Ordnung und die Entwickelung der Functionen in Reihen, in der Algebra kubische und höhere Gleichungen, daher reicht das Buch seinem Inhalte nach nur für Gymnasien aus, nicht für Realgymnasien und Ober-Realschulen; für andere höhere Lehranstalten geht es zu weit. Was die Form betrifft, in welcher der Inhalt dargeboten wird, so fällt der Satzbau und die Schreibweise auf, z. B. S. 12 Satz 14. „Eine Zahlverbindung von der Form $a \vdots b \vdots c \vdots \ldots$, in welcher die Doppelzeichen $\vdots$ (mal = dividirt durch) bedeuten sollen, dass es gleichgültig ist, ob an ihrer Stelle . oder : steht, um die Multiplication oder Division zwischen der nächstfolgenden Zahl und der ganzen vor ihr stehenden Zahl oder Zahlverbindung, von Anfang der Reihenfolge an gerechnet, anzuzeigen, wird eine mehrgliedrige Grösse genannt.“ Oder S. 319 „Die gebundene Grundform gleich Null einer Gleichung“. Durch Umänderung althergebrachter Bezeichnungen wird Verwirrung angestiftet; Grössen, die man sonst mehrgliedrig nennt, heissen hier mehrteilig, mehrgliedrig dagegen ein Product oder Quotient; unter Abkürzen eines Bruches versteht man anderwärts nicht wie hier das Heben oder Kürzen. — Die Definitionen von der Multiplication, von den Producten aus zwei und mehr Raumgrössen sind sonderbar, man lernt hier z. B., dass $a\mathrm{m}.b\mathrm{m} = a.b\mathrm{qm}$ auf Grund einer Uebereinkunft den Inhalt eines Rechtecks (und nicht den eines Dreiecks) mit der Grundlinie am und der Höhe bm bedeutet. Das dekadische Zahlsystem ist durch Heranziehung anderer Systeme nicht erläutert, weswegen die Darstellung der Decimalbrüche, der Kubik- und Quadratwurzelausziehung mangelhaft und unklar ausfällt. Dass die Wurzeln der Gleichung, welche man durch Quadriren aus einer anderen erhält, nicht alle auch Wurzeln der letzteren sind, wird verschwiegen, und auf Seite 263 stehen daher Resultate, die nur teilweise passen. Falsch ist u. a. auch die Gregorianische Kalenderverbesserung auf S. 345 angegeben. Ueber das Gymnasialpensum hinaus geht die Reihenentwickelung für ${}^{b}\log(1+x)$ und $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$, für letzteres wird $1^\infty = e$ geschrieben. Dass es nötig

ist, bei unendlichen Reihen die Convergenz zu untersuchen, hat sich der Verfasser gescheut zu verraten. — Zu den einzelnen Abschnitten sind Aufgaben, zu diesen die Resultate gegeben. Bei den meisten, selbst bei leichten, findet sich eine ausführliche Anweisung oder Auflösung. Lg.

C. E. Enholtz. Lehrbuch der elementaren Mathematik zum Schul- und Selbstunterricht für Lehrer und Lehramtscandidaten sowie als Vorschule auf das eigentliche mathematische Studium. I. Teil. Reine Arithmetik 1, 2. Aarau. Sauerländer.

Die beiden ersten Lieferungen enthalten nach einer kurzen Einleitung folgende Abschnitte: I. Definitionen der sieben arithmetischen Grundoperationen. II. Addition und Subtraction von Monomen und Polynomen. III. Algebraische Grössen und Zahlen; ihre Addition und Subtraction. IV. Operationen der zweiten Stufe mit einfachen Grössen, Producten und Quotienten. V. Multiplication und Division der Polynome. VI. Systematische Zahlen. VII. Das Rechnen mit systematischen ganzen Zahlen. VIII. Systematische Brüche. IX. Elementare Zahlenlehre.

Die Darstellung ist klar und ausführlich. Den meisten Abschnitten ist einerseits eine grosse Zahl von Uebungsbeispielen hinzugefügt, andererseits ist die geschichtliche Entstehung und Entwickelung der Arithmetik, des Zahlensystems, der Mittel zur Erleichterung und Veranschaulichung des systematischen Rechnens in besonders eingehender Weise behandelt. Wz.

Th. Adam. Regeln und Lehrsätze aus der Arithmetik und Algebra für den Unterricht der höheren Schulen bis Obersecunda. Pr. Realgymn. Schwerin (No. 610). 39 S. 8°.

„Das Heft enthält nur das Notwendigste für den Schüler und ist nicht zum Selbststudium bestimmt . . . Der Lehrer findet weitere Anleitung und Belehrung in dem ersten Bande der Elemente der Mathematik von Baltzer“. Lp.

FRIEDRICH HERRMANN. Katechismus der Algebra oder die Grundlehren der allgemeinen Arithmetik. Dritte Auflage. Leipzig. J. J. Weber. 150 S. kl. 8°.

Die von K. Fr. Heym besorgte Auflage hat dem bisherigen Text, der an einigen Stellen berichtigt ist, die Lösung der Gleichungen dritten Grades hinzugefügt. M.

GERBALDI. Primi elementi di aritmetica. Torino. Bocca.

G. GIULIANI. Elementi d'Algebra. Torino. Löscher.

D. AMANZIO. Trattato di aritmetica teorica. Napoli. Aniello.

L. SANDRI. Metodologia critica per l'insegnamento dell' aritmetica nelle scuole elementari. Parma. Battei.

G. FRATTINI. Aritmetica pratica ad uso delle scuole elementari del Regno. Parte IV. Roma. Tipografia Eredi Botta.

Referat in Besso Per. mat. II. 191.

W. ZAJACZKOWSKI. Die Elemente der Arithmetik für den Gebrauch an Mittelschulen. Lemberg. (Polnisch.)

J. DEROUSSEAU. Algèbre pure et appliquée aux sciences commerciales, à l'usage des élèves s'adonnant à l'étude des sciences commerciales et des personnes s'occupant d'opérations financières. Paris. Gauthier-Villars.

Das Werklein entwickelt die Theorie der quadratischen Gleichungen, der geometrischen und arithmetischen Progressionen,

die Lehre von den Logarithmen, soweit diese zur Lösung der praktischen Fragen aus der Zinseszins- und der Rentenrechnung nötig sind. Daran schliesst sich die Behandlung der wichtigsten Aufgaben aus dem Leben. Lp.

- - -

G. Lautenschläger. Beispiele und Aufgaben zur Algebra. Für Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und zum Selbstunterricht. 12te Aufl. Darmstadt. Arnold Bergsträsser. 132 S. 8°.

Die vorliegende, von Fr. Gräfe bearbeitete Auflage unterscheidet sich von den früheren im wesentlichen durch folgende Erweiterungen: 1) Diophantische Gleichungen (cfr. 191—225), 2) Vermehrung der Aufgaben über quadratische Gleichungen, 3) Gleichungen dritten Grades (398—460), 4) Gleichungen vierten Grades (461—506), 5) Reciproke Gleichungen (507—527), 6) Gleichungen höherer Grade mit mehreren Unbekannten (528 bis 550) und 7) Determinanten. M.

- - -

E. Bardey. Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. I. Teil. Aufgaben mit einer Unbekannten. Leipzig. B. G. Teubner. VI u. 95 S. 8°.

Da Hr. R. Pauli 1886 „Anweisungen zur Lösung der Textaufgaben in Dr. Bardey's Aufgabensammlung" veröffentlicht hat, so lässt Hr. Bardey, um diesem von ihm nicht gutgeheissenen Schlüssel zur Lösung den Weg zu verlegen, für die Gleichungen ersten Grades selber eine Anleitung erscheinen, fügt eine ebenso grosse Anzahl neuer Aufgaben bei und kündigt eine Abänderung sämtlicher von Hrn. Pauli bearbeiteten Aufgaben in der nächsten Auflage an. Lp.

E. Bardey. Quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. Leipzig B. G. Teubner. IV u. 94 S. 8°.

Die zweite Auflage dieses zuerst 1870 erschienenen Werkchens ist nicht geändert, hat jedoch über 80 neue Aufgaben aufgenommen, die sich in der dritten Auflage der „Algebraischen Gleichungen" des Verfassers (1883) finden. Lp.

A. Giedroyć. Anleitung für Anfänger zum Ansetzen der Gleichungen. Pr. Tarnopol. (Polnisch.)

Dn.

A. Macfarlane. On the use of / as a symbol of operation. Ed. Times XLVI. 29-30.

Herr Macfarlane will den schrägen Bruchstrich in systematischerer Weise verwandt wissen. Indem er ihn als „reciprok von" liest, findet er die 1 in Brüchen mit diesem Zähler entbehrlich; also ist zu schreiben $/a$ statt $\frac{1}{a}$. Durch Gegenüberstellung der Regeln für $+$ und $-$:

$$++=+,\quad +-=-,\quad -+=-,\quad --=+$$

erhält er für $\times$ und $/$:

$$\times\times=\times,\quad \times/=/,\quad /\times=/,\quad //=\times.$$

Ferner

$$\begin{aligned} a+b &= b+a, & a-b &= -b+a,\\ a\times b &= b\times a, & a/b &= /b\times a,\\ a+a &= 2a, & a-a &= 0,\\ a\times a &= a^2, & a/a &= 1. \end{aligned}$$

Regeln über die Anwendungen der Klammern werden ebenfalls erörtert. Lp.

M. d'Ocagne. Sur une notion utile en algèbre et en analyse. S. M. F. Bull. XV. 156-158.

Herr d'Ocagne will in a^m über, resp. unter a einen Strich setzen, um anzudeuten, dass es die symbolische Bezeichnung für $a^{(m)}$ resp. a_m sein solle. No.

K. Pánek. Ueber die Teilbarkeit der Zahlen durch elf. Cas. XVI. 122. (Böhmisch.)

Enthält eine einfache Ableitung der bekannten Regel.

Std.

Berdellé. Arithmétique des directions et rotations. Franç. Ass. (Toulouse). 197-206.

Berdellé. La numération binaire et la numération octavale. Franç. Ass. (Toulouse.) 206-209.

Berdellé. Boîte à multiplication. Franç. Ass. (Toulouse.) 210-211.

M. d'Ocagne. Note sur un problème d'arithmétique. Teixeira J. VIII. 101-103.

In einem früheren Aufsatz (Teixeira J. VII. 117—128, F. d. M. XVII. 1885. 130) hat der Verfasser gezeigt, dass in der Folge der Zahlen von 1 bis N (inclusive), wenn N aus n Ziffern besteht, die Anzahl sämtlicher geschriebener Ziffern gleich $n(N+1)-(n|1)$ ist, wo $(n|1)$ eine Zahl bedeutet, die aus n nebeneinander geschriebenen Einheiten gebildet ist.

Im gegenwärtigen Aufsatz wendet er diese Formel auf folgendes Problem an: Es ist in der natürlichen Folge der Zahlen die k^{te} Ziffer zu bestimmen. Wenn man Q den Quotienten und R den Rest der Division von $k+(n|1)$ durch n nennt, so gelangt der Verfasser zu folgendem Resultat:

1) Wenn R von Null verschieden ist, so ist die gesuchte Ziffer die R^{te} der Zahl Q, von links an gerechnet.

2) Wenn R gleich Null ist, so ist die gesuchte Ziffer die erste der Zahl $Q-1$, von rechts an gerechnet. Tx. (Hch.)

V. Dantscher v. Kollesberg. Bemerkung zur Theorie der irrationalen Zahlen. Innsbruck. Ber. 1-5.

Es wird ein Verfahren erörtert, durch welches ermittelt werden kann, wie oft ein genauer Teil $1 : q^x$ der Einheit in $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ enthalten ist, wobei q und x Anzahlen bezeichnen $q > 1$; $x \geqq 0$.

No.

A. HOLTZE. Ueber periodische Decimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlsystemen. Pr. Domgymn. Naumburg a. S. (No. 227). 50 S. 4°.

Die Arbeit giebt eine sorgfältige Zusammenstellung der wesentlichsten bis jetzt bekannten Resultate über periodische Decimalbrüche oder, wie der Verfasser sich für Zahlsysteme mit beliebiger Grundzahl ausdrückt, über „periodische Bruchreihen". Der Verfasser hat nicht bloss eingehende literarische Studien über sein Thema gemacht (das von ihm am Anfange mitgeteilte Verzeichnis der ihm zugänglich gewesenen Literatur enthält 22 Nummern, unter einigen mehrere Einzelartikel vereinigt), sondern auch selber neue Untersuchungen über den Gegenstand angestellt. Als neu bezeichnet er 1) die Hervorhebung der Ausnahmestellung der Primzahl 2 auch auf diesem Gebiete, natürlich wenn man die Grundzahl des Zahlsystems von vornherein allgemein wählt. 2) Die Methode zur Behandlung der Summen äquidistanter Reste, eigentlich nur eine passend gewählte Bezeichnung, die aber wesentlich wird für die Gewinnung aller bezüglichen Resultate. 3) Die im Anhange skizzirten Ergebnisse über solche Brüche, welche Decimalbrüche aus Halbperioden ergeben, die bei dem einen Bruch in umgekehrter Folge wie bei dem anderen stehen, u. a. m. Die fleissige Arbeit verdient eine grössere Verbreitung, als sonst Programmabhandlungen zu erhalten pflegen.

Lp.

CH. RUCHONNET. Éléments de calcul approximatif. 4e éd. Paris. Gauthier-Villars.

Regeln, welche zwei Grenzen kennen lehren, zwischen denen das aus einer Zahlenrechnung folgende Ergebnis liegen muss.

Lp.

A. POWEL. Beiträge für den mathematischen Unterricht. Abgekürzte Rechnung mit Decimalzahlen. Pr. Realprog. Gumbinnen (No. 23). 18 S. 4°.

Der Verfasser hat über denselben Gegenstand in Hoffmann Z. 1874 einen Aufsatz veröffentlicht. Gegenwärtig will er nicht Gewicht legen auf die scharfe Bestimmung der Fehlergrenze, sondern er bemüht sich zu zeigen, wie man auch bei zusammengesetzten Aufgaben durch vorhergehende Einrichtung der Rechnung nach festen Regeln ein genügendes Resultat gewinnt, ohne jedesmal an die Fehlerbestimmung denken zu müssen. Lp.

A. LUGLI. Sulle frazioni decimali periodiche. Besso Per. mat. II. 161-174.

Die in dieser Note bewiesenen, nur zum Teil neuen Lehrsätze sind dazu bestimmt, die Berechnung der Perioden der rationalen Decimalbrüche zu erleichtern, und die Angabe der Zifferanzahl der Perioden a priori zu ermöglichen. Auf Einzelheiten können wir nicht eingehen; es mögen nur einige störende Druckfehler hervorgehoben werden. S. 163 Z. 4 statt p das erste Mal lese man 9; S. 171 Z. 22 statt s_2 und s_1 lese man p_2 und p_1; S. 174 Z. 19 u. 24 statt 3336667 lese man 333667. Vi.

E. SADUN. Su alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica. Besso Per. mat. II. 179-181.

Beweis des Satzes: Wird das Polynom $f(x)$ durch $x-a$ geteilt, so ist der Rest $f(a)$. Vi.

A. BASSANI. Due teoremi sull' estrazione di radice. Besso Per. mat. II. 13-18.

Der erste Satz lautet so: Die Anzahl der genauen Ziffern der n^{ten} Wurzel aus einer angenäherten Zahl N ist gleich der Anzahl der Ziffern von N, wenn entweder die Anzahl der Ziffern des ganzen Teiles von N durch n nicht teilbar ist, oder, im ent-

gegengesetzten Falle, die ersten N Ziffern linker Hand eine Zahl bilden, die $> 10^n/n^{\frac{n-1}{n}}$ ist.

Man könnte diesen Satz folgendermassen vervollständigen: Die letzte Bedingung findet immer statt, wenn $n \gtreqless 8$ ist; wenn sie nicht erfüllt ist, so vermindert sich die Anzahl der genauen Ziffern höchstens um eine Einheit.

Der zweite Satz ist unrichtig, wie man ohne Schwierigkeit einsehen kann. Der Fehler rührt davon her, dass x im Laufe des Beweises zwei verschiedene Bedeutungen erhält, da es anfangs als eine im allgemeinen irrationale, später aber als eine ganze Grösse angesehen wird. Vi.

G. Darboux. Sur l'extraction de la racine carrée. Darb. Bull. (2) IX. 176-184.

Ist

$$a^2 < A < (a+1)^2,$$

so ist $a + \frac{A-a^2}{2a+1}$ ein Näherungswert für $\sqrt{A}$, und zwar wird

$$x - \frac{A-a^2}{2a+1} < \frac{1}{4}\,\frac{1}{2a+1},$$

wenn $(a+x)^2 = A$ ist. Diese Formeln geben eine schnellwirkende Annäherung für die Berechnung der Quadratwurzel aus A.

No.

Hill. On the incorrectness of the rules for extracting the square and cube roots of a number. Lond. M. S. Proc. XVIII. 171-178.

„Wenn man $n+1$ Ziffern einer Quadratwurzel nach der gewöhnlichen Methode berechnet hat, so kann man weitere n Ziffern durch blosse Division finden.“ Diese Regel lässt sich nicht immer auf die Fälle anwenden, in welchen auf die $2n+1$ Wurzelziffern noch andere folgen. Entsprechendes gilt für die Kubikwurzel. Lg.

R. MARCOLONGO. Su di un teorema di algebra elementare. Batt. G. XXV. 174-178.

Die für ganzzahlige n bekannte Formel

$$\lim_{k=\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + k^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

gilt für jedes n, ausgenommen den Wert $n = -1$. No.

E. SZANCER. Eine neue Auflösungsmethode der unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Krakau. (Polnisch.)

Bietet wesentlich nichts Neues. Dn.

RAUTENBERG. Ueber diophantische Gleichungen des zweiten Grades. Pr. Gymn. Marienburg. (No 35.) 24 S. 4°.

Für die Prima eines Gymnasiums geschrieben, behandelt der Aufsatz die elementaren Methoden, durch welche die bezüglichen Aufgaben aus der bekannten Aufgabensammlung von Ed. Heis gelöst werden können, und stellt in einem Anhange einige der einfachsten Gesetze der Zahlentheorie zusammen. Lp.

LAISANT. Quelques applications arithmétiques de la géométrie des quinconces. Franç. Ass. (Toulouse.) 218-235.

Capitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

G. WERTHEIM. Elemente der Zahlentheorie. Leipzig. Teubner. 381 S.

Ein für Anfänger bestimmtes Lehrbuch, welches etwa den Stoff der vier ersten Abschnitte von Lejeune-Dirichlet's Vor-

lesungen umfasst. Dem Zwecke entsprechend ist auf Beispiele und Uebungsaufgaben besonderer Wert gelegt, und in jedem Capitel sind die einschlagenden neueren Anwendungen berücksichtigt, so gleich im Anfang die befreundeten und vollkommenen Zahlen, die Methode des Herrn Meissel, die Zählung der Primzahlen in einem vorgeschriebenen Intervall auf die in einem kleineren zu reduciren. Den Kettenbrüchen ist ein besonderes Capitel gewidmet, ebenso sind die Potenzreste für zusammengesetzte Moduln sehr eingehend behandelt. Den Schluss des Buches bildet die Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Sn.

Fr. Meyer. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Böklen Mitt. I_3. 80-82. 1886.

Beweis, dass der Ausdruck

$$1+\sum_1^r\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_r-1)(x_1+x_2+\cdots+x_r-2)\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_r-r)}{1.2\ldots r}$$

alle positiven ganzen Zahlenwerte, und zwar jeden nur einmal, durchläuft, sobald die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ dasselbe unabhängig von einander thun. Schg.

C. de Polignac. Sur une partition de nombres. C. R. CIV. 1688-1690, 1779-1780.

Es sei p_n die n^{te} Primzahl, und

$$(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) = p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \ldots p_{n-1}^{a_{n-1}}\, p_n^{a_n}.$$

Alsdann ist ein Ausdruck von der Form

$$(p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n) + (p_3, p_4, \ldots, p_n, p_1) + \cdots + (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$$

nicht durch das Product $p_1 p_2 \ldots p_n = \Pi_n$ teilbar. Der Satz lässt sich aber nicht umkehren; es giebt oberhalb einer Grenze, welche für jedes n bestimmt wird, Zahlen, die kein Vielfaches von Π_n sind, und für die dennoch keine Darstellung obiger Art existirt. Z. B. 53 ist in keiner der Formen 2^x+3^y, 2^x-3^y, 3^y-2^x darstellbar. Sn.

M. Lerch. Deux théorèmes d'arithmétique. Prag. Ber. 683-688.

Bezeichnet man die Anzahl der Teiler von α, welche grösser als β sind, mit $\psi(\alpha, \beta)$, so ist

$$\sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \psi(n-\varrho, \varrho) = n$$

und

$$\sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho, \varrho) = 2n.$$

Sn.

A. S. Bang. Taltheoretiske Undersögelser. Zeuthen Tidskr. (5) IV. 70-80, 130-137. (1886.)

Der Gegenstand dieser Arbeit ist zunächst die Untersuchung der ganzzahligen Factoren einer Zahl a^t-1. Ist t, in Primfactoren aufgelöst, durch

$$t = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

dargestellt, und M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen

$$a^{\frac{t}{p_1}}-1,\; a^{\frac{t}{p_2}}-1,\; \dots,\; a^{\frac{t}{p_n}}-1,$$

so ist insbesondere der Factor

$$F_t(a) = \frac{a^t-1}{M}$$

von Interesse. Derselbe wird eine ganzzahlige rationale Function von a sein vom Grade $\varphi(t)$ und wird, mit einzelnen Ausnahmen, wenigstens einen Primfactor von der Form $\alpha t+1$ enthalten. Als Consequenz der entwickelten Sätze folgt ein einfacher Beweis des Satzes, dass in jeder arithmetischen Reihe, deren erstes Glied 1 ist, unendlich viele Primzahlen enthalten sind, also ein specieller Fall des allgemeineren Satzes von Dirichlet. Ferner giebt der Verfasser den folgenden Satz: Geht t in a^n-1 auf, so giebt es unendlich viele Primzahlen, welche nicht mit $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ modulo t congruent sind. Gm.

M. Lerch. Sur une propriété des nombres. Teixeira J. VIII. 161-163.

Herr Lerch giebt folgenden Satz:

Die Summe aller möglichen Producte von der Form $q_1 q_2 q_3 \dots q_n$, wo die q ganze positive Zahlen sind, die den Bedingungen $q_1 \leqq 2$, $q_{\alpha+1} \leqq 1 + q_\alpha$ genügen, ist gleich dem Product $1.3.5\dots(2n+1)$. Dieser Satz ergiebt sich auf zwei verschiedene Weisen aus der Berechnung des Wertes der Ableitung $\left(\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}}\right)_{u=0}$, für $x = 1 - \sqrt{1-2u}$. Tx. (Hch.)

W. Imschenetzky et V. Buniakoffsky. Sur un nouveau nombre premier annoncé par le père Pervouchine. Extrait d'un rapport fait à l'Académie. Bull. de St. Pétersb.

Es wird beurkundet, dass Hr. Pervouchine der Akademie im November 1883 das folgende Resultat mitgeteilt hat: „Die Zahl $2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$ ist eine Primzahl“.

Wi.

E. Lucas. Sur le neuvième nombre parfait. Mathesis VII. 45-46.

Hr. Hudelot hat vermittelst einer Methode des Hrn. Lucas bewahrheitet, dass $2^{61}-1$ eine Primzahl und daher $2^{60}(2^{61}-1)$ wirklich eine vollkommene Zahl ist, wie dies Hr. Seelhoff gefunden hat. Mn. (Lp.)

Cl. Servais. Sur les nombres parfaits. Mathesis VII. 228-230.

E. Cesaro. Sur les nombres parfaits impairs. Mathesis VII. 245-246.

Mn.

P. Seelhoff. Untersuchung der Zahl $2^{37}-1$. Hoppe Arch. (2) V. 221-223.

Die Zahl ist durch 223 teilbar. Sn.

E. Barbier. On suppose écrite la suite naturelle des nombres, quel est le $(10^{1000})^{\text{ième}}$ chiffre écrit? C. R. CV. 795-798.

E. Barbier. On suppose écrite la suite naturelle des nombres, quel est le $(10^{10000})^{\text{ième}}$ chiffre écrit? C. R. CV. 1238-1239.

Die Beantwortung hängt mit einer Entwickelung von echten Brüchen in Decimalbrüche zusammen. Sn.

E. Busche. Ueber eine Formel des Herrn Hermite. J. für Math. C. 459-464.

Neuer Beweis der Formel

$$S = 2\sum_{x=1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2,$$

wo S die Anzahl aller Teiler der Zahlen 1, 2, ..., n bezeichnet. Im Anschluss hieran Herleitung einer neuen Bestimmung des Jacobi'schen Zeichens, einer neuen Einkleidung des Reciprocitätsgesetzes, eines neuen Ausdruckes für die Klassenanzahl der quadratischen Formen mit negativer Determinante. Sn.

E. Catalan. Sur les nombres de Segner. Palermo Rend. I. 190-201.

Die fraglichen Zahlen geben an, auf wieviel Arten ein n-seitiges convexes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann. Die Grundeigenschaft derselben ist:

$$T_{n+1} = \frac{4n-6}{n} T_n.$$

Es werden Reihenentwickelungen behandelt, deren Coefficienten solche Zahlen enthalten, und besonders die Zerlegung in Primfactoren genauer untersucht. Der Herr Verfasser hofft auf diesem Wege einen Beweis für das Postulat des Herrn Bertrand zu erlangen: Zwischen einer beliebigen Zahl, welche 5 übersteigt, und dem um 5 verminderten Doppelten dieser Zahl liegt mindestens eine Primzahl. Sn.

W. E. Heal. Some properties of repetends. Annals of Math. III. 97-103.

Entwickelt man eine reciproke Primzahl in einen Decimalbruch, unter Zugrundelegung eines Zahlsystems, dessen Basis eine primitive Wurzel von p ist, so ist die Stellenzahl der Periode gleich $p-1$. Eigenschaften solcher Perioden. Sn.

J. HACKS. Ueber Summen von grössten Ganzen. Acta Math. X. 1-52, auch sep. Diss. Bonn. 52 S. 4°.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden Summen betrachtet, in denen die unter dem Zeichen befindliche Function bei wachsendem Argument fortwährend abnimmt (Anzahl und Summe der Divisoren von vorgeschriebener Form u. dgl.); im zweiten Teil Summen von beständig zunehmenden Functionen, welche zur Theorie der quadratischen Reste in Beziehung stehen. Die allgemeinen Sätze werden arithmetisch und geometrisch bewiesen (durch Abzählung von Gitterpunkten). Die speciellen Untersuchungen des zweiten Teils knüpfen besonders an die Arbeiten von Herrn Buniakoffsky an. Sn.

M. A. STERN. Zur Theorie der Function $E(x)$. J. für Math. CII. 9-19.

Untersuchungen über Reihen von der Form

$$\sum_{r=1}^{n-1} E\left(\frac{rm}{n}+h\right),$$

wo m und n positive ganze Zahlen bedeuten. Sn.

M. A. STERN. Sur la valeur de quelques séries qui dépendent de la fonction $E(x)$. Acta Math. X. 53-56.

Es seien k, m zwei ganze Zahlen, von denen $k<m$ ist, r eine der Zahlen 1, 2, ..., $m-1$; es sei

$$E_2(x)=\frac{E(x)E(x+1)}{1.2};$$

es sei endlich x so gewählt, dass

$$x \geqq E(x)+\frac{k}{m}, \quad x<E(x)+\frac{k+1}{m}.$$

Dann werden die beiden Summen $\sum_{r=1}^{m-1}(m-r)E_2\left(x\pm\frac{r}{m}\right)$ durch $E_2(x)$ und $E(x)$ ausgedrückt; durch Addition beider Summen ergiebt sich $E_2(mx)-mE_2(x)$, ein Resultat, das von Herrn Hermite schon auf anderem Wege hergeleitet war. — In ähnlicher Weise werden die Ausdrücke

$$\sum_{r=1}^{m-1}E_2\left(x\pm\frac{r}{m}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{m-1}r.E\left(x\pm\frac{r}{m}\right)$$

berechnet und addirt; die Summe der beiden ersten ist gleich

$$\sum_{r=1}^{m-1}E\left(x+\frac{r}{m}\right);$$

diejenige der beiden letzten gleich

$$m(m-1)[E(x)]^2+mkE(x)+\frac{(2m-1)k-k^2}{2}.$$

Wz.

K. Petr. Zur Ableitung der Formel von Buniakoffsky für $\Sigma E\sqrt[r]{u}$. Cas. XVI. 169. (Böhmisch.)

Setzt man mit Hrn. Buniakoffsky

$$U=\sum_{u=1}^{u=N}E\sqrt[r]{u}$$

und geht von der Zahlenreihe

$$1, 2, 3, \ldots, 2^r-1, 2^r, \ldots, 3^r-1, 3^r, \ldots, n^r-1, n^r, \ldots, N$$

aus, so erhält man zunächst

$$\sum_{u=1}^{2^r-1}E\sqrt[r]{u}=(2^r-1).1,$$

$$\sum_{u=2^r}^{3^r-1}E\sqrt[r]{u}=(3^r-2^r).2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{u=(n-1)^r}^{n^r-1}E\sqrt[r]{u}=[n^r-(n-1)^r](n-1),$$

wodurch sich nach Summirung auf beiden Seiten ergiebt

$$\sum_{u=1}^{n^r-1}E\sqrt[r]{u}=(n-1)n^r-\sum_{u=1}^{n-1}u^r=n^{r+1}-\sum_{u=1}^{n}u^r.$$

Ist $E\sqrt[r]{N} = n$, so muss man zum letzten Ausdrucke hinzuaddiren

$$E\sqrt[r]{n^r}+E\sqrt[r]{n^r+1}+E\sqrt[r]{n^r+2}+\cdots+E\sqrt[r]{N} = n(N-n^r+1),$$

um U zu erhalten. Dann folgt

$$\sum_{u=1}^{N} E\sqrt[r]{u} = n(N+1)-\sum_{u=1}^{n} u^r.$$

Std.

W. J. Buniakoffsky. Bemerkungen über eine Formel der Zahlentheorie. Petersb. Abh. LV. 501-516. (Russisch.)

Es wird $E\left(\frac{A}{p}\right)$ durch die Summe der Ziffern der Zahl A in dem Zahlsystem mit der Basis p ausgedrückt und die erhaltene Formel zur Ermittelung der Summe der quadratischen Reste der Zahl p und des Symbols $\left(\frac{a}{p}\right)$ angewandt. Wenn p eine ungerade Zahl, so kann man die Formel für die Summe der quadratischen Reste zur Entscheidung der Frage benutzen, ob p eine einfache oder zusammengesetzte Zahl ist. Wi.

A. P. Minine. Ueber ein Verfahren für die Ableitung der Zahlenreihen. Mosk. math. Samml. XIII. 536-543. (Russisch.)

Es seien die Function $f(n)$ und die Function $\psi(n,k)$ nach den Functionen: $\varphi(n,1)$, $\varphi(n,2)$, $\varphi(n,3)$ u. s. w. entwickelt:

$$f(n) = A_1\varphi(n,1)+A_2\varphi(n,2)+\cdots+A_n\varphi(n,n),$$
$$\psi(n,k) = a_{1,k}\varphi(n,1)+a_{2,k}\varphi(n,2)+\cdots+a_{n,k}\varphi(n,n).$$

Die Aufgabe besteht in der Bestimmung der Coefficienten der Entwickelung:

$$f(n) = B_1\psi(n,1)+B_2\psi(n,2)+\cdots+B_n\psi(n,n).$$

Die Vergleichung der Reihen giebt die Formel: $A_k = \sum_1^n a_{kx}B_x$, welche sehr leicht zur Ermittelung der Coefficienten B in einigen Fällen führt. Es werden eingehend die beiden folgenden Beispiele betrachtet:

$$(1)\qquad \psi_{n,m} = E\left(\frac{n}{m}\right)+E\left(\frac{n-1}{m}\right)+E\left(\frac{n-2}{m}\right)+\cdots,$$

$$(2)\qquad \psi_{n,m} = E\left(\frac{n}{m}\right)+E\left(\frac{n}{m^2}\right)+E\left(\frac{n}{m^3}\right)+\cdots$$

Wi.

E. PASCAL. Sopra una formola numerica. Batt. G. XXV. 45-49.

Die Functionen $f_k(x)$ sollen für ganze positive Werte von x auch nur ganze positive Werte annehmen dürfen und überdies der Bedingung

$$f_k(x+1)-f_k(x) = f_{k-1}(x)$$

genügen. Dann ist jede Zahl N nur auf eine Weise in der Form

$$f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)$$

darstellbar, wenn die Bedingung

$$x_{k-1} < x_k$$

hinzugenommen wird. Anwendung auf Binomialcoefficienten.

Sn.

E. CESARO. Intorno ad una classe di funzioni aritmetiche. Batt. G. XXV. 14-19.

Es seien zwei Functionen durch die Relation

$$h(n)+k(n) = 1$$

verbunden, ferner

$$H(n) = \Pi h(p),\quad K(n) = \Pi k(p),$$

wo sich die Producte über alle Primfactoren des n erstrecken sollen. Alsdann ist, wenn die Summation über alle Divisoren von n genommen wird,

$$H(n) = \Sigma\mu(d)K(d),\quad K(n) = \Sigma\mu(d)H(d);$$

μ heisst die umkehrende Function. Beispiele. Sn.

A. BERGER. Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres. Ups. N. Acta III. 130 S.

Mit Hülfe von bekannten Eigenschaften der Bernoulli'schen

Function gelangt der Herr Verfasser zu einer Umkehrung der Euler'schen Summenformel. Hierbei tritt die Function auf:

$$K(a, b) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ k^a (\log k)^b - \int_k^{k+1} x^a (\log x)^b \, dx \right\},$$

deren allgemeine Eigenschaften und einfachere Formen für besondere Werte der Argumente entwickelt werden, als analytische Grundlage der folgenden Untersuchungen (§ 1 u 2). Es folgen Beziehungen zwischen Mittelwerten und Reihen (§ 3), unter welchen sich folgende Eigenschaft der Γ-Function findet:

$$\Gamma(a) = \lim_{x=1} (1-x)^a . \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{a-1} x^n.$$

Im § 4 geht der Herr Verfasser zu seinem eigentlichen Gegenstand über, indem er Eigenschaften von Functionen entwickelt, welche nur für ganzzahlige Werte der Veränderlichen definirt sind. Im § 5, 6 und 7 werden die Functionen

$$\sum_{dd_1=k} d^s (\log d)^t d_1^{s_1} (\log d_1)^{t_1},$$

$$\sum_{dd_1=k} d^s d_1^{s_1},$$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} m^s n^{s_1} x^{mn}$$

untersucht; es ergeben sich zahlreiche Reihensummirungen, welche im allgemeinen Falle auf die Function $K(a, b)$ führen, für besondere Grenzwerthe aber durch Potenzen von π und die Bernoulli'schen Zahlen rational ausdrückbar sind. Auch diese Formeln werden auf die geläufigen zahlentheoretischen Functionen angewandt (§ 8); es ergeben sich Grenzwerte von Reihen, in deren einzelnen Gliedern sich Functionen der im Stellenzeiger enthaltenen Primzahlen finden. Schon im § 4 wurde der Herr Verfasser auf eine Zusammengehörigkeit besonderer Art zwischen gewissen zahlentheoretischen Functionen geführt. Es sei $f_1(m)$ eine für alle ganzen positiven Werte von m definirte Function, $f_1(1)$ verschwinde nicht; dann wird $f_2(m)$ durch folgende Relationen definirt:

$$\sum_{dd_1=k} f_1(d) f_2(d_1) = 1 \text{ für } k = 1$$

$$= 0 \text{ für } k > 1.$$

In den folgenden Paragraphen werden Coefficientenreihen betrachtet und angewandt, welche aus dieser Definition entspringen. Ist z. B. $f_1(m)$ beständig gleich 1 (§ 9, 10), so erhält man für $f_2(m)$ die Bedingungsgleichungen

$$\sum_d f_2(d) = 0,$$

die Summation erstreckt über alle Divisoren irgend einer Zahl m. Ferner wird $f_1(m)$ gleich ± 1 genommen, je nachdem m aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primfactoren besteht (§ 11, 12). Ein besonderer § ist den Potenzsummen der Divisoren einer Zahl gewidmet. Durch alle diese Hülfsmittel werden einesteils Grenzbestimmungen und Summirungen in grosser Zahl erhalten (die Arbeit enthält 482 solcher Formeln), andererseits für die besonderen Werte der Function $K(a, b)$ zahlreiche Reihenentwickelungen gewonnen (§ 13, 14, 15). Sn.

E. Cesaro. Sull' uso dell' integrazione in alcune questione d'aritmetica. Palermo Rend. I. 293-293.

Wenn $F(x)$ die Summe aller Werte ist, welche $f(i)$ für alle ganzzahligen Werte der Variabeln annimmt, welche nicht grösser als x sind, so ist:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\alpha x}{x^{m+1}} = \frac{1}{m} \sum_1^\infty \frac{f(i)}{i^m}.$$

Aus dieser und einer ähnlichen, nur etwas allgemeineren Formel werden zahlentheoretische Resultate abgeleitet, z. B.: Der mittlere Wert des Bruches $\frac{\varphi(n)}{n}$ ist $\frac{6}{\pi^2}$, u. dgl. m. Sn.

E. Cesaro. Medie ed assintotiche espressioni, in aritmetica. Batt. G. XXV. 1-13.

Im Anschluss an Arbeiten von Tschebyscheff und Sylvester untersucht der Herr Verfasser, unter welchen Bedingungen arithmetische Functionen gegen eine gemeinsame Grenze convergiren können. Sn.

A. Puchta. Ueber einen Satz von Euler-Brioschi-Genocchi. Wien. Ber. XCVI. 110-133.

Multiplicirt man die Summe von 2^n Quadraten mit einer anderen Summe von 2^n Quadraten, so fragt es sich, ob das Product wieder als Summe von 2^n Quadraten darstellbar ist. Eine solche Darstellbarkeit haben Euler für $n = 2$, Herr Brioschi für $n = 3$ dargethan; Genocchi hat eine Verallgemeinerung geben wollen, welche indes, wie Herr Puchta nachweist, nur unter sehr speciellen Voraussetzungen richtig ist. In der vorliegenden Abhandlung wird die Lösung mit Hülfe einer geometrischen Interpretation erzielt. Im Raum von 2^n Dimensionen werden 2^n Ebenen bestimmt, deren jede auf allen übrigen senkrecht steht, und diese Ebenen als neue Coordinatenebenen betrachtet. Die Identität, welche alsdann den Abstand eines beliebigen Punktes vom Ursprung in doppelter Form ausdrückt, liefert ohne weiteres die gesuchte Gleichung. Eine genauere Analyse dieser geometrischen Lösung zeigt, dass eine weit grössere Anzahl von Formeln der gesuchten Art existirt, als Euler und Herr Brioschi gefunden haben. Für $n = 2$ giebt es $3!2^4 = 96$ verschiedene Formen des Productes, für $n = 3$ giebt es $7!2^{11} = 10\,321\,920$ Formen. Ist $n > 3$, so ist das System zu einander senkrechter Ebenen nicht mehr in rationaler Form darstellbar. Sn.

X. Antomari. Sur le produit de deux sommes de huit carrés. C. R. CIV. 566-567.

Herleitung der bekannten Formel von Brioschi aus Determinantenrelationen, unter Zuhülfenahme complexer Grössen.

Sn.

K. Schwering. Ueber gewisse trinomische complexe Zahlen. Acta Math. X. 57-86.

Ist λ eine Primzahl und α eine complexe Wurzel der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$, so ist die Hauptaufgabe, die Herr Schwering löst, die, schnell und sicher die Norm der complexen Zahl $z+\alpha-\alpha^{\nu+1}$

zu finden, wo $\nu = 1, 2, \ldots, \lambda-2$ sein kann. Dabei ergiebt sich eine Reihe interessanter Sätze; so ist z. B. die Hälfte der Coefficienten der Potenzen von z gleich Null. Es folgen dann Untersuchungen über die Anzahl der verschiedenen, nicht auf einander zurückführbaren complexen Zahlen der Form $z+\alpha-\alpha^{\nu+1}$. Für ein λ der Form $6k+5$ giebt es $(\lambda+1)/6$ Gruppen, eine zu drei, jede andere zu 6 Normen. Für $\lambda=6k+1$ giebt es dagegen $(\lambda+5)/6$ Normengruppen, eine zu 3, eine zu 2, die anderen zu 6 Normen. Mit dieser Gruppirung befindet sich diejenige der Jacobi'schen $\psi(\alpha)$ in vollkommenster Uebereinstimmung. Schliesslich werden die Beziehungen der angestellten Untersuchungen zu den Forschungen des Herrn L. Kronecker (J. für Math. XCIII.) dargelegt. Dabei ergiebt sich: Ist auch $p=2\lambda+1$ eine Primzahl, so ist die Hälfte aller nicht auf einander zurückführbaren Normen von $1+\alpha\pm\alpha^{\nu+1}$ durch p teilbar; und nur die Primzahlen von der Form $p=2m\lambda+1$ kommen in unzähliger Menge als Teiler der Norm von $z+\alpha-\alpha^{\nu+1}$ vor.

No.

K. Schwering. Beitrag zur Theorie gewisser complexer Zahlen. J. für Math. CII. 56-75.

Die Kummer'sche Zerlegung von $(\alpha, x)^\lambda$ und $\psi(\alpha)$ in reale oder ideale Primfactoren ist als Ausgangspunkt für die Darstellung von $(\alpha, x)^\lambda$ durch ein Product conjugirter $\psi(\alpha)$ genommen. Es wird eine einfache Regel aufgestellt und bewiesen, durch welche die Primteiler $\pi(\alpha^s)$ von $\psi_{\nu,\mu}(\alpha)$ gefunden werden können; dann wird $(\alpha, x)^\lambda$ mit Hülfe von $(\lambda-1)/2$ Quotienten $\pi(\alpha^s)/\pi(\alpha^{\lambda-s})$ ausgedrückt und dadurch die gewünschte Lösung geliefert. — Erwähnt sei noch, zunächst der Satz: „Greift man in $\psi(\alpha)=\Pi\pi(\alpha^{m_k})$ diejenigen m_k, welche quadratische Reste, und diejenigen, welche quadratische Nichtreste (mod. λ) sind, heraus, so ist die Summe der ersteren vermindert um die Summe der letzteren stets durch λ teilbar, falls $(\lambda-1)/2$ ungerade ist" — und dann, dass der Verfasser eine Methode zur Bestimmung der Norm von $(z-\alpha+\alpha^m)$ angiebt.

No.

A. Hathaway. A Memoir in the theory of numbers. American J. IX. 162-179.

Eine Theorie der Ideale, wesentlich im Anschluss an die bekannten Entwickelungen des Herrn Dedekind. Der Herr Verfasser hebt als unterscheidend die Definition der relativ primen Ideale, des Productes zweier Ideale und die Ausschliessung gewisser Arten von Idealen hervor. Sn.

K. Weihrauch. Theorie der Restreihen zweiter Ordnung. Schlömilch Z. XXXII. 1-21.

Ist die Congruenz

$$a+(k-1)d \equiv m_x \qquad (\text{mod. } b)$$

unter den Bedingungen

$$b > a \geqq 0, \quad b > d > 0, \quad b > m_x \geqq 0$$

erfüllt, so sind die Eigenschaften der Summen

$$\sum_{x=1}^{x=b} m_x, \quad \sum_{x=1}^{x=b} x m_x$$

(Restreihen erster und zweiter Ordnung) zu ermitteln. Der Herr Verfasser ist auf diese Aufgabe im Zusammenhang mit früheren Arbeiten geführt worden (vgl. F. d. M. VII. 93—95, IX. 134 bis 135). Sn.

J. Kraus. Zur Theorie der Potenzreste. Schlömilch Z. XXXII. 360-363.

Für den Modul p^ϱ lassen sich die Indices der Basis $a+\lambda p$ aus denen der Basis a mit Hülfe einer „arithmetischen Restreihe m^{ter} Ordnung bezüglich des Moduls p^ϱ“ ableiten. Für eine solche Restreihe sind die Glieder der m^{ten} Differenzreihe unter einander congruent. Sn.

L. Gegenbauer. Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl von Wurzeln einer Congruenz. Wien. Ber. XCV. 165-169.

Einfacher Beweis des Satzes von Herrn Kronecker: Die Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \cdots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

hat $p-1-n$ unter einander und von Null verschiedene Wurzeln, wenn die Determinante

$$|a_{i+k}| \qquad \begin{pmatrix} i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n \\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ r \end{pmatrix}$$

für $r=n,\ n+1,\ \ldots,\ p-3,\ p-2$ die Primzahl p als Factor enthält, während die Determinante

$$|a_{i+k}| \qquad (i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

zu p teilerfremd ist. Sn.

J. Hermes. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes durch Umkehrung. Hoppe Arch. (2) V. 190-198.

Von dem Umstande ausgehend, dass die Zahlen t, für welche in Bezug auf ein gegebenes β das Legendre'sche Zeichen gleich $+1$, 0, -1 ist, in bestimmten Linearformen enthalten sind, erlangt der Herr Verfasser einen Beweis, den er für umständlich, aber naturgemäss erklärt, insofern kein fremdes Element in die Betrachtung gezogen wird. Sn.

M. Lerch. Modification de la troisième démonstration donnée par Gauss de la loi de réciprocité de Legendre. Teixeira J. VIII. 137-146.

Der Beweis, den Herr Lerch giebt, beruht auf demselben Princip wie der dritte von Gauss für das Legendre'sche Reciprocitätsgesetz gegebene. Er stützt sich im wesentlichen auf die Congruenz:

$$q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \operatorname{sgn} \prod_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} R\left(\frac{\nu q}{p}\right) \qquad (\text{mod. } p),$$

wo p eine Primzahl >2 und q eine ganze Zahl, die relativ prim zu p ist, bedeutet. $R\left(\frac{\nu q}{p}\right)$ ist der Wert, den man erhält, wenn man von der Grösse $\frac{\nu q}{p}$ die ihr am nächsten liegende ganze Zahl abzieht, liegt also zwischen $\pm\frac{1}{2}$. Tx. (Hch.)

L. Gianni. Il teorema di Fermat e alcune semplici sue conseguenze. Besso Per. mat. II. 114-120.

Von den in dieser Note aufgestellten sehr einfachen Sätzen führen wir nur einen als Beispiel an: Ist m eine ungerade Primzahl, und ist $a-1$ durch m, a^m-1 durch m^ν teilbar, so ist $a-1$ durch $m^{\nu-1}$ teilbar.

Der Satz, mit welchem die Note schliesst, ist zwar richtig, nicht aber aus dem vom Verfasser angegebenen Grunde, sondern weil $(a-1)(a+1)$ immer (bei ungeradem a) durch 8 teilbar ist. Vi.

E. Sadun. Sulla risoluzione in numeri positivi, interi o nulli, delle equazioni:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n=r,$$
$$1\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\dots+n\lambda_n=n.$$

Annali di Mat. (2) XV. 209-221.

Relationen zwischen den Functionen $s(n,r)$, welche die Anzahl der Lösungen angeben. Als Hülfsmittel dienen lineare Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze Functionen mit der Gliederzahl $s(n,r)$ sind. Sn.

C. Moriconi. Soluzioni in numeri interi di equazioni indeterminate di 1° grado. Besso Per. mat. II. 33-40.

Aufstellung der Formeln, welche die allgemeine ganzzahlige Auflösung einer linearen Gleichung mit mehreren Unbekannten geben. Vi.

A. Berger. Om rötternas antal till kongruenser af andra graden. Stockh. Öfv. XLIV. No. 3. 127-153.

Der Verfasser betrachtet die Congruenz

$$ax^2+bx+c\equiv 0 \qquad (\text{mod. } m),$$

wo a, b, c und m ganze Zahlen sind und $a>0$, $m>0$, a nicht congruent 0 (mod. m).

Die Discriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

ist weder Null noch eine positive Quadratzahl. Die gegebene Congruenz wird in

$$x^2 \equiv D \qquad (\text{mod. } 4n,\ n = am)$$

transformirt. Für die Anzahl der Wurzeln dieser Congruenz, mit $\psi(D, 4n)$ bezeichnet, wird eine allgemeine Formel hergeleitet, ebenso für die Function $\psi(\Delta, 4n)$, wo Δ eine Fundamentaldiscriminante nach Hrn. Kronecker ist. Diese Formeln werden später gebraucht, um die Ausdrücke

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D^2}{n}\right)\psi(D, 4n)\,.\,g(n); \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\psi(\Delta, 4n)g(n)$$

herzustellen. Hier genügt $g(n)$ für alle ganzen Zahlenwerte von m und n den Gleichungen

$$g(m)\,.\,g(n) = g(mn), \quad g(1) = 1.$$

Endlich werden hierdurch die Mittelwerte der Functionen

$$\left(\frac{D^2}{n}\right)\cdot\psi(D, 4n) \quad \text{und} \quad \psi(\Delta, 4n)$$

mittels Anwendung der Kronecker'schen Formel berechnet:

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}{n} = \lim_{w=0}\left\{w\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{1+w}}\right\}.$$

R. Marcolongo. Sull' analisi indeterminata di 2^0 grado. Nota I^a. Batt. G. XXV. 161-173.

Alle speciellen Fälle der Gleichung

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

werden eingehend in Bezug auf ihre Lösbarkeit untersucht und Methoden zur praktischen Lösung gegeben. Sn.

A. Meyer. Ueber eine Eigenschaft der Pell'schen Gleichung. Wolf Z. XXXII. 363-382.

„Ist D eine positive ganze Zahl, 2^σ die grösste in D aufgehende Potenz von 2, $\sigma \leqq 4$, S^2 das grösste in D aufgehende ungerade Quadrat, und $D = 2^\sigma\,.\,S^2\,.\,D_1$, so giebt es stets mit

$2D$ teilerfremde Zahlen ξ, η von der Beschaffenheit, dass für alle Primzahlen p, q, die den Congruenzen

$$p \equiv \xi, \quad q \equiv \eta \qquad (\text{mod. } 8SD_1)$$

genügen, die Pell'sche Gleichung

$$t^2 - pqDu^2 = 1$$

eine Fundamentalauflösung $t = T$, $u = U$ besitzt, für welche weder $T+1$ noch $T-1$ durch pq teilbar ist." Sn.

Richard Müller. Ueber rationale Dreiecke und ihren Zusammenhang mit der Pell'schen Gleichung. Hoppe Arch. (2) V. 111-112.

„Alle rationalen Dreiecke herzustellen, deren Seitenlängen durch drei auf einander folgende Zahlen gegeben sind."

Diese Aufgabe führt zu der Gleichung $u^2-3v^2 = 1$. Sn.

J. Perott. Sur l'équation $t^2 - Du^2 = -1$. Premier mémoire. J. für Math. CII. 185-223.

Während die Pell'sche Gleichung $t^2-Du^2 = 1$ für jeden positiven und ganzzahligen (nicht quadratischen) Wert von D lösbar ist, gilt nicht das Gleiche von der Gleichung

$$t^2-Du^2 = -1.$$

Schon den Indern war es bekannt, dass zur Lösung der letzteren die Zerlegbarkeit von D in eine Summe von zwei zu einander primen Quadratzahlen erforderlich ist. Ist dann aber D nicht zugleich eine Potenz einer ungeraden Primzahl, so kann die Lösung noch ebenso gut möglich, wie unmöglich sein. Die Gründe für dieses eigentümliche Verhalten liegen in dem Aufbau der Periode der zur Determinante D gehörigen reducirten Hauptform.

In Anlehnung und Weiterverfolgung Dirichlet'scher Congruenzkriterien untersucht der Verfasser in dieser ersten Abhandlung des genaueren die Gleichung

$$t^2-2q^2u^2 = -1,$$

wo q eine Primzahl von der Form $4n+1$ bedeutet.

Ohne auf den Gang der Entwickelung näher einzugehen, die einer grossen Reihe von Umformungen und einer Einteilung in zahlreiche Unterfälle bedarf, sei hier nur das Endergebnis angeführt:

„Zur Lösbarkeit der Gleichung $t^2-2q^2u^2=-1$, wo q eine Primzahl von der Form $8n+1$ bezeichnet, ist erforderlich, dass die Zahl d in der Zerlegung $q=c^2+2d^2$ durch 8 teilbar sei. Diese Bedingung ist sogar hinreichend, falls q von der Form $16n+9$ ist, was nicht der Fall bei der Form $q=16n+1$ ist.“

Um das Letztere zu erläutern, dienen die Beispiele

$$q=593=16.37+1,\quad q=353=16.22+1.$$

Ist ersten Beispiel ist die Gleichung lösbar, im zweiten nicht.

My.

C. de Polignac. Solution of question 8630. Ed. Times XLVI. 109-110.

Die Gleichung $a^n-2^k=\pm 1$ ist in ganzen Zahlen nur möglich, wenn $n=1$ oder 2 (im letzteren Falle ist $a=3$). Lp.

A. Berger. Déduction de quelques formules analytiques d'un théorème élémentaire de la théorie des nombres. Acta Math. IX. 301-320.

Es wird die Anzahl der Darstellungen einer Zahl n durch die Form x^2+y^2 als Ausgangspunkt genommen, um einige Relationen zwischen Thetareihen und endlich die Reihe von Leibniz für $\frac{1}{4}\pi$ auf rein zahlentheoretischem Wege zu erhalten. Sn.

A. Berger. Om en talteoretisk formels användning till transformation af en definit dubbelintegral. Stockh. Öfv. XLIV. No. 3. 153-159.

Der Verfasser beweist das folgende Theorem. Wenn wir mit n eine ganze positive Zahl bezeichnen und mit $\psi(n)$ die Anzahl der Wertpaare x, y, die der unbestimmten Gleichung

$$x^2+y^2=n$$

genügen, so wird

$$\psi(n) = 4\sum_d \sin\frac{d\pi}{2},$$

wo d alle Divisoren der ganzen Zahl durchläuft." Diese Formel wird zur Transformation des Doppelintegrals

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

gebraucht. Wenn J einen bestimmten endlichen Wert besitzt, hat man

$$J = \pi\int_0^{\infty} f(z)\,dz.$$

K.

A. Tiebe. Vollständige Tafeln pythagoreischer Dreiecke für die Katheten und Hypotenusen von 1-100. Hoffmann Z. XVIII. 178-181.

Zur Berechnung der Tafeln wird die Gleichung

$$a^2 + x^2 = (x+y)^2$$

benutzt, aus welcher

$$2x = \frac{a^2}{y} - y$$

folgt. Man hat y als Factor von a^2, und da $\frac{a^2}{y} - y$ eine gerade Zahl sein soll, es bei geradem a gerade, bei ungeradem ungerade zu nehmen. In einer Anmerkung wird empfohlen, so zu rechnen:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b) = xy, \quad c = \frac{x+y}{2}, \quad b = \frac{x-y}{2},$$

wo x und y zwei gerade oder zwei ungerade Factoren von a sind.

Lg.

G. Wertheim. Ermittelung aller einem bestimmten Zahlengebiet angehörenden Lösungen der Pythagoreischen Gleichung. Hoffmann Z. XVIII. 418-420.

Man setze $z = x + ky$ in der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, so wird dieselbe durch $x(1-k^2)$, $2kx$, $x(1+k^2)$ identisch befriedigt. Die

ganzen Lösungen ergeben sich für $k = \frac{n}{m}$:

$$x = \xi(m^2 - n^2), \quad y = 2mn\xi, \quad z = \xi(m^2 + n^2)$$

und hieraus für die verschiedenen Werte von ξ leicht diejenigen Lösungen, für welche z. B. $z < 100$. Lg.

J. WORPITZKY. Ueber die realen Lösungen der Gleichung $a^a = b^2 + c^2$. Hoffmann Z. XVIII. 168-177.

Um kubische Gleichungen mit rationalen Lösungen aufzustellen, bei deren Berechnung nur rationale Wurzeln vorkommen, hat man die Gleichung $a^3 = b^2 - c^2$ in rationalen Zahlen zu lösen, wobei es keinen Unterschied macht, wenn der Exponent 3 durch eine andere Zahl ersetzt wird. Hieran anknüpfend behandelt Verfasser die Gleichung $a^a = b^2 + c^2$; er zeigt zunächst, dass bei jedem ganzen a Lösungen vorhanden sind, und wie man ihre Anzahl für ein gegebenes a, sowie auch die Anzahl derjenigen bestimmen kann, in welchen b und c relative Primzahlen sind. Dabei ergeben sich eine Reihe interessanter zahlentheoretischer Sätze. Numerische Beispiele werden zur Erläuterung beigefügt. Lg.

M. MARTONE. Sopra un problema di analisi indeterminata. Catanzaro. Dastoli. 14 S.

Das Gleichungssystem:

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad u^2 + v^2 = x^2, \quad u - v = x - y$$

wurde, wie der Verfasser nach Angabe von Marie (Histoire des sc. math. et ph. IV. 132) sagt, im Jahre 1880 von Pepin gelöst. Da er aber nicht weiss, wo diese Lösung zu finden ist, so schlägt er eine andere vor. Er glaubt nämlich, das Problem gelöst zu haben, indem er erhält:

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$$

$$u = \frac{2ab - a^2 + b^2 \pm \sqrt{8a^2b^2 - (2ab - a^2 + b^2)^2}}{2},$$

$$v = \frac{-2ab + a^2 - b^2 \pm \sqrt{8a^2b^2 - (2ab - a^2 + b^2)^2}}{2},$$

wo für a, b nur diejenigen Wertepaare zu setzen sind, welche

$$8a^2b^2-(2ab-a^2+b^2)^2$$

zu einem vollkommenen Quadrate machen. Dass aber die Aufsuchung dieser Wertepaare ein neues, und wohl gar schwieriges Problem bildet, das sieht der Verfasser nicht ein; er beschränkt sich darauf, die Lösung $a = 5\sqrt{k}$, $b = \sqrt{k}$ anzugeben.

Die Lösung von Pepin ist in Rom. Acc. P. d. N. L. XXXIII. 284—290 erschienen (Bericht darüber in F. d. M. XII. 1880. 139).

Vi.

DESBOVES. Sur les équations de la forme $ax^4+by^4 = cz^2$. C. R. CIV. 846-847, 1602-1604.

DESBOVES. Sur les équations

$$ax^4+by^4 = cz^2, \quad ax^4+by^4+dx^2y^2 = cz^2.$$

C. R. CIV. 1832-1834.

Aus jeder Particularlösung der Gleichung $ax^4+by^4 = cz^2$ lässt sich in einer angegebenen Weise ein System von Lösungen ableiten, wobei x, y, z als quadratische Formen dreier Hülfszahlen X, Y, Z dargestellt werden. Es wird nach der Anzahl solcher Systeme gefragt und eine Definition von primitiven Lösungen so begründet. Beispiele von Gleichungen, welche eine, zwei, drei primitive Lösungen haben. Besondere Behandlung des Falles $c = a+b$. Daran anschliessend ein Hinweis auf Gleichungen von der Form

$$ax^4+by^4+(a+b+c)x^2y^2 = cz^2,$$

welche eine analoge Discussion zulassen sollen. Sn.

M. MARTONE. Dimostrazione di un celebre teorema di Fermat. Catanzaro. Dastoli. 21 S.

Es ist von dem Satze über die Unlösbarkeit der Gleichung $x^n+y^n = z^n$ in ganzen Zahlen die Rede. Der vermeintliche Beweis wimmelt von groben Fehlern. Eine nachträgliche Note (Nota ad una dimostrazione di un celebre teorema di Fermat. Napoli. Jovene 1888), welche vom Verfasser der Rechtfertigung

oder Vervollständigung seines Beweisverfahrens gewidmet wurde, häuft neue Fehler auf die früheren. Vi.

P. MANSION. Sur le dernier théorème de Fermat. Belg. Bull. XIII. 16-17.

P. MANSION. Rectification. Belg. Bull. XIII. 225.

Wenn $x^n + y^n = z^n$, so sind x, y, z zusammengesetzte Zahlen. Berichtigung: Der Beweis reicht nicht für die kleinste der drei Zahlen aus. Mn. (Lp.)

BORLETTI. Sopra il teorema di Fermat relativo all'equazione $x^n + y^n = z^n$. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 222-224.

Einige Sätze, welche den Unmöglichkeitsbeweis unter besonderen Voraussetzungen anbahnen sollen. Sn.

M. D'OCAGNE. Rectification. S. M. F. Bull. XV. 33.

Von den beiden Arbeiten des Herrn Verfassers aus dem Jahre 1886, über welche in den F. d. M. (XVIII. 160) referirt worden, ist die in den Brux. S. sc. erschienene einwurfsfrei und kann zur Correctur einiger Versehen der anderen dienen.

Sn.

B. Theorie der Formen.

H. MINKOWSKI. Ueber den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen. J. für Math. C. 449-458.

Der obige Begriff soll hier für alle diejenigen homogenen ganzen Functionen beliebig vieler Variabeln, welche nur eine endliche Zahl von linearen ganzzahligen Transformationen in sich zulassen, so gefasst werden, dass die verschiedenen Formen-

klassen gleich dicht und ihre Anzahl möglichst klein werde, einer Forderung des Herrn Kronecker entsprechend. Sn.

H. Minkowski. Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. J. für Math. CI. 196-202.

Eine wesentlich positive quadratische Form von n Variabeln, mit reellen Coefficienten und nicht verschwindender Determinante kann nur bei einer endlichen Anzahl t ganzzahliger linearer Transformationen ungeändert bleiben, eine Anzahl, von der bereits Herr Jordan bewiesen hatte, dass sie eine gewisse (nur von der Zahl n abhängende) Grenze nicht überschreiten kann. Um über diese Anzahl t genaueren Aufschluss zu erhalten, beweist der Verfasser zunächst den wichtigen Satz: „Eine jede der erwähnten Transformationen kann niemals der identischen Transformation modulo p congruent sein, wenn sie nicht mit derselben übereinstimmt". Dabei bedeutet p irgend eine ungerade Primzahl.

Der Verfaser untersucht nun die Gruppe der t Transformationen. Dieselbe erweist sich als einstufig isomorph zur Gruppe der Reste jener Transformationen bez. p. Daraus folgt, dass die fragliche Zahl t ein Divisor einer gewissen, nur von n abhängenden Zahl $\bar{n}$ ist. Die Zahl $\bar{n}$ lässt sich deuten als das kleinste gemeinsame Vielfache aller möglichen (d. h. zu allen möglichen Formen f n^{ter} Ordnung gehörigen) Anzahlen $t(f)$. My.

---

de Preslk. Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques. S. M. F. Bull. XV. 179-181.

Der Verfasser geht von zwei verschieden angenommenen Zerlegungen einer quadratischen Form f in Quadrate aus:

$$\begin{aligned} f &= P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_\alpha^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - \cdots - Q_\beta^2 \\ &= P_1'^2 + P_2'^2 + \cdots + P_{\alpha'}'^2 - Q_1'^2 - Q_2'^2 - \cdots - Q_{\beta'}'^2, \end{aligned}$$

dann würde aus diesen die Identität folgen:

$$\begin{aligned} & P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_\alpha^2 + Q_1'^2 + Q_2'^2 + \cdots + Q_{\beta'}'^2 \\ &= P_1'^2 + P_2'^2 + \cdots + P_{\alpha'}' + Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_\beta^2, \end{aligned}$$

und hieraus wiederum, dass die beiden Gleichungssysteme

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ \ldots,\ P_\alpha = 0,\quad Q'_1 = 0,\ Q'_2 = 0,\ \ldots,\ Q'_{\beta'} = 0;$$
$$P'_1 = 0,\ P'_2 = 0,\ \ldots,\ P'_{\alpha'} = 0,\quad Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \ldots,\ Q_\beta = 0$$

die nämlichen Lösungssysteme besitzen müssten. Die Vergleichung der beiderseitigen Mannigfaltigkeitszahlen zieht aber, mit Hülfe der Relation $\alpha+\beta = \alpha'+\beta'$, die Gleichheiten $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ nach sich, womit der Beweis des Sylvester'schen Trägheitsgesetzes erbracht ist. My.

D. André. Théorème sur les formes quadratiques. S. M. F. Bull. XV. 188-192.

Ueber die Möglichkeit der Darstellung einer quadratischen Form f von n Variabeln x_i als Summe von p linear unabhängigen Quadraten entscheidet der folgende Satz: „Dasjenige System von n linearen Gleichungen, welches man durch Nullsetzen der n ersten partiellen Ableitungen von f erhält, liefert dieselbe Mannigfaltigkeit von Lösungen der x_i, wie das andere System von p Gleichungen, deren linke Seiten dieselben p linearen Formen sind, aus deren Quadraten sich die Form f zusammensetzt". Dabei kann, wie üblich, die Mannigfaltigkeitszahl positiv, Null, oder negativ sein.

Der Beweis ergiebt sich aus den einfachsten Sätzen über die Lösungssysteme linearer Gleichungen, sobald man von der Darstellung der Form f als Summe von p Quadraten ausgeht und an ihr die vorgeschriebenen partiellen Differentiationen ausführt.

Von dem Satze des Verfassers aus gelangt man leicht zu den bekannten Sätzen über die Darstellbarkeit quadratischer Formen als Summen von Quadraten. My.

Ch. Biehler. Sur la forme adjointe. Nouv. Ann. (3) XI. 79-82.

Einige bekannte Eigenschaften der zu einer quadratischen Form Adjungirten werden auf etwas einfachere Weise abgeleitet.

My.

J. Vivanti. Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante. Schlömilch Z. XXXII. 287-300.

Ueber den ersten Teil dieser Arbeit cf. F. d. M. XVIII. 1886. 150. Der Verfasser war auf die Untersuchung der unbestimmten Gleichung $Dx^2-3=y^2$ geführt worden. Er zeigt, dass diese Gleichung stets und nur für diejenigen Werte von D rational auflösbar ist, welche Nullformen zulassen. Aus den rationalen Lösungen werden nach Dirichlet'schen Methoden die ganzzahligen abgeleitet. My.

H. Weill. Sur quelques formes quadratiques. Nouv. Ann. (3) VI. 85-87.

Der Verfasser zeigt, wie gewisse quadratische Formen mit Hülfe von Identitäten auf unendlich viele Weisen dargestellt werden können. So z. B. folgt aus

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0, \quad (b-c)a+(c-a)b+(a-b)c=0,$$

dass die Form

$$(b-c)a^2+(c-a)b^2+(a-b)c^2$$

in die Gestalt

$$(b-c)(\lambda+a)^2+(c-a)(\lambda+b)^2+(a-b)(\lambda+c)^2,$$

wo λ beliebig, gebracht werden kann. Die Gesamtheit aller möglichen Darstellungen wird damit nicht angestrebt. My.

Th. Pepin. Théorie des fonctions homogènes du 3ième degré à deux variables. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVII. 227-294. Deuxième mémoire. Ib. XXXVIII. 23-87.

In dieser umfangreichen Arbeit verfolgt der Verfasser den Zweck, die Frage nach der arithmetischen Klasseneinteilung der binären kubischen Formen zu einem gewissen Abschluss zu bringen; insbesondere weist er nach, dass verschiedene von Eisenstein herrührende Sätze, die sich auf diese Frage beziehen, einer Berichtigung resp. Einschränkung bedürfen.

Sei

$$f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$$

die gegebene kubische Form, F ihre quadratische, Φ ihre kubische Covariante, endlich D ihre Invariante oder Determinante. Dabei bedeuten a, b, c, d ganze Zahlen. Das Gleiche gilt von den Coefficienten der anzuwendenden linearen Transformationen der Variabeln von der Determinante ± 1. Aus den bekannten Beziehungen zwischen den Formen f, F und D folgt sofort der erste Hauptsatz: „Sind zwei kubische Formen f, f' äquivalent, so sind es auch ihre quadratischen Covarianten F, F', und zwar führt die nämliche Substitution f in f', F in F' über. Mithin sind F, F' immer zugleich mit f, f' eigentlich oder uneigentlich äquivalent".

Alle kubischen Formen f, die aus einer derselben durch lineare Transformationen von der Determinante $+1$ hervorgehen, bilden eine Klasse: die zugehörigen quadratischen Formen F gehören dann gleichfalls einer bestimmten Klasse an. Es kommt nun alles auf die Lösung der umgekehrten Frage an: „Wodurch sind diejenigen Formen (und Formenklassen) F charakterisirt, denen Formen (und Formenklassen) f entsprechen, und wie gross ist im bejahenden Falle die Anzahl der Klassen f, die einer Klasse F correspondiren?"

Wird die Form F mit $F = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ bezeichnet, so kommt die aufgeworfene Frage zunächst auf die folgende zurück: „Die ganzzahligen Lösungssysteme a, b, c, d der Gleichungen

$$A = b^2 - ac, \quad B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd$$

aufzusuchen". Indem der Verfasser dieses System durch ein anderes:

$$A^2 = Ab^2 - Bab + Ca^2, \quad Ac - Bb + Ca = 0, \quad Ad - Bc + Cb = 0$$

ersetzt, gelingt es ihm, eine Reihe wichtiger Schlüsse zu ziehen, z. B.: „Bedeuten m und B_1 ungerade Zahlen, A_1 dagegen eine Primzahl, die nicht in $2mB_1$ aufgeht, so ist die einzige notwendige Bedingung dafür, dass die Form $(2mA_1, mB_1, 2mC_1)$ die quadratische Covariante einer kubischen Form ist, die Lösbarkeit der Gleichung

$$mA_1^2 = A_1 b^2 - B_1 ab + C_1 a^2$$

in ganzen Zahlen mit der Forderung, dass a und A_1 relativ prim sein sollen".

Nachdem auf diese Art genügende Kriterien gewonnen sind, die entscheiden lassen, wann eine quadratische Form eine Form F sein kann, wendet sich der Verfasser zur Bestimmung der Klassen von kubischen Formen f, die einer nunmehr als gegeben gedachten Klasse von quadratischen Formen F zugehören. Zu dem Zwecke wird die Composition der Formen F mit sich selbst eingeführt, welche die eben erwähnten Kriterien so umformt, dass sie für die vorliegende Frage überhaupt erst fruchtbar werden. So ergiebt sich der Satz: „Die einzigen quadratischen, eigentlich primitiven Klassen, welche kubischen Formen f entsprechen, sind diejenigen, durch deren Triplication die Hauptklasse hervorgeht".

Die weitere Verfolgung dieses Satzes führt von selbst zur Lösung der gestellten Frage. Als zwei Hauptresultate seien erwähnt: „Die zu einer positiven Determinante gehörende Hauptklasse correspondirt stets drei kubischen Klassen". Und: „Jede quadratische Form von negativer Determinante (< -1), deren Triplication zur Hauptklasse führt, correspondirt stets einer, aber auch nur einer kubischen Klasse".

Während das bisher Mitgeteilte sich auf primitive quadratische Klassen F beschränkt, erweitert der Verfasser im Folgenden seine Ergebnisse auch auf abgeleitete Klassen F.

An einer Reihe von Beispielen wird zum Schluss gezeigt, wie auf Grund der dargelegten Hülfssätze eine vollständige Aufzählung aller kubischen Klassen von einer gegebenen Determinante ermöglicht wird. Bei positiver Determinante bedarf man dabei der Lösungen der Pell'schen Gleichung. My.

E. Schering. Zahlentheoretische Bemerkung. J. für Math. C. 447-448.

Auszug aus einem Briefe an Hrn. Kronecker vom 14. Mai 1863. Bemerkungen über die Tafeln von Gauss für die Klassenanzahl der Determinanten. Mitteilung eines Satzes, wonach „für die in Dirichlet's Sinne (Monatsberichte 1840, März 5) gebrauchten L_x die Summe $\Sigma \log L_x$, erstreckt über alle die L_x, welche den von

der Hauptklasse verschiedenen $2^{\delta-1}$ Ancepsklassen entsprechen, bis auf eine selbst für $\varrho = 0$ endlich bleibende Grösse, durch

$$\frac{1}{2^{\delta+1}} \Sigma \frac{1}{f^{1+\varrho}} - \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{f_0^{1+\varrho}}$$

dargestellt werden kann, worin für f alle durch Formen der bestimmten Determinante darstellbaren Primzahlen, für f_0 aber nur die durch Formen des Hauptgenus darstellbaren zu setzen sind". Sn.

W. Köhler. Zur Transformation der unbestimmten ternären quadratischen Formen. Diss. Münster. 31 S. 8°.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

W. Veltmann. Ueber Kettenbrüche. Schlömilch Z. XXXII. 193-217.

Der Verfasser giebt eine in mehrfacher Hinsicht vom Gewöhnlichen abweichende Darstellung der Hauptsätze der Kettenbrüche, wendet sich dann zu den periodischen Kettenbrüchen und legt das Hauptgewicht auf die Formeln, welche die dem jedesmaligen Ende der Periode entsprechenden Näherungswerte independent darstellen. R. M.

M. Koppe. Ueber die in den Vielfachen eines Kettenbruchs enthaltenen grössten Ganzen. Math. Ann. XXIX. 187-233.

Sind a_0, a_1 gegebene feste Zahlen mit rationalem oder irrationalem Verhältnis, p, q aber veränderliche ganze Zahlen, so kann die Gesamtheit aller Werte s, deren der Ausdruck $qa_1 - pa_0$ fähig ist, durch geometrische Längen veranschaulicht werden, wenn man einen Kreis mit dem Umfang a_1 auf einem anderen mit dem Umfange a_0 rollen lässt und nach jeder vollen Um-

drehung des rollenden Kreises die Spur seines Nullpunktes auf dem festen Kreise aufzeichnet. Indem der Verfasser die räumliche Anordnung der so entstehenden Punkte studirt, erhält er anschauliche Beweise für die Kettenbrucheigenschaften.

Wenn dann zunächst in der Gleichung $qa_1 - pa_0 = \varepsilon$ $(\varepsilon < a_0)$ q als gegeben betrachtet wird, so enthält sie die Aufgabe, den Wert $a_1 : a_0$, dessen Kettenbruchsentwickelung vorausgesetzt wird, angenähert durch einen Bruch mit dem Nenner q darzustellen. Dieses Problem findet mehrere Lösungen, deren eine so lautet: „Man dividire q durch den grössten Näherungsnenner, der $< q$ ist, den Rest wieder durch den grössten in ihm enthaltenen Näherungsnenner u. s. f., wodurch sich schliesslich q als Aggregat der mit gewissen Coefficienten multiplicirten Näherungsnenner ergiebt. Multiplicirt man nun jeden Näherungsbruch im Zähler und Nenner mit dem entsprechenden Coefficienten, und bildet dann aus der Summe sämtlicher Zähler und der Summe sämtlicher Nenner einen neuen Bruch, so ist dies einer der Brüche $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p+1}{q}$, welche $\frac{a_1}{a_0}$ einschliessen, und es lässt sich leicht entscheiden, welcher von beiden es ist."

Wenn aber ε in der Gleichung $qa_1 - pa_0 = \varepsilon$ als gegeben betrachtet wird, so stellt sie eine diophantische Gleichung für p und q dar. Die Lösung derselben in den kleinsten Zahlen ergiebt sich nach einer Methode, welche die Zurückführung auf den Fall $\varepsilon = 1$ unnötig macht. „Man sucht ε als Aggregat der möglichst oft genommenen Reste darzustellen, die bei der Verwandlung von $a_1 : a_0$ in einen Kettenbruch allmählich auftreten. Sobald dies abgeschlossen ist, bildet man entsprechende Aggregate aus den Zählern resp. Nennern der zugehörigen Näherungsbrüche. Dies sind die Werte der Unbekannten." R. M.

O. Stolz. Ueber Convergenz und Divergenz rein periodischer Kettenbrüche. Innsbruck. Ber.

Vergl. F. d. M. XVIII. 1886. 160. R. M.

E. Cesaro. Sur quelques fractions continues. Nouv. Ann. (3) VI. 29-36.

Aus Anlass einer von Sylvester in der Educ. Times gestellten Aufgabe (2906) bestimmt der Verfasser den Wert einiger Kettenbrüche. Die Methode besteht darin, dass er die Zähler und Nenner der Näherungswerte als Coefficienten von Potenzreihen verwendet und die dadurch definirten Functionen durch Integration ihrer Differentialgleichungen ermittelt.

Bezeichnet $(1, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ den Kettenbruch:

$$1+\frac{1}{a_1}\dot{+}\frac{1}{a_2}\dot{+}\frac{1}{a_3}+\cdots,$$

so findet man:

$$(1, \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots) = \frac{\pi}{2},$$

allgemeiner

$$\left(1, \frac{\mu}{1}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{3}, \ldots\right) = 2\mu\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+2}+\frac{1}{\mu+4}-\cdots\right),$$

z. B.

$$(1, \tfrac{2}{1}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{2}{3}, \ldots) = \log 4.$$

Der allgemeinere Bruch

$$\left(1, \frac{\mu}{1+\nu}, \frac{\mu}{2+\nu}, \frac{\mu}{3+\nu}, \ldots\right)$$

ergiebt sich als Quotient zweier bestimmten Integrale; als Beispiel sei angeführt:

$$(1, \tfrac{4}{2}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{4}, \ldots) = \frac{2\pi}{\pi+2}.$$

Aehnlich bestimmt sich der Kettenbruch, dessen Teilzähler durch $\frac{\mu}{1+\nu}, \frac{\mu}{2+\nu}, \cdots$ gegeben sind, während sämtliche Nenner 1 sind. Als Beispiele erhält man Kettenbrüche für

$$e-1, \quad \frac{1}{e-2}, \quad \tfrac{1}{2}(e^2-3), \quad \frac{4}{e^2-5}.$$

Im Anschluss an den ersten Kettenbruch kann man die folgende (wenig convergente) Reihe ableiten:

$$\frac{\pi}{2} = 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\cdot(\tfrac{2}{3})^2+\tfrac{1}{7}\cdot\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2+\tfrac{1}{9}\cdot\left(\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)^2+\cdots$$

R. M.

W. P. ERMAKOFF. Die Entwickelung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung in einen Kettenbruch. Kiew. Zeitschr. für Physik u. Math. II. 61-63. (Russisch.)

Wi.

P. L. TSCHEBYSCHEFF. Ueber die Residuen, welche die angenäherten Werte der Integrale geben. Petersb. Abh. LV. 2. 1-50. (Russisch)

Siehe unter „Bestimmte Integrale" (Abschn. VI, Cap. 4).

Wi.

N. MICHELANGELI. Sopra alcune proprietà delle frazioni continue a quozienti complessi. Napoli. A. Bellisario e C. 24 S. u. 1 Taf.

Ein endlicher Kettenbruch mit ganzen complexen Quotienten stellt offenbar einen complexen Bruch dar; und umgekehrt kann jeder solcher Bruch durch den Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Teilers, der für ganze complexe Zahlen bekanntlich endlich ist (vergl. Dirichlet, Zahlentheorie, III. Aufl. § 159), in einen Kettenbruch verwandelt werden. Wenn die Norm jedes Quotienten >2 ist, so beweist man ohne Schwierigkeit, dass der Kettenbruch alle Eigenschaften der Kettenbrüche mit ganzen reellen Quotienten besitzt — namentlich, dass die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche fortwährend absolut zunehmen, und dass die Abweichung der Werte dieser Brüche von dem Werte des erzeugenden Bruches in immer engere Grenzen eingeschlossen wird. Zum Beweise dieser Behauptungen für den Fall, wo einige Quotienten den Wert $\pm 1 \pm i$, also die Norm 2 haben, bedient sich der Verfasser eines eleganten geometrischen Verfahrens, welches in Kürze zu besprechen, besonders ohne Hülfe der Figuren, ganz unmöglich ist. Ein ganz ähnliches Verfahren wird in einer späteren Arbeit von Hrn. A. Hurwitz (Ueber die Entwickelung complexer Grössen in Kettenbrüche. Acta Math. XI. 187-200 (1888)) zu demselben Zwecke angewandt. Vi.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

S. Hertzsprung. Bemärkninger om en Klasse kombinatoriske Opgaver. Zeuthen T. (5) IV. 154-163. (1886.)

Der Verfasser zeigt, wie mehrere zum Teil sehr schwierige combinatorische Aufgaben, welche zu verschiedenen Zeiten in der „Tidsskrift" gestellt sind, sich unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt einordnen lassen, und wie die Lösungen dann mittels der Bildung von gewissen Differenzen höherer Ordnung erhalten werden können. Gm.

S. Hertzsprung. En Kombinationsopgave. Zeuthen T. (5) V. 13-17.

Der Verfasser löst die folgende Aufgabe: Die Anzahl der von den Zahlen 1, 2, 3, ..., n gebildeten Complexionen zu bestimmen, die so beschaffen sind, dass niemals die Differenz zweier neben einander stehenden Zahlen 1 ist. (Für $n = 4$ hat man z. B. nur die Complexionen 2413 und 3142).

Es wird nachgewiesen, dass, wenn $u_{n,k}$ die Anzahl solcher Complexionen von 1, 2, ..., n ist, dass niemals von den Zahlen 1, 2, ..., k zwei auf einander folgende Zahlen neben einander stehen, die folgende Gleichung stattfindet:

$$u_{n,k} = u_{n,k-1} - u_{n-1,k-1} - u_{n-1,k-2}.$$

Infolge dessen hat man

$$u_{nk} = P_n - 2(k-1)P_{n-1} + \left(2(k-2) + 2^2\frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\right)P_{n-2}$$

$$-\left(2(k-3) + 2^2\frac{(k-3)(k-4)}{1.2}\cdot 2 + 2^3\frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{1.2.3}\right)P_{n-3}$$

. . . .

$$+(-1)^{k-1}P_{n+1-k},$$

wo $P_n = 1.\ 2.\ \dots\ n$ und der Coefficient von P_{n-a} gleich dem Coefficienten von x^{k-a} in der Reihenentwickelung von $(-1)^a 2x(x+1)^{k-a}(1+2x)^{a-1}$ ist. V.

G. Nonni. Un problema di probabilità. Besso Per. mat. II. 182-186.

Es handelt sich um die bekannte Frage: Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe von drei Zahlen eine gewisse Grenze nicht übertrifft? Das Problem wird leicht auf das folgende allgemeinere zurückgeführt: Auf wie viele Weisen kann man r Zahlen wählen, deren Summe s nicht übertrifft? Der Verfasser findet die recurrirende Formel:

$$(r, s) = \sum_{\mu=1}^{\mu=E\left(\frac{s}{r}-\frac{r-1}{2}\right)} (r-1, s-\mu r),$$

wo (r, s) die gesuchte Anzahl, $E(a)$ den ganzzahligen Teil von a bedeutet. Die Formel gilt auch noch, wenn (r, s) die Anzahl der Gruppen von je r Zahlen, deren Summe genau s ist, bezeichnet.

Vi.

C. W. Baur. Einige Eigenschaften der Binomial-Coefficienten mit Anwendung auf Combinationslehre. Schlömilch Z. XXXII. 218-233.

Verschiedene Eigenschaften der Binomial-Coefficienten werden abgeleitet, und die gefundenen Sätze benutzt zur Lösung folgender Aufgabe: Von n Personen, welche nach der Aufeinanderfolge ihrer Geburtstage innerhalb eines Kalenderjahres mit

$$(1), (2), (3), \dots, (n)$$

bezeichnet werden mögen, weiss man nichts, als dass sie innerhalb x auf einanderfolgender Kalenderjahre geboren sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine bestimmte Permutation der n Zahlen 1, 2, 3, ..., n die Ordnung angiebt, in welcher die n Personen dem abnehmenden Lebensalter nach aufeinander folgen? Ls.

F. R. J. HERVEY. Solution of question 8808. Ed. Times XLVII. 75-78.

Die Anzahl zu bestimmen, in der n Verszeilen so gereimt werden können, dass sie r verschiedene Reime besitzen. Im Falle des Sonnetts sind die Zahlen für die Arten von 2, 3, 4, 5, 6, 7 Reimen beziehungsweise: 8 177, 731 731, 6 914 908, 12 122 110, 4 099 095, 135 135. Lp.

P. S. PORETZKY. Die Auflösung der allgemeinen Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der mathematischen Logik. Kas. Ges. V. 83-116. (Russisch.)

Es werden die Untersuchungen des Verfassers über die mathematische Logik (F. d. M. XVI. 1884. 43) jetzt zur Auflösung der allgemeinsten Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt. Wi.

J. BERTRAND. Calcul des probabilités. Solution d'un problème. C. R. CV. 369.

É. BARBIER. Note: Calcul des probabilités. Généralisation du problème résolu par M. J. Bertrand. C. R. CV. 407.

D. ANDRÉ. Note: Calcul des probabilités. Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. C.R.CV.436.

J. BERTRAND. Observations à propos de ces diverses Notes. C. R. CV. 437-439.

Die von Hrn. Bertrand gelöste Aufgabe ist die folgende: Es soll einer der Candidaten A und B gewählt werden. Die

Anzahl der Votanten ist μ, A erhält m Stimmen und ist gewählt, B hat $\mu-m$ Stimmen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass während der Vorlesung der Stimmzettel die Anzahl der auf A fallenden Stimmen stets grösser ist, als die der auf B fallenden?

Hr. Bertrand giebt die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{2m-\mu}{\mu}$ an, ohne die Ableitung der Formel hinzuzufügen.

Hr. Barbier setzt die Anzahl der Stimmen, welche auf B fallen, die Hr. Bertrand mit $\mu-n$ bezeichnet hatte, gleich m, so dass $\mu = m+n$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{m-n}{m+n}$; er erweitert den Satz dahin, dass $\frac{m-np}{m+n}$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der Candidat, welcher m Stimmen erhalten hat, in jedem Stadium der Wahl mehr als p-mal so viel Stimmen hat wie sein Gegner.

Hr. André giebt die directe Lösung:

Die Permutationszahl von zwei Elementen, das eine m-mal, das andere n-mal genommen, giebt an, wie viel verschiedene Reihenfolgen bei der Oeffnung der Stimmzettel auftreten können. Die Anzahl ist $\frac{(m+n)!}{m!\ n!}$.

Die ungünstigen Fälle lassen sich in zwei Gruppen teilen, solche die mit einem Votum für B beginnen, ihre Anzahl ist gleich der Permutationszahl der beiden Elemente, von denen das eine m-mal, das andere $(n-1)$-mal genommen wird, also gleich

$$\frac{(m+n-1)!}{m!\ (n-1)!};$$

nun lässt sich zeigen, dass eben so gross die Anzahl der ungünstigen Fälle ist, welche nicht mit einer Stimme für B beginnen, mithin die Gesamtsumme der ungünstigen Fälle gleich $\frac{2(m+n-1)!}{m!\ (n-1)!}$, woraus sich leicht die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt

$$\frac{m-n}{m+n}.$$

Anknüpfend an diese Bemerkungen kleidet Hr. Bertrand das Problem in die folgende Form.

Ein Spieler wagt bei einem Zufallsspiel, welches unendlich oft wiederholt wird, den n^{ten} Teil seines Vermögens. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich ruiniren wird, und dass die $(2\mu+n)^{te}$ Partie ihm seinen letzten Franken kostet?

Soll dieser Fall eintreten, so muss er offenbar $(\mu+n)$ Partien verloren und darf nur μ Partien gewonnen haben, ausserdem darf aber unter den $(2\mu+n)$ Partien der Fall, dass die Anzahl der verlorenen Spiele die gewonnenen um n übersteigt, erst am Schlusse der Versuchsreihe vorkommen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich gleich

$$\frac{n}{2\mu+n}\,\frac{\Gamma(2\mu+n+1)}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\mu+n},$$

und wenn μ hinreichend gross genommen wird, um 1 statt $e^{-\frac{n^2}{\mu}}$ setzen zu können, so wird dies näherungsweise gleich

$$\frac{n}{(2\mu+n)\sqrt{\frac{\pi}{2}(2\mu+n)}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Ruin vor der $(2\mu+n)^{ten}$ Partie eingetreten ist, wird also näherungsweise gleich

$$1-n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\mu+n}} = 1-0{,}797\sqrt{\frac{n^2}{2\mu+n}},$$

ein Wert, der mit zunehmendem μ gegen 1 convergirt.

Ls.

J. Bertrand. Sur un paradoxe analogue au problème de Saint-Pétersbourg. C. R. CV. 831-833.

Der Verfasser macht einige treffende Bemerkungen zu dem Petersburger Problem und den dazu gegebenen Erklärungen, und fährt dann fort:

Peter habe ein Vermögen, einerlei ob gross oder klein, und spiele unter völlig gerechten Bedingungen; die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sei $\frac{1}{2}$. Die Rechnung lehrt, vorausgesetzt,

dass das Spiel hinreichend lange fortgesetzt wird, dass Peter sich schliesslich ruiniren muss.

Peter macht aber dem Geometer, der ihm seinen Ruin vorausgesagt, den Vorschlag, er wolle ihm so viel Centimes geben, als er Partien spielen kann, und fragt, welche Summe man ihm gerechterweise dagegen zusichern werde. Diese Summe ist unendlich gross.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter nach μ Partien ruinirt sein wird, ist von der Ordnung $1/\mu\sqrt{\mu}$; die mathematische Hoffnung der Summe μ, welche in diesem Fall gezahlt werden muss, ist von der Ordnung $1/\sqrt{\mu}$.

Eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede $1/\mu\sqrt{\mu}$ ist convergent, eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede $1/\sqrt{\mu}$ ist divergent. Darin liegt die Erklärung dieses scheinbaren Widerspruchs.

Ls.

E. Cesaro. Intorno ad una questione di probabilità. Palermo Rend. I. 299-303.

Der Verfasser wendet sich gegen die Behandlung des Problems des gebrochenen Diamanten in den Mélanges mathém. (F. d. M. XVIII. 1886. 23) des Hrn. Catalan nach Laurent und zeigt, dass das dort gefundene Resultat nicht richtig ist, wenn der Diamant in mehr als zwei Stücke gebrochen ist. Das Problem wird eingehend behandelt. Ls.

Barbier. Théorème relatif au jeu de loto. C. R. CV. 435.

B. Dietrich. Das Spiel und die Klassenlotterie. Diss. Leipzig. 41 S. 8°.

J. J. Milne. Solution of question 8369. Ed. Times. XLVI. 43.

Wenn ein gewisses Ereignis durchschnittlich einmal in jedem Jahre, also n-mal in n Jahren eintritt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eins der Ereignisse in einem besonderen Jahre

nicht eintritt, $1-\frac{1}{n}$, dass alle n nicht in dieses Jahr fallen, also keins in dem Jahre eintritt, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, mithin für ein sehr grosses n gleich e^{-1}. Lp.

Ed. Lucas, W. J. C. Sharpe. Solution of a question. Ed. Times XLVI. 22-23.

Man legt n Marken auf die n^2 Felder eines Schachbretts, sodass in jeder Zeile oder Colonne nur je eine Marke sich befindet. Ist S_n die Anzahl der bezüglich des Centrums des Brettes symmetrischen Lösungen, so ist:

$$S_{2n+1} = S_{2n} = 2.4.6\ldots(2n).$$

Ist u_n die Anzahl der bezüglich einer Diagonale symmetrischen Lösungen, so folgt

$$u_n = u_{n-1}+(n-1)u_{n-2}$$
$$= 1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4}+\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6}+\cdots.$$

Auch die Anzahl der bezüglich beider Diagonalen symmetrischen Lösungen wird ermittelt. Lp.

M. d'Ocagne. Intégration d'une suite récurrente qui se présente dans une question de probabilité. S. M. F Bull. XV. 143-144.

Der Verfasser knüpft an das von Weill (F. d. M. XVIII. 1886. 173) behandelte Problem an: Welches ist die Wahrscheinlichkeit $X(p)$, dass ein bestimmtes Ereignis in p Versuchen wenigstens zweimal hinter einander auftritt, wenn es sich um k verschiedene gleich wahrscheinliche Ereignisse handelt?

Er bezieht sich auf seine Théorie élémentaire des séries récurrentes in den Nouv. Ann. (3) III. 65 (F. d. M. XVI. 1884. 191) und findet schliesslich

$$X(p) = \frac{1}{k^2}\sum_{\mu=0}^{\mu=E(\frac{1}{2}p)-1}\left[\left(\frac{k-1}{k^2}\right)^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-2(\mu+1)} C^{\mu}_{\mu+\lambda}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\lambda}\right].$$

Ls.

T. C. SIMMONS. Solution of question 8232. Ed. Times XLVI. 83-84.

Drei Punkte P, Q, R werden willkürlich innerhalb eines Dreiecks angenommen, ausserdem ein Punkt K mit den Dreieckscoordinaten a, b, c. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Q und R auf entgegengesetzte Seiten von PK fallen, ist

$$w = 2a^2 \int_{\frac{ab}{1-a}}^{1-b} \left\{2b - 6ab^2 + (1-4ab)\left(x + \frac{b^2}{x}\right) - a\left(x^2 + \frac{b^4}{x^2}\right)\right\} dx.$$

Einige besondere Fälle werden berechnet. Lp.

W. J. C. MILLER, D. BIDDLE. Solution of question 8602. Ed. Times XLVI. 118-121.

Drei Punkte werden willkürlich auf je einer Seite eines gegebenen Dreiecks angenommen. Den durchschnittlichen Inhalt des durch die drei Punkte gelegten Kreises zu finden. Die Lösung dieser von Hrn. Miller gestellten Aufgabe wird nach mühsamen Rechnungen durch Hrn. Biddle auf Doppelintegrale gebracht, die aber selbst beim gleichseitigen Dreiecke einer Auswertung so grosse Schwierigkeiten entgegenstellen, dass auf ihre Berechnung verzichtet wird. Lp.

W. J. C. MILLER, D. BIDDLE. Solution of question 8444. Ed. Times XLVI. 87-91.

Vier Punkte P, Q, R, S werden willkürlich auf je einer Seite eines Vierecks $ABCD$ angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass das Viereck $PQRS$ kleiner als ein gegebener Bruchteil n vom Inhalte $ABCD$ ist. Hr. Biddle giebt die Lösung der von Hrn. Miller gestellten Aufgabe in der Form eines dreifachen Integrals und leitet daraus das Ergebnis für ein Rechteck $ABCD$ ab, wenn $n < \frac{1}{2}$:

$$w = 2n(2-3n) + (1-2n)(2-2n)\log(1-2n) - \tfrac{1}{2}(1-2n)^2\log^2(1-2n).$$

Ist $n = \frac{1}{4}$, wie Hr. Miller vorschrieb, so macht die Lösung be-

sondere Schwierigkeiten, die Hr. Biddle durch ein Abzählungsverfahren zu überwinden sucht. Lp.

W. J. C. Miller, D. Biddle. Solution of question 8837. Ed. Times XLVII. 41-44.

Auf den Seiten eines regelmässigen n-Ecks werden n Punkte willkürlich angenommen und zu einem eingeschriebenen n-Ecke verbunden. Innerhalb der n Dreiecke, die ausserhalb dieses letzteren Polygons liegen, werden abermals n Punkte, einer in jedem Dreiecke, willkürlich angenommen und zu einem neuen n-Eck verbunden. Der von Hrn. Miller verlangte Mittelwert für die Fläche des letzten Vielecks wird von Hrn. Biddle berechnet, und aus ihm werden für die Fälle $n = 6$ und $n = 4$ die von Hrn. Miller angegebenen Mittelwerte $\frac{25}{36}$ und $\frac{16}{36}$ des Inhaltes des gegebenen Vielecks gefolgert. Lp.

W. J. C. Miller, T. C. Simmons. Solution of question 8282. Ed. Times XLVI. 55-57.

Die Aufgabe, welche F. d. M. XVIII. 1886. 178 abgedruckt ist, ist in den Bänden I, XXXIII, XLV der Ed. Times gelöst worden. Indem jetzt Hr. Simmons um die Münze, welche durch ein Drahtgitter geworfen wird, eine concentrische Kugel von gleichem Radius beschreibt, gelingt es ihm, die allgemeine Lösung ohne Anwendung von Integralrechnung in der Form zu finden:

$$w = \frac{r}{2d} \arcsin \frac{d}{r} + \frac{(r^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}}{2r},$$

wo r den Radius der Münze, $2d$ den Abstand zwischen zwei Drähten des Gitters bezeichnet. Lp.

W. J. C. Miller. Notes on questions 7954, 7624, 8307. Ed. Times XLVI. 37-38.

W. J. C. Miller. Note on a probability question (7624). Ed. Times XLVII. 72-74.

Berichtigungen oder Verbesserungen von Lösungen, die in früheren Bänden erschienen sind. Lp.

J. Kleiber. On „random scattering“ of points on a surface. Phil. Mag. (5) XXIV. 439-445.

Der Verfasser erörtert gewisse falsche Deutungen der Gesetze der „willkürlichen Verteilung“ und insbesondere die Ansichten, welche der verstorbene Professor Forbes in einem Artikel des Phil. Mag. ((3) XXXVII. 1850. 401—427) unter dem Titel veröffentlicht hat: „On the alleged evidence for a physical connection between stars forming binary or multiple groups, deduced from the doctrine of chances“. Gbs. (Lp.)

E. Cesaro. Intorno ad una ricerca di limiti. Palermo Rend. I. 224-226.

C. Fr. Gauss. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. In deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch und P. Simon. Berlin. Stankiewicz. 208 S.

Schon seit längerer Zeit existirt in französischer Sprache, von J. Bertrand herausgegeben, eine Sammlung der wichtigsten Abhandlungen von Gauss über die Fehler-Ausgleichung, welche zum grössten Teil ursprünglich lateinisch geschrieben sind. Die Herausgeber haben sich ein Verdienst dadurch erworben, dass sie diese Abhandlungen jetzt auch in deutscher Sprache veröffentlicht haben, und wenn sie zu dieser Arbeit durch den Wunsch von Hrn. Helmert, der dem Buche ein einleitendes Vorwort vorangestellt hat, mitveranlasst wurden, so gebührt auch diesem unser Dank. Denn es ist wohl sicher, dass einem grossen Kreise von solchen Personen, die das Beste, was über die Methode der kleinsten Quadrate geschrieben worden, die grundlegenden Arbeiten von Gauss, kennen lernen wollen, das Studium derselben im Original wenig bequem ist.

Die Sammlung schliesst sich in der Auswahl und der Reihen-

folge der Schriften derjenigen von Bertrand an; um das Verständnis der Theorie an Beispielen zu erleichtern, enthält sie noch die Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona, sowie verschiedene Selbstanzeigen, insbesondere diejenigen der beiden Teile der Theoria Combinationis und des Supplementum. Ls.

J. BERTRAND. Note sur une loi singulière de probabilité des erreurs. C. R. CV. 779-780.

Bereits Poisson (1831) und Cauchy (1853) haben darauf aufmerksam gemacht, dass die allgemeine Theorie des Durchschnitts unanwendbar wird in dem Fall, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers, der in den Grenzen x und $x+dx$ liegt, durch

$$\frac{k}{\pi}\frac{dx}{k^2+x^2}$$

ausgedrückt wird. Bienaymé hat gemeint, dass ein Instrument mit einer derartigen Fehlerwahrscheinlichkeit gar nicht vorkomme; Bertrand bemerkt, dass ein solches Instrument allerdings vielfach auf Jahrmärkten bei Glücksspielen angewendet wird. Dasselbe besteht aus einer beweglichen Nadel, die sich auf einer horizontalen Scheibe dreht. Wenn man den Punkt bestimmt, wo die verlängerte Nadel eine feste Gerade schneiden würde, indem man diesen Punkt als den Fusspunkt des Perpendikels auf dieselbe von dem Mittelpunkt der Scheibe ansieht, so hat man grosse Chance sich zu irren, und die Wahrscheinlichkeit des Fehlers wird hier

$$\frac{k}{\pi}\frac{dx}{k^2+x^2},$$

wo k die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkt der Scheibe bezeichnet. Ls.

P. L. TSCHEBYSCHEFF. Zwei Theoreme über die Wahrscheinlichkeiten. Petersb. Abh. (Russisch.)

In seiner Abhandlung: „Des valeurs moyennes“ (Journ. de Math. (2) XII) hat der Verfasser das folgende Theorem bewiesen: „Wenn die mathematischen Hoffnungen der Grössen:

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \dots,$$
$$u_1^2,\quad u_2^2,\quad u_3^2,\quad \dots$$

irgend eine endliche Grenze nicht übersteigen, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das arithmetische Mittel n solcher Grössen u sich von dem arithmetischen Mittel der mathematischen Hoffnungen derselben um irgend eine gegebene Grösse unterscheidet, der Einheit in dem Masse, als n bis ∞ wächst".

Jetzt benutzt der Verfasser dieselbe Methode, die er damals angewandt hatte, zum Beweise eines neuen Theorems, welches, zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten angewandt, direct auf die Methode der kleinsten Quadrate führt. Das bemerkenswerte Theorem ist so formulirt: „Wenn die mathematischen Hoffnungen der Grössen $u_1, u_2, u_3, \dots$ Null sind und die mathematischen Hoffnungen aller Potenzen derselben eine endliche Grösse nicht übersteigen, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der n Grössen

$$u_1+u_2+\dots+u_n,$$

dividirt durch die Quadratwurzel aus der doppelten Summe der mathematischen Hoffnungen der Quadrate jener Grössen, zwischen den Grössen t und t' liegt, dem Werte des Integrals

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}dx$$

in dem Masse, als n bis ∞ wächst. Wi.

E. Möller. Fejlenes Theori. Kjöbnhavn. August Bang's Forlag. 108 S. (1886.)

Kurze Darstellung der allgemeinen Fehlertheorie und der Methode der kleinsten Quadrate, mit besonderer Rücksicht auf die praktische Feldmesskunst. Gm.

Ch. M. Schols. La loi de l'erreur résultante. Delft Ann. Éc. Pol. III. 140-150.

Ch. M. Schols. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace. Delft Ann. Éc. Pol. III. 195-200.

In Bessel's Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler wird die Aufgabe behandelt, die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zu bestimmen, welcher aus dem Zusammenwirken verschiedener unabhängiger Fehler entsteht, die zwischen endlichen Grenzen bleiben. Doch hat Bessel nur directe Formeln für den Fall von zwei oder drei zusammenwirkenden Fehlern gegeben, welche aber so beschaffen waren, dass er es aufgab, die analogen auch für vier Fehler aufzustellen. Später wurde die Aufgabe durch Kummell wieder aufgenommen und mit Hülfe von Lejeune Dirichlet's Continuitätsfactor behandelt; aber die Schwierigkeiten wurden dadurch mehr verschoben als gelöst. In den ersten der obengenannten Aufsätze behandelt der Verfasser nun dieselbe Aufgabe, ohne zur höheren Analysis Zuflucht zu nehmen, in Uebereinstimmung mit seiner früher mitgeteilten Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume (F. d. M. XVIII. 1886. 185). Zunächst werden die allgemeinen Formeln in schöner und klarer Weise entwickelt, dann auf einige besondere Fälle angewandt.

Der zweite Aufsatz ist als eine Fortsetzung der oben genannten Fehlertheorie zu betrachten. Es wird darin unabhängig von dem Gesetz für lineare Fehler ein directer Beweis für das Gesetz der Fehler in der Ebene und im Raume gegeben, während das früher gegebene in Abhängigkeit von diesem aufgestellt war.

G.

J. Bertrand. Théorème relatif aux erreurs d'observation. C. R. CV. 1043-44.

Eine Grösse ist wiederholt und zwar durch eine gerade Zahl von Beobachtungen gemessen und die Resultate sind je zwei und zwei nach dem Zufall vereinigt; wenn man aus jeder dieser Gruppen die grössten und die kleinsten Fehler summirt, so wird das Verhältnis der Summe der ersteren zu der Summe der letzteren mit zunehmender Zahl der Beobachtungen gegen den Wert $\sqrt{2}+1 = 2,41$ convergiren.

Für die Richtigkeit dieser Behauptung werden einige Bei-

spiele angeführt, die Hr. Broch aus bekannten Beobachtungen abgeleitet hat. Ls.

H. Faye. Lettre à M. Bertrand à propos de sa précédente note: Sur un théorème relatif aux erreurs d'observation. C. R. CV. 1102.

Hr. Faye findet, dass die Grenzen des angeführten Verhältnisses 1 und 3,915 sind, deren Mittelwert 2,457 nur wenig von 2,414 abweicht. Ls.

J. Bertrand. Sur ce qu'on nomme le poids et la précision d'une observation. C. R. CV. 1099-1102.

Man definirt in der Regel das Gewicht k einer Beobachtung dahin, dass einer Beobachtung mit diesem Gewicht die gleiche Bedeutung zuerteilt wird, wie k Beobachtungen, deren Gewicht als Einheit gilt, und die Genauigkeit h einer Beobachtung dahin, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in den Grenzen x und $x+dx$ bei ihr dieselbe ist, wie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in den Grenzen hx und $h(x+dx)$ bei einer Beobachtung, bei welcher man die Genauigkeit als Einheit betrachtet.

Hr. Bertrand bemerkt, dass diese Definitionen nur für gewisse Fehlergesetze gelten, und untersucht, für welche derselben jeder Beobachtung ein bestimmtes numerisch bestimmbares Gewicht und eine ebensolche Genauigkeit zugeschrieben werden kann.

Sei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen z und $z+dz$ bei einem Beobachtungssystem $\varphi(z)dz$, bei einem anderen $\psi(z)dz$; sei das Gewicht bei dem ersteren gleich der Einheit, bei dem letzteren gleich k, so muss das Verhältnis $\varphi(z)^k/\psi(z)$ constant sein. Ist die Genauigkeit des zweiten Systems gleich h, die des ersten gleich der Einheit, so muss das Verhältnis $\varphi(hz)/\psi(z)$ constant sein. Die Untersuchung führt schliesslich auf die Formel

$$\varphi(z) = Ae^{-m^2z^{2\mu}},$$

und wenn dabei die zweite Derivirte von $\varphi(z)$ für $z=0$ nicht Null ist, so folgt $\mu = 1$, also das Gaussische Fehlergesetz.

Bei keinem anderen Fehlergesetz kann man den Ausdrücken Gewicht und Genauigkeit einen bestimmten und genauen Wert beilegen. Setzt man $\mu = 1$, so hat man das einzige Fehlergesetz, bei welchem der Mittelwert aus n Messungen der wahrscheinlichste ist, und die Bedingung $k/h^2 = 1$ zeigt, dass das Gewicht gleich ist dem Quadrat der Genauigkeit. Ls.

J. Bertrand. Sur la loi des erreurs d'observation. C. R. CV. 1147-1148.

Es werden folgende zwei Sätze mitgeteilt:

I. Eine Grösse ist sehr oft gemessen, und die Beobachtungen sind nach einem durch den Zufall bestimmten Verfahren in Gruppen von je zwei Beobachtungen vereinigt worden; wenn man aus jeder dieser Gruppen den grösseren Fehler ausscheidet, so wird das Verhältnis der Mittelzahl aus den Quadraten dieser grösseren Fehler zur Mittelzahl aus den Quadraten aller Fehler mit steigender Zahl der Messungen gegen den Wert $1 + 2/\pi$ convergiren.

II. Wenn man die Messungen je drei und drei gruppirt, so wird das Verhältnis der Mittelzahl aus den Quadraten der grössten Fehler jeder Gruppe zur Mittelzahl aller Fehler sich der Grenze $1+2\sqrt{3}/\pi$ mit steigender Zahl der Messungen mehr und mehr nähern. Ls.

J. Bertrand. Sur les épreuves répétées. C. R. CV. 1201-1203.

Wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses gleich p, die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens gleich q ist, so wird (nach Bernoulli) nach μ Versuchen das μp-malige Eintreten die grösste Wahrscheinlichkeit haben, und die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen der beobachteten Häufigkeit des Ereignisses und dem wahrscheinlichsten Fall gleich h ist, ausgedrückt durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi pq}}\, e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}.$$

Hr. Bertrand behauptet, dass die von Poisson unter der Bezeichnung des Gesetzes der grossen Zahlen aufgestellte Verallgemeinerung dieses Satzes nicht nur der Strenge, sondern auch der Genauigkeit entbehrt, und sucht solches an einem Beispiel nachzuweisen. Ls.

P. Pizzetti. Sulla compensazione delle osservazioni secondo il metodo dei minimi quadrati. Nota I, II. Rom. Acc. L. Rend. (4) III_2. 230-235, 288-293.

Der erste dieser beiden Aufsätze beschäftigt sich mit der Auflösung der Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Es wird eine Umformung erläutert, welche von Gauss herstammt, wie der Verfasser selbst anführt, und die in vielen Fällen eine grosse Erleichterung der Rechnung herbeiführen kann; insbesondere dann, wenn eine Ausgleichung mit einer grossen Zahl von Bedingungsgleichungen gemacht worden ist, und es sich nun darum handelt, die Rechnung nochmals zu wiederholen, weil noch einige wenige neue Bedingungsgleichungen zu den früheren hinzutreten.

Die besprochene Methode ist diejenige, bei welcher man die grosse Anzahl der Bedingungsgleichungen in Gruppen teilt, und die Ausgleichung, welche man aus der ersten Gruppe abgeleitet, durch die zweite Gruppe corrigirt, und so weiter, bis alle Gruppen erschöpft sind. Weitere Correcturen werden gefunden, indem man das Verfahren wiederholt, und so lange fortsetzt, bis man ein System ausgeglichener Werte gefunden hat, welches allen Gruppen genügt.

Der zweite Aufsatz zeigt, dass das Verfahren eine Grenze hat, oder vielmehr, dass dasselbe wirklich dazu führt, ein System ausgeglichener Werte zu finden, welches gleichzeitig alle gegebenen Bedingungsgleichungen bestmöglich befriedigt. Ls.

A. Port. Sur la résolution dans un cas particulier, des équations normales auxquelles conduit la méthode des moindres carrés. C. R. CV. 491-494.

Es sei

$$y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_i x^i + \cdots + k_m x^m,$$

und es seien durch die Beobachtung n Wertpaare von y und x gegeben:

$$(y_1 x_1),\ (y_2 x_2),\ \ldots,\ (y_n x_n),\quad \text{wo } n > m,$$

es handelt sich um die Bestimmung der Coefficienten k_0, k_1, ... nach der Methode der kleinsten Quadrate.

In dem besondern Fall, dass die Werte x_1, x_2, ..., x_n eine arithmetische Reihe bilden, lassen sich gewisse Hülfsgrössen entwickeln und berechnen, durch welche die spätere Rechnung wesentlich vereinfacht werden kann. Ls.

F. Y. Edgeworth. The empirical proof of the law of error. Phil. Mag. (5) XXIV. 330-342.

Der Hauptzweck dieses Artikels liegt in dem Nachweise, wie die Theorie der Wahrscheinlichkeiten bei der empirischen Bestätigung der Folgerungen mitwirken kann, welche dadurch erzielt werden, dass man Beobachtungen dem Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterwirft. Gbs. (Lp.)

F. Y. Edgeworth. On discordant observations. Phil. Mag. (5) XXIII. 364-375.

Unvereinbare (discordant) Beobachtungen werden als solche definirt, welche das Aussehen haben, in Bezug auf das Gesetz ihres Vorkommens von anderen Beobachtungen abzuweichen, mit denen sie combinirt werden. Es wird ein Versuch gemacht, die verschiedenartige Behandlung solcher Beobachtungen von den Fachleuten durch die Ueberlegung zu vereinfachen, dass verschiedene Methoden den verschiedenen Annahmen über die Ursache einer unvereinbaren Beobachtung entsprechend gestaltet werden, und dass verschiedene Annahmen geeignet sind, je nachdem das Hauptziel oder der verlangte Genauigkeitsgrad verschieden ist. Drei Annahmen werden durchgegangen. Gemäss der ersten giebt es nur zwei Arten fehlerhafter Beobachtungen,

eigentliche Beobachtungsfehler und Versehen (mistakes). Die Häufigkeit der ersteren wird durch die Curve $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ (h constant) dargestellt; die Fehler der zweiten Art kommen nicht innerhalb der Grenzen vor, für welche die erstere gilt. Gemäss der zweiten Annahme ist der Fehlertypus noch die Wahrscheinlichkeitscurve mit nicht veränderlicher Constante, aber der Grad ihrer Anwendbarkeit ist von vornherein nicht so genau bekannt. Der dritten Annahme gemäss sind alle Fehler vom Typus $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$, aber h ist für verschiedene Beobachtungen nicht dieselbe Zahl. Auf der Grundlage dieser Unterscheidungen wird eine Prüfung der Methoden zur Behandlung unvereinbarer Beobachtungen vorgenommen. Diese Methoden beruhen auf den Grundsätzen, 1) dass gewisse grobe Fehler nach gesundem Verstande verworfen werden können, oder auch nach einfacher Induction, als ausgeschieden aus der Berechnung der Wahrscheinlichkeit a posteriori, oder 2) dass Beobachtungen verworfen werden können aus dem Grunde, dass sie durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung als viel schlechter nachgewiesen werden als die beibehaltenen, oder 3) dass alle Beobachtungen beibehalten werden können, aber mit Gewichten behaftet, die durch die Wahrscheinlichkeit a posteriori bestimmt werden. In eine besondere Kategorie wird die Methode gestellt, welche in der Ermittelung des „Centralwerts" der Beobachtungen besteht. In der Abhandlung werden diese Methoden (mit Ausnahme der vierten, die in diesem Aufsatze nicht behandelt wird) auf die drei Annahmen über die Ursache unvereinbarer Beobachtungen angewandt. Gbs. (Lp.)

F. Y. EDGEWORTH. The choice of means. Phil. Mag. (5) XXIV. 268-271.

Ein Nachtrag, mit besonderer Beziehung auf: „Discordant observations", auf einen Artikel über: „Observations and statistics" (Cambr. Phil. Trans. 1885), und auf den Anhang I „On the method of least squares", zu einer Broschüre desselben Ver-

fassers: „Metrelike: or, the method of measuring probability and utility“. (London, The Temple Company. 1887.)

Gbs. (Lp.)

H. H. Turner. On Mr. Edgeworth's method of reducing observations relating to several quantities. Phil. Mag. (5) XXIV. 466-470.

In der Augustnummer des Phil. Mag. 1887 wies Hr. Edgeworth auf eine Methode zur Reduction von Beobachtungen hin, die sich auf mehrere Grössen beziehen, und er meinte, dieselbe könne die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate ersetzen. (Der Artikel, auf den Hr. Edgeworth verweist, steht in Hermathena VI. 279-285. Dublin 1888.) Die Methode wird für den Fall zweier Variabeln x und y wie folgt beschrieben. „Man finde eine angenäherte Lösung durch irgend ein rohes Verfahren (z. B. durch einfache Addition mehrerer der Gleichungen, so dass zwei unabhängige gleichzeitige Gleichungen entstehen). Man nehme den so bestimmten Punkt als einen neuen Anfangspunkt an und substituire in den n (transformirten) Gleichungen für eine der Variabeln x eine Reihe von Werten $\pm\delta$, $\pm 2\delta$, ... Diesen Substitutionen entsprechend haben wir n Gleichungen für y. Für jedes dieser Systeme bestimme man das Mittel (median) gemäss der Laplace'schen Situationsmethode. Diese Reihe von Mitteln bildet einen Ort für den gesuchten Punkt. Ein zweiter Ort wird gefunden, indem man x und y in den eben gegebenen Richtungen umstellt. Der Schnitt dieser Oerter ist der verlangte Punkt. Die Methode kann auf jede Anzahl von Variabeln ausgedehnt werden.“

Hr. Edgeworth hob als Vorteile seiner Methode hervor, 1) sie sei beträchtlich weniger umständlich als die Methode der kleinsten Quadrate, 2) in dem Falle nicht zusammen stimmender Beobachtungen sei sie nicht nur bequemer, sondern auch besser.

Hr. Turner wendet die neue Methode auf ein Beispiel für einen besonderen Fall mit zwei Variabeln an und spricht seine Meinung dahin aus, dass der erste Vorteil zweifelhaft sei und

der zweite dadurch aufgewogen werde, dass die Methode eine einzige Lösung zu geben verfehlt. Gbs. (Lp.)

Deutsche Sterbetafel gegründet auf die Sterblichkeit der Reichsbevölkerung in den 10 Jahren 1871/72 bis 1880/81.

Monatshefte der Statistik des deutschen Reichs.

Diese Sterbetafel ist die erste, welche die Sterblichkeit der deutschen Reichsbevölkerung darstellt, und zugleich die erste, welche nach der von dem internationalen statistischen Congress in seiner letzten Session, Budapest 1876, empfohlenen Methode berechnet ist. Es haben 96,8 Procent der Reichsbevölkerung in Rechnung gezogen werden können, und es ist wohl kaum daran zu zweifeln, dass das Resultat durch das Fehlen von 3 Procent derselben nicht beeinflusst worden ist. Die „Vorbemerkungen“ geben Aufschluss über das der Tafel zu Grunde liegende Material; alle Ausführungen gelten gleichmässig für beide Geschlechter, welche bei allen Rechnungen getrennt gehalten sind, so dass eine Sterbetafel für das männliche und eine Sterbetafel für das weibliche Geschlecht aufgestellt worden ist. Die Sterbenswahrscheinlichkeit für die Frist eines Jahres ist graphisch anschaulich gemacht, und die Tafeln sind durch angefügte Bemerkungen auf das eingehendste und klarste erläutert.

Der zweite Teil des ersten Abschnitts enthält den Vergleich der deutschen Sterbetafel mit den Ergebnissen anderer Sterbetafeln unter genauer Angabe des Materials, welches zur Vergleichung herangezogen worden, und der Ableitung desselben, soweit es zur Beurteilung der Vergleichungszahlen erforderlich war.

Der zweite Abschnitt, zu welchem vier tabellarische Uebersichten gehören, giebt Nachweisungen über das zur Berechnung der deutschen Sterbetafel benutzte Material, und zwar über 1. die Geburten und Sterbefälle, 2. die Volkszählungsergebnisse, 3. die Wanderungen. Diese werden sehr eingehend behandelt und sind auch graphisch anschaulich gemacht.

Der dritte Abschnitt, ebenfalls mit graphischen Darstellungen und tabellarischen Uebersichten, „die Berechnung der Sterbetafel“

betitelt, zeigt, wie die Tafel aus dem Material berechnet worden ist, und erklärt dabei die zur Anwendung gebrachte Methode, indem sie gleichzeitig dieselbe Schritt für Schritt rechtfertigt. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten zeigen, wenn man die höchsten Altersklassen ausnimmt, in ihrer Aufeinanderfolge eine grosse Regelmässigkeit, so dass die kleinen Unregelmässigkeiten auf graphischem Wege und mit Hülfe der Differenzreihen leicht ausgeglichen werden konnten. Nur in den höchsten Altersklassen ist die Ausgleichung unabhängig von den wenig zahlreichen Beobachtungen und als eine rein theoretische zu betrachten.

Ls.

Breslauer Sterbetafel berechnet nach der Sterblichkeit in den zehn Jahren 1876-1885. Breslauer Statistik, Heft 3, Ser. XI.

Diese Sterbetafel ist nach derselben Methode abgeleitet worden, wie die vorläufige für die Jahre 1876/80 hergestellte Tafel. Es sind dabei die auf dem IX. internationalen statistischen Congress zu Budapest (1876) angenommenen Resolutionen zur Geltung gekommen, laut denen die Mortalitätstafeln das Verhältnis der Zahl der Gestorbenen zur Gesamtheit der Gleichaltrigen, aus denen diese Gestorbenen ausschliesslich und vollzählig hervorgehen, zum Ausdruck bringen sollen, wobei der störende Einfluss der Wanderungen möglichst zu beseitigen ist. Die Ausdehnung des Sterblichkeitsmasses auf fünfjährige Altersklassen ist der Kleinheit der Zahlen wegen beibehalten worden. Die Sterblichkeit der beiden Geschlechter ist getrennt ermittelt; über die Gewinnung des Materials, sowie über die bei der Berechnung angewandten Formeln geben die den Tabellen vorangestellten Bemerkungen genügende Auskunft. Ls.

G. A. Hagemann. Einige kritische Bemerkungen zur Aviditätsformel. Aus dem Dänischen von P. Knudsen. Berlin. Friedländer S. 12 S.

A. Zillmer. Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten - Versicherungen. Zweite Aufl. Berlin. Nicolai'sche Verl.-B. 187 S. 4°.

Nachdem die erste im Jahre 1861 erschienene Auflage vollständig vergriffen, veröffentlicht der Verfasser in neuer Darstellung die zweite vermehrte Auflage. Der Zweck ist unverändert der frühere geblieben, es sollen in systematischer, aber elementarer Form die in der Lebensversicherungspraxis vorkommenden Rechnungen dargestellt werden. Fügen wir gleich hinzu, dass dieser Zweck in vollkommener Weise von dem Verfasser erreicht worden ist, und dass das Buch allen denen empfohlen werden darf, welche sich mit diesen Rechnungen bekannt machen wollen, oder welche ein Handbuch wünschen, um diese oder jene Formel nachzuschlagen.

Was über den elementaren Kreis hinausgeht, z. B. die Construction und die Ausgleichung der Sterblichkeitstafeln, die Theorie des Risikos, hat keine Aufnahme gefunden. Auch ist die Beschränkung festgehalten worden, nur solche Versicherungsformen zu behandeln, bei denen die Rechnungsgrundlagen durch die Bestimmung des Zinsfusses und der Sterblichkeitstafel gegeben sind, und bei denen nur noch die Kostenaufschläge bestimmt werden müssen. Weitergehende Versicherungsformen, wie z. B. die sogenannte Militärdienstversicherung, die Invaliden- und Krankenversicherung, sind nicht behandelt worden, sollen vielmehr ebenso wie die mit der Invalidenversicherung combinirte Lebensversicherung einer besondern Darstellung vorbehalten bleiben.

Die Darstellung trägt den Fortschritten, welche die Lebensversicherungstechnik seit 1861 gemacht, vollauf Rechnung, und auch die Abschnitte, welche ihrem Inhalt nach unverändert geblieben, haben teilweise eine Umarbeitung erfahren, mit welcher wir uns wohl einverstanden erklären können.

In der Bezeichnungsweise hat der Verfasser mancherlei Abweichungen gegen die im Jahre 1864 auch von ihm auf Vorschlag des Referenten empfohlene Bezeichnung vorgenommen, um

„zu einer systematischen Weiterentwickelung der Bezeichnungsweise beizutragen". Dagegen wird sich gewiss nichts einwenden lassen; nur hätten wir gewünscht, dass der Verfasser in einem besonderen Abschnitt, entweder im Beginn oder am Ende seines Werkes, ein übersichtliches Register aller von ihm angewandten Bezeichnungen nebst deren Erläuterungen zusammengestellt hätte. Er würde dadurch die Benutzung seines Werkes denjenigen Personen, welche einzelne Formeln nachzuschlagen wünschen, wesentlich erleichtert haben. Ls.

Amministrazione della cassa dei depositi e prestiti. Bilancio tecnico al 31. Dicembre 1884 del Monte. Pensioni per gli insegnanti publici elementari. Roma. 288 S. u. 6 graphische Tafeln.

Diese Veröffentlichung, welche wir wohl dem Herrn Perozzo zuschreiben dürfen, nimmt unser Interesse in mehreren Richtungen in Anspruch. Wir finden eingehende und anregende Untersuchungen über Sterblichkeitsverhältnisse und über Invalidität, lehrreiche Erläuterungen zu den aufgestellten Bilanzen nebst einer Reihe von Tabellen, und in dem Anhang, neben der Erklärung und Ableitung der benutzten Formeln, eine gründliche Untersuchung über das mathematische Risiko.

Während der Verfasser sich in der Theorie der Entwickelung anschliesst, welche Hr. Wittstein über das mathematische Risiko gegeben hat (F. d. M. XVII. 1885. 189), gelangt er bei den Schlussfolgerungen nicht überall zu genau denselben Resultaten wie dieser; er fügt die Auseinandersetzung über die Ursache dieser Abweichungen hinzu. Ls.

H. Grosse. Graphische Behandlung versicherungstechnischer Rechnungen. Assecuranz-Jahrb. VIII. Wien.

Der Verfasser geht von dem Gedanken aus, dass die Einführung der graphischen Methode bei den Berechnungen des Versicherungstechnikers von wesentlichem Nutzen sein würde.

Er erläutert die graphische Ausführung der arithmetischen Rechnungsarten, und giebt sodann eine Reihe von Beispielen über die Anwendung der Operationen bei Aufgaben der Lebensversicherungstechnik.

Wir sind mit dem Verfasser vollkommen darin einverstanden, dass die graphische Darstellung einer nach einem gewissen, wenn auch unbekannten Gesetz fortschreitenden Zahlenreihe ein weit anschaulicheres Bild derselben gewährt als die Betrachtung der Tabelle; wir stimmen ihm auch darin bei, dass die Genauigkeit, mit welcher die Lebensversicherungstechniker ihre Resultate auf vier oder mehr Decimalen zu berechnen suchen, völlig wertlos ist; aber wir bezweifeln, dass die Praxis die graphische Methode in der Lebensversicherung mit Vorteil wird verwerten können. Es wird auf einen Versuch dabei ankommen, wobei jedenfalls das Verständnis der Rechnungsresultate gewinnen wird.

Ls.

WITTSTEIN. Weitere Folgerungen aus der Theorie des mathematischen Risiko der Versicherungs-Gesellschaften. Assecuranz-Jahrb. VIII. Wien.

In seinem Bericht über „das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften“ (F. d. M. XVII. 1885. 189) hat Referent darauf hingewiesen, wie man ein Risiko erster, zweiter, dritter Ordnung unterscheiden könne, und dass das Gesamt-Risiko sich dann als die Differenz zwischen dem Gewinn und dem Einsatz darstellt. Dieser Gedanke wird von dem Verfasser in dem ersten Teil des vorliegenden Aufsatzes näher ausgeführt. In dem zweiten Teil zeigt er, dass bei Berechnung des Risikos für eine Lebensversicherung die Versicherungssumme nur mit dem Betrag, um welchen sie die Prämien-Reserve übersteigt, in Rechnung zu stellen ist.

Ls.

G. KING. On the numerical calculation of the values of complex benefits by means of formulas of approximate summation. Actuaries J. XXVI. 276.

Der Verfasser glaubt nicht, dass er viel Neues bringen könne; das Capitel der näherungsweisen Summation sei nahezu erschöpft. Aber es fehle noch an numerischen Illustrationen, um die Formeln mehr in den allgemeinen Gebrauch einzuführen.

Die Formel, welche der Verfasser bevorzugt, ist Hardy's Formel

$$(A) \qquad \int_0^{6h} u_t dt = h\,\{0{,}28(u_0+u_{6h})+1{,}62(u_h+u_{5h}+2{,}2u_{3h}\},$$

aus welcher er ableitet

$$\int_0^{w} u_t dt = h\,\{0{,}28\,u_0+1{,}62\,u_h+2{,}2\,u_{3h}+1{,}62u_{5h}+0{,}56u_{6h}+1{,}62\,u_{7h}\}.$$

w ist das äusserste Alter, und h ist so zu wählen, dass $7h$ an die Grenze der Mortalitätstafel fällt oder dieselbe überschreitet, so dass es 0 wird. Auch u_0 wird im allgemeinen keiner Berechnung bedürfen, und die Formel kann auf vier Glieder beschränkt werden.

Es folgt eine grössere Anzahl von ausgerechneten Beispielen.

Ls.

Putzler. Ueber Wittwenkassen, speciell über die Görlitzer Städtische Wittwenkasse. Görlitz. E. Remer. 32 S. 4°.

Der Verfasser sagt in der Einleitung, er wolle „einem engeren Kreise einen klaren Einblick verschaffen in das Wesen der Versicherungswissenschaft“. Den Anlass zu der Abhandlung habe ihm seine wiederholte Beschäftigung mit der Görlitzer städtischen Wittwenkasse für Communal-Beamte und Lehrer gegeben. Die Arbeit solle keine wissenschaftlichen Forschungen bringen; sie müsse sogar von der Behandlung in mathematischer Form absehen, um den Kreisen, für welche sie bestimmt sei, zugänglich zu sein.

Die in dieser Weise präcisirte Aufgabe ist von dem Verfasser gelöst worden; er sieht dabei aber von jeder allgemeineren Betrachtung vollständig ab, und führt nur dasjenige an, was unmittelbar für das Verständnis von Wittwen- und Waisenkassen erforderlich ist. Mit Rücksicht hierauf scheint uns die Einleitung

zu weit zu gehen, wenn der Verfasser seine Absicht dahin ausspricht, er wolle einen klaren Einblick in die Versicherungswissenschaft geben. Man erwartet in Folge dieser Ankündigung mehr als man in der Abhandlung findet. Ls.

H. ZIMMERMANN. Zur mathematischen Statistik. Entgegnung. Schlömilch Z. XXXII. 62-64.

W. KÜTTNER. Zur mathematischen Statistik. Schlusswort. Schlömilch Z. XXXII. 234-243.

Es ist das die Fortsetzung des Streites über einen Satz aus der Wahrscheinlichkeitslehre, über welche wir bereits (F. d. M. XVIII. 1886. 186-187) referirt haben. Ls.

G. KING. Friendly societies levies. Actuaries J. XXVI. 389.

Eine Friendly Society (Sterbekasse) hat m Mitglieder und beim Tode eines Mitgliedes hat jedes überlebende Mitglied den Beitrag 1 zu leisten. Es fragt sich, wie gross ist W, der gegenwärtige Wert aller künftigen Beiträge eines Mitgliedes?

Zur Lösung dieser Aufgabe hat Herr G. F. Hardy im Jahre 1880 drei verschiedene Formeln aufgestellt, von denen er die Formel

$$W = \frac{m \,.\, m-1}{2} \bar{A}(xx)$$

als streng richtig bezeichnet. $\bar{A}(xx)$ bedeutet den gegenwärtigen Wert einer Versicherung auf zwei Leben, zahlbar beim Tode des Zuerststerbenden.

Herr King teilt für diese Formel einen Beweis von Herrn H. Ansell mit und einen Beweis von ihm selbst. Ls.

G. F. HARDY. Friendly societies levies. Actuaries J. XXVI. 478.

Der Verfasser erweitert seine Formel auf den Fall, dass die Friendly Society auch bei dem Tode der Frau eines Mitgliedes einen Beitrag erhebt, und wendet sich dann zu den Ein-

wendungen, welche Herr King vom praktischen Standpunkt aus gegen die Formel erhoben hat. Ls.

L. Grossmann. Die Mathematik im Dienste der National-Oekonomie mit Hinweis auf die Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen. Wien. M. Stern.

Von dieser Veröffentlichung ist eine Lieferung im Jahr 1886, eine zweite im Jahr 1887 erschienen.

Das erste Heft enthält: „Theorie und Lösung der irreductibelen transcendenten Gleichungen". Die Lösung wird durch ein methodisches, wiederholt angewandtes Näherungsverfahren angestrebt, nachdem es gelungen ist, die Gleichung so umzuformen, dass das Verfahren angewandt werden kann. In dem zweiten und vierten Aufsatz wird diese Methode auf verschiedene Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung angewandt, im dritten eine Anwendung zur Berechnung von Prämientarifen mitgeteilt. Die Aufsätze des zweiten Heftes beziehen sich teils auf die Versicherungstechnik, Lebensversicherung und Feuerversicherung, teils auf die Finanztechnik. Ls.

J. Massau. Calcul des cotisations des sociétés de secours mutuels. Paris. Gauthier-Villars.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

Ch. Biehler. Sur les séries. Nouv. Ann. (3) VI. 243-251.

Eine Reihe positiver Glieder u_1, u_2, u_3, ... ist divergent, wenn eine Function $\varphi(n)$ von der Art sich finden lässt, dass die Grenze von $u_n \,.\, \varphi(n)$ einen von Null verschiedenen Wert hat und die Reihe $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, ... divergent ist; sie ist dagegen convergent, wenn eine Function $\varphi(n)$ von der Art existirt, dass die Grenze von $u_n \,.\, \varphi(n)$ einen endlichen Wert (der auch gleich Null sein kann) hat und die Reihe $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, ... convergent ist.

Der Beweis dieser Sätze beruht darauf, dass es eine Zahl μ von der Beschaffenheit giebt, dass für einen bestimmten Wert von n und alle grösseren $u_n \,.\, \varphi(n)$ im ersten Fall grösser, im zweiten kleiner ist als μ und entsprechend $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ grösser resp. kleiner als

$$\mu\left[\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n+1)} + \cdots + \frac{1}{\varphi(n+p)}\right].$$

Durch Anwendung dieser Sätze ergiebt sich, dass die Reihen

$$\Sigma \frac{1}{(\log n)^{\mu}}, \quad \Sigma \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}, \quad \Sigma\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$$

divergent sind, dagegen die Reihe

$$\Sigma \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ \ 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

convergent ist. Ferner werden die Convergenzbedingungen für diejenigen Reihen aufgestellt, deren allgemeines Glied ist:

$$\frac{f(n)}{F(n)},\quad \log\left[1+\frac{1}{\varphi(n)}\right],\quad n(\log n)^\mu,\quad n\log n(\log\log n)^\mu,$$

$$\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^\mu,\quad \left[\frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)\ldots(2\lambda+2n-1)}{(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2n)}\right]^\mu,$$

$$\left\{\frac{(2\lambda+\mu)(4\lambda+\mu)\ldots(2n\lambda+\mu)}{(3\lambda+\mu)(5\lambda+\mu)\ldots[(2n+1)\lambda+\mu]}\right\}^\nu,\quad \frac{n^n x^n}{n!}.$$

Im Anschluss an die Reihe $\Sigma\log\left[1+\frac{1}{\varphi(n)}\right]$ wird auch das bekannte Convergenzkriterium für ein unendliches Product abgeleitet. Wz.

J. L. W. V. Jensen. Om Raabe og Duhamel's Convergensbetingelse. Zeuthen T. (5) IV. 15-16. (1886).

Kurze Herleitung des genannten Convergenzkriteriums. Vergl. F. d. M. XVI. 1884. 192. Gm.

M. d'Ocagne. Sur certaines classes de suites récurrentes. C. R. CIV. 419.

Definirt man eine Folge u durch die Anfangsbedingungen:

$$u_1 = u_2 = \cdots = u_{p-1} = 0,\quad u_p = 1,$$
$$u_{p+n} = u_{p+n-1} + u_{p+n-2} + \cdots + u_n,$$

so ist:

$$u_{p+n} = P(n) + 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{k=E\left(\frac{n-1}{p+1}\right)} (-1)^k \frac{n-k(p-1)}{k} C_{n-pk-1}^{k-1}\, 2^{n-1-k(p+1)}.$$

Darin bedeutet E die bekannte arithmetische Function, C_μ^ν den Binomialcoefficienten, $P(n)$ eine arithmetische Function von n, welche die Werte -1 oder $+1$ annimmt, wenn n ein ungerades oder gerades Vielfaches von $p+1$ bedeutet, in allen andern Fällen jedoch verschwindet. Wz.

P. Mansion. Rapport sur le Mémoire intitulé: Sur un tableau numérique et sur son application à certaines transcendantes par M. E. Catalan. Belg. Bull. XIII. 477-481.

Es sei S eine unbedingt convergente Reihe, dann ist

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots,$$

vorausgesetzt dass

$$\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \cdots, \\ S_1 &= u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + \cdots, \\ S_2 &= u_2 + u_6 + u_{10} + u_{14} + u_{18} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \Sigma_1 &= u_1 + u_2 + u_4 + u_8 + u_{16} + \cdots, \\ \Sigma_2 &= u_3 + u_6 + u_{12} + u_{24} + u_{48} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es ist auch $P = P_1 P_2 P_3 \ldots = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \ldots$, wenn man annimmt $u_n = \log v_n$, $S = \log P$, $S_n = \log P_n$, $\Sigma_n = \log \Pi_n$. Der Verf. giebt zahlreiche Anwendungen von dieser Formel. Beispiel: Ist $u_n = q^n$, so folgt:

$$\frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \frac{q^4}{1-q^8} + \cdots = F(q) + F(q^3) + F(q^5) + \cdots,$$

$$F(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdots.$$

Mn. (Lp.)

F. J. Studnička. Eine Bemerkung über unendliche Reihen. Cas. XVI. 81. (Böhmisch.)

Behandelt nach Thomae die Eigenschaft der unendlichen Reihen mit ungleich bezeichneten Gliedern, dass ihre Summe von der jeweiligen Anordnung derselben abhängt. Std.

O. Tognoli. Sulle serie di potenze. Batt. G. XV. 155-160.

E. Catalan. Lettera. Batt. G. XXV. 311-312.

Nach einigen vorbereitenden Sätzen — von diesen ist, wie Herr Catalan bemerkt, der erste bereits von Abel als unrichtig nachgewiesen — stellt Herr Tognoli die notwendige und hinreichende Bedingung auf, dass eine Potenzreihe unbedingt convergire, nicht nur innerhalb des zugehörigen Convergenzkreises, sondern auch auf dem Umfange desselben. Wz.

M. Lerch. Un théorème de la théorie des séries. Acta Math. X. 87-88.

Ist in der Reihe der ganzen positiven Zahlen $m_0, m_1, m_2, \dots$ jedes Glied ein Teiler aller folgenden, sind ferner die reellen Bestandteile $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ der complexen Grössen $c_0, c_1, c_2, \dots$ positiv und von der Art, dass $\Sigma\gamma_\nu$ divergent ist, so wird durch die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

eine Function von x definirt, welche nur im Innern des Kreises $|x| \leqq 1$ existirt. Wz.

L. Lecornu. Sur les séries entières. C. R. CIV. 349-352.

Wenn es auf dem Umfang einer Potenzreihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

nur einen singulären Punkt u giebt, so ist:

$$u = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Wz.

T. J. Stieltjes. Note sur la multiplication de deux séries. Nouv. Ann. (3) VI. 210-215.

Ist eine der beiden Reihen: $t = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, $s = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ absolut (d. i. unabhängig von der Summationsordnung) convergent, die andere nur convergent, so ist die Reihe $\Sigma u_\alpha v_\beta$ nicht absolut convergent. Der Herr Verfasser giebt an, in welcher Reihenfolge die Summation auszuführen ist, damit die Reihe convergire (und das Product st darstelle). Als Beispiele dienen:

(1) $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots; \quad b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots.$

(2) $f(1) + \frac{f(2)}{2^s} + \frac{f(3)}{3^s} + \cdots; \quad g(1) + \frac{g(2)}{2^s} + \frac{g(3)}{3^s} + \cdots.$

Wz.

Ch. Biehler. Sur les développements en séries des fonctions rationnelles. Nouv. Ann. (3) VI. 485-492.

Der Herr Verfasser geht von der bekannten Reihe für $1:(x-a)$ aus und beweist ihre Convergenz für $|x| < a$, indem er zeigt, dass das Restglied für $n = \infty$ verschwindet; sodann bildet er die Ableitung $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und gewinnt dadurch die Reihe für $1:(x-a)^\alpha$, deren Convergenz in analoger Weise dargethan wird; durch Multiplication der Reihen für $1:(x-a)^\alpha$, $1:(x-b)^\beta$, ..., $1:(x-l)^\lambda$ gelangt er endlich zu der Reihe für $1:F(x)$, wenn $F(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$ ist. So zeigt der Herr Verfasser auf elementarem Wege den bekannten Satz, dass eine rationale Function von x in eine nach wachsenden Potenzen der Veränderlichen fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, welche für alle Werte von x convergirt, deren absoluter Betrag kleiner ist als der kleinste Wert von x, für welchen die rationale Function unendlich gross wird. Wz.

C. Guichard. Généralisation de la série de Taylor.

Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 61-64.

Es seien

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{A_p}{p!} x^p; \quad R(x) = \sum_0^\infty \frac{B_p}{p!} x^p$$

Functionen von x, die in der ganzen Ebene holomorph sind; es sei

$$R_{-n}(x) = \sum_0^\infty \frac{B_p}{(n+p)!} x^p$$

das „Integral n^{ter} Ordnung von $R(x)$"; es sei die Reihe $B_0+B_1t+B_2t^2+B_3t^3+\cdots$ für alle Werte von t convergent und stelle eine Function von t dar, welche keine Nullpunkte besitzt, mithin von der Form $e^{\varphi(t)}$ ist. Leitet man dann für $e^{-\varphi(t)}$ die Reihe $B'_0+B'_1t+B'_2t^2+B'_3t^3+\cdots$ ab und setzt:

$$C_p = A_0B_p + A_1B_{p-1} + A_2B_{p-2} + \cdots + A_pB_0,$$

so kann die Function $f(x)$ in die nach den Integralen $R'_{-n}(x)$ der Function

$$R'(x) = \sum_0^\infty \frac{B'_p}{p!} x^p$$

fortschreitende Reihe

$$f(x) = \sum_0^\infty C_n R'_{-n}(x)$$

entwickelt werden. Wz.

O. Callandreau. Sur le développement des fonctions en séries par la formule de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle. S. M. F. Bull. XV. 23-33.

O. Callandreau. Sur la série de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle. C. R. CIV. 38-41.

Wenn sich in einem endlichen Intervall $0 \leqq x \leqq a$ $(a < 1)$ eine Function durch die Maclaurin'sche Reihe darstellen lässt, so kann die Darstellung fortgesetzt werden, soweit die Ableitungen der Function stetig sind und die Reihe convergent ist; vorausgesetzt wird noch, dass die Function für die in Betracht kommenden Werte von x genau definirt ist, und zwar, ebenso wie auch ihre Ableitungen, überall durch denselben Ausdruck.

Der Beweis wird zunächst für eine Reihe

$$(1) \qquad f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\cdots$$

geführt, deren Coefficienten sämtlich positiv sind und von einem bestimmten Werte des n an nicht wachsen; ist dann

$$(2) \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\cdots(n-1)}f^n(\theta x)$$

der Rest der Reihe, so wird gezeigt, dass für hinreichend grosse Werte von n die Grösse θx im Intervall $a \leqq x \leqq 1-\varepsilon$ den Wert a nicht erreichen kann; daher kann aus (1) für $f^n(\theta x)$ eine Reihe hergeleitet werden, durch deren Einsetzung in (2) sich für R_n eine obere Grenze ergiebt, die mit wachsendem n gegen Null convergirt. Wz.

O. Stolz. Ueber die Lambert'sche Reihe. Wien. Ber. XCV. 659-681.

Die Summe der Lambert'schen Reihe

$$F(x,r,m) = 1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{m}{p}\binom{m+p(r+1)-1}{p-1}x^p$$

ist, wie von Euler aus der Functionalgleichung:

$$F(x,r,m)-F(x,r,m-1) = xF(x,r,m+r)$$

abgeleitet worden ist, gleich X_r^m, wo X_r eine Wurzel der

Gleichung:

$$X_r - 1 = x X_r^{r+1}$$

bedeutet. Um diesen Satz streng zu beweisen, zeigt der Herr Verfasser zunächst, dass für jeden reellen und complexen Wert von r, mit Ausnahme der reellen irrationalen zwischen 0 und -1 gelegenen, der Convergenzradius der Lambert'schen Reihe gleich

$$|r^r| : |(r+1)^{r+1}|$$

ist, worin r^r, r^{r+1} die Hauptwerte der bezüglichen Potenzen sind. Sodann wird der Euler'sche Satz auf eine neue Art begründet und auf den Fall eines reellen irrationalen, zwischen 0 und -1 gelegenen Wertes von r ausgedehnt und bewiesen, dass auch hier der angeführte Ausdruck für den Convergenzradius gilt.

Wz.

O. Schlömilch. Beiträge zur algebraischen Analysis. Hoffmann Z. XVIII. 561-576.

Es handelt sich darum, die Convergenz gewisser Reihen (u. a. der Lambert'schen) mit elementaren Hülfsmitteln herzuleiten.

Lg.

Ch. Hermite. Extraits de deux lettres adressées à M. Craig. American J. IX. 381-388.

1. Es sei zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 2\pi$

$$f(x) = \Sigma A_m e^{mix} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

dann ist

$$\Phi(z) = \frac{1}{4i\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cot \frac{x-z}{2} \, dx$$

eine in der ganzen Ebene der complexen Veränderlichen z eindeutige Function, für welche die Abscissenaxe ein Schnitt (coupure) ist, der Art, dass für zwei einander unendlich nahe Punkte N und N', von denen der eine oberhalb, der andere unterhalb der Axe liegt, die Differenz $\Phi(N) - \Phi(N')$ den Wert $f(x)$ hat. Der Beweis beruht auf Eigenschaften der Integrale von der Form

$$\int_0^{2\pi} e^{mix} \cot \frac{x-z}{2} \, dx.$$

II. Der in I gegebene Satz ist schon von Herrn Lipschitz (Lehrbuch der Analysis, Bd. II, S. 724) aufgestellt; der dort befindliche Beweis wird reproducirt.

III. Der von Gauss (Werke Bd. II, S. 269) für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Relation $x^2+y^2 \leqq A$ abgeleitete Ausdruck wird für $Ay^2+Bx^2 \leqq N$ verallgemeinert.

IV. Aus der zuerst von Herrn Weierstrass gegebenen Darstellung der Function $\sin x$ durch ein unendliches Product ergeben sich mittels der Gleichungen

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} \quad \text{und} \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

für $\cos x$ die beiden Ausdrücke

$$\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{n\pi}\right)e^{\frac{2x}{n\pi}}\right] \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right],$$

deren Uebereinstimmung bewiesen wird. Wz.

A. H. Anglin. Sur le coefficient du terme général dans certains développements. S. M. F. Bull. XV. 193-198.

Unter der Voraussetzung, dass n ein Vielfaches von m ist, wurde früher (Journ. de Math. (4) II. 139; F. d. M. XVIII. 221) vom Herrn Verfasser bewiesen, dass der Coefficient von x^{n+mr} in der Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{B_m(s_m x^m-1)^r}{(1-a^m x^m)(1-b^m x^m)(1-c^m x^m)}$$

gleich

$$\frac{\Sigma a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)}{k}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} s_m^r h_n - r s_m^{r-1} h_{n+m} + \frac{r(r-1)}{1.2} s_m^{r-2} h_{n+2m} \\ - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} s_m^{r-3} h_{n+3m} + \cdots + (-1)^r h_{n+rm} \end{array} \right.$$

ist. In dieser Arbeit zeigt der Herr Verfasser die Richtigkeit des Satzes unabhängig von der Beschränkung, dass n ein Vielfaches von m ist. Wz.

P. Appell. Développement en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel $\Delta F = 0$. C. R. CII. 1439-1442.

Die Herleitung der aufgestellten Formeln bildet den Inhalt einer Abhandlung, die demnächst im Journ. de Math. erscheinen wird.

Wz.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

Weill. Sur la division des polynômes. Nouv. Ann. (3) VI. 83-85.

Es seien $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ganze Zahlen; $a, b, \dots$ die Wurzeln des Polynoms $f(x) = 1+\alpha x+\beta x^2+\dots+\lambda x^n$; entwickelt man dann den Quotienten $1:f(x)$ nach Potenzen von x, so ist der Coefficient von x^n

$$-\frac{1}{a^{n+1}f'(a)}-\frac{1}{b^{n+1}f'(b)}-\dots$$

eine ganze Zahl. Dieser Satz wird auf die Polynome $1+x+x^2$ und $1-x-x^2$ angewandt.

Wz.

G. Teixeira. Extrait d'une lettre à M. J. Tannery. Darb. Bull. (2) IX. 193-194.

Bedeutet x eine reelle Veränderliche, grösser als -1, so ist für jeden beliebigen Wert derselben die Summe der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2x(1+x)^{m-1}}{[1+(1+x)^{m-1}][1+(1+x)^m]} = \lim_{m=\infty}\frac{1-(1+x)^m}{1+(1+x)^m},$$

mithin gleich $+1$, 0 oder -1, je nachdem x negativ, Null oder positiv ist.

Wz.

A. Gutzmer. Note on the binomial-theorem coefficients. Mess. (2) XVI. 190-192.

Von dem bekannten Satze ausgehend, dass für ein positives ganzzahliges ν:

$$\Sigma\binom{\nu}{k} = 2^\nu \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$$

ist, ferner dass

$$\Sigma 2^\nu = 2^{n+1}-2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, und unter Berücksichtigung ähnlicher einfacher Formeln, werden diese letzteren Relationen in der Gestalt von Sätzen über die Binomialcoefficienten ausgesprochen. Lp.

L. Saalschütz. Eine Erweiterung des Factoriellensatzes. Schlömilch Z. XXXII. 250-254.

Ausgehend von einer particulären Lösung einer von Herrn Schlömilch behandelten Aufgabe (vergl. F. d. M. XVII. 1885. 228) beweist der Herr Verfasser folgenden Satz: „Bezeichnen μ, ν, δ willkürliche Grössen, n eine positive ganze Zahl, und setzt man

$$\mu+\varrho+(n+1-x)n\delta = \overset{x}{\alpha}_\varrho, \quad \nu+\tau+xn\delta = \overset{x}{\beta}_\tau;$$
$$\varrho = 1, 2, \ldots, n-x, \quad \tau = 1, 2, \ldots, x-1;$$

so ist die Summe der p^{ten} Potenzen dieser Grösse $\overset{x}{\alpha}_\varrho$, $\overset{x}{\beta}_\tau$ durch einen Ausdruck p^{ten} Grades in x darstellbar“, und gelangt dadurch zu einigen summirbaren Reihen. Wz.

J. Cockle. On binomial biordinals. Phil. Mag. (5) XXIV. 249-252.

Der letzte aus einer Reihe von Aufsätzen, die unter mannigfachen Titeln in verschiedenen Zwischenräumen veröffentlicht sind, nämlich in Phil. Mag. (5) XII. 189-196 (1881), XIII. 44-46, 357-359 (1882). Gbs. (Lp.)

E. Catalan, W. J. C. Sharp. Solution of question 8217. Ed. Times XLVI. 51-52.

In einer Reihe, deren Glieder A_n durch die recurrirende Formel

$$n^2 A_n - 4(3n^2 - 3n + 1) A_{n-1} + 32(n-1)^2 A_{n-2} = 0$$

gegeben werden, wobei $A_0 = 1$, $A_1 = 4$ angenommen ist, sind alle Glieder ganze Zahlen. Lp.

Weinmeister. Eingrenzung der Zahl e auf geometrischem Wege. Schlömilch Z. XXXII. 256.

Anknüpfend an die Quadratur der Hyperbel erhält der Herr Verfasser die Formel:

$$(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2+\delta}} < e < (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}}. \qquad \text{Wz.}$$

O. Schlömilch. Ueber die Basis der natürlichen Logarithmen. Schlömilch Z. XXXII. 191-192.

Die Existenz der Zahl e wird dadurch bewiesen, dass bei unendlich wachsendem m die Potenz $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ beständig wächst, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ beständig abnimmt (ohne negativ zu werden), wähwährend beide gegen dieselbe Grenze convergiren. Wz

---

Ch. Biehler. Sur la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment. Nouv. Ann. (3) VI. 60-67.

Es sei m eine positive ganze Zahl.

1) Es sei x reell und positiv; dann ist für einen endlichen Wert von m

$$1 > \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right) > 1-\frac{p(p-1)}{2m};$$

multiplicirt man diese Ungleichung mit $\frac{x^p}{p!}$ und addirt dieselbe für $p = 2, 3, \ldots, m$, so sieht man, wenn $e_m(x)$ die Summe der $m+1$ ersten Glieder der Exponentialreihe bezeichnet, dass

$$\text{(u)} \qquad e_m(x) > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m > e_m(x) - \frac{x^2}{2m}\, e_{m-2}(x)$$

ist. Demnach liegt $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ zwischen zwei Ausdrücken, welche für ein unendlich wachsendes m die Grenze e^x haben; mithin hat $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ dieselbe Grenze.

2) Es sei x negativ oder complex und $|x| = r$; dann ist

$$\text{(v)} \qquad \left|e_m(x) - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m\right| < e_m(r) - \left(1+\frac{r}{m}\right)^m;$$

aus (u) ergiebt sich:

$$0 < e_m(r) - \left(1+\frac{r}{m}\right)^m < \frac{r^2}{2m}\, e_{m-2}(r).$$

Demnach liegt die rechte, mithin auch die linke Seite der Formel (v) zwischen 0 und einem Ausdruck, der für ein unendlich wachsendes m die Grenze Null hat; daher hat $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ die Grenze e^x.

Im Anschluss hieran wird noch die Formel: $e^{x+y} = e^x \,.\, e^y$ bewiesen. Wz.

P. G. Tait. On the value of $\Delta^n 0^m/n^m$ when n and m are very large. Edinb. M. S. Proc. V. 83-84.

Hr. Tait führt eine Aufgabe der kinetischen Gastheorie an, bei deren Lösung der Wert von $\Delta^n 0^m/n^m$ für grosse Werte von m und n verlangt wird, und weist darauf hin, dass Laplace (Théorie analytique des probabilités, Livre II, Chap. 11, §. 4) eine recht angenäherte Formel gegeben hat, welche in den normalen englischen Lehrbüchern über endliche Differenzen nicht zu finden ist. Die Laplace'sche Formel hört auf, für sehr grosse Werte von m und n angenäherte Resultate zu geben, wenn beide Zahlen von derselben Grösse der Ordnung sind. Die erforderliche Abänderung der Formel wird durch Hrn. Cayley in einer Abhandlung gegeben, die am 4. April 1887 vor der Royal Society of Edinburgh gelesen worden ist. Gbs. (Lp.)

A. CAYLEY. Note on a formula for $\Delta^n 0^i \div n^i$, when n, i are very large numbers. Edinb. Proc. XIV. 149-153.

Der Artikel bezieht sich auf einen von Laplace (Théorie analytique des probabilités. 2[me] éd. Paris 1814, p. 194) gegebenen Näherungswert. Der Verf. gewinnt ein aus der Formel

$$\frac{\Delta^n 0^i}{n^i} = 1 - \frac{n}{1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^i + \cdots$$

abgeleitetes Resultat. Hierin ist i, wenn n gross ist, so gross, dass der zweite Term $n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^i$ nur einen unbedeutenden Betrag giebt, der gleich r_1 sein möge, und der Näherungswert ist dann $1-r_1+\dfrac{r_1^2}{1.2}-\cdots$; d. i. eine convergente Reihe mit der Summe e^{-r_1}. Cly. (Lp.)

E. LAKENMACHER. Näherungsausdruck für π. Hoppe Arch. (2) V. 352.

$$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = 3,141641\cdots = \pi + 0,000048\cdots$$

Wz.

E. OEKINGHAUS. Eine Reihenentwickelung für π. Hoppe Arch. (2) V. 218-219.

E. OEKINGHAUS. Bemerkung zu einer Reihe. Hoppe Arch. (2) V. 219-220.

Durch Umformung der Reihe:

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\pi = 1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{11}-\cdots$$

ergiebt sich

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{1728} = \frac{1}{1.5.7.11} - \frac{3}{13.17.19.23} + \frac{5}{25.29.31.35} - \frac{7}{37.41.43.47} + \cdots$$

Wz.

J. C. ADAMS. Supplementary note on the values of the Napierian logarithms of 2, 3, 5, 7 and 10, and of the modulus of common logarithms. Lond. R. S. Proc. XLII. 22-25.

Bezieht sich auf einen früheren Aufsatz des Verfassers und auf Hrn. Glaisher's Artikel über Logarithmen in der Encyclopaedia Britannica. Des Verfassers frühere Ergebnisse konnten nicht über 262 Decimalstellen hinaus für zuverlässig erachtet werden. Er hat jetzt die auf die ersten 260 Stellen folgenden Decimalen berechnet und Resultate erhalten, die sicherlich bis 272 und wahrscheinlich bis 273 Decimalstellen als richtig zu halten sind. Cly. (Lp.)

P. G. TAIT. An exercise on logarithmic tables. Edinb. M. S. Proc. V. 101-102.

In welchen Fällen sind die Stellen einer Zahl und ihres Logarithmus für die Basis 10 identisch? Gbs. (Lp.)

F. J. STUDNIČKA. Ueber das hyperbolische Analogon der Ludolfine. Cas. XVI. 193. (Böhmisch.)

Setzt Laisant gegenüber $\frac{1}{2}\Pi$ statt Π fest und entwickelt eine ganze Reihe neuer Reihenausdrücke für gewisse hyperbolische Hauptwerte. Std.

O. SCHLÖMILCH. Ueber den Rest der Reihe für arc sin$x$. Schlömilch Z. XXXII. 368-369.

Setzt man:

$$C_0 - C_1\frac{1-x}{1+x} + C_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n C_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n = \varphi(x, n),$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{1(n)_1}{2n-1}, \quad C_2 = \frac{1.3.(n)_2}{(2n-1)(2n-3)},$$

$$C_3 = \frac{1.3.5(n)_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}, \ldots,$$

so lässt sich für den Rest der Reihe von arc sin$x$ leicht die

Form ableiten:

$$R_{n+1} = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots \quad 2n}\left(\frac{x-\vartheta x}{1-\vartheta x}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{2\sqrt{x}\varphi(\vartheta x, n)}{\sqrt{1+\vartheta x}},$$

woraus ohne Mühe ersichtlich ist, dass $\lim R_{n+1} = 0$ ist, so lange x das Intervall von 0 bis 1 nicht überschreitet. Wz.

F. J. STUDNIČKA. Neue Ableitung der Euler'schen Tangenten- und Cotangentenreihe. Prag. Ber. 103-107.

Geht man von den Formeln:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots,$$

$$(2) \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \cdots,$$

worin $x = \frac{m}{n}\frac{\pi}{2}$ ist, während $a_1, a_3, a_5, \ldots, b_1, b_3, b_5, \ldots$ die bekannten Werte haben, aus und subtrahirt von ihnen entsprechend die auf einfacher Division beruhenden Gleichungen:

$$(1_a) \qquad \frac{2mn}{n^2-m^2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{m}{n}\frac{4}{\pi} + \frac{m^3}{n^3}\frac{4}{\pi} + \frac{m^5}{n^5}\frac{4}{\pi} + \cdots,$$

$$(2_a) \qquad \frac{4mn}{4n^2-m^2}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{m}{n}\frac{1}{\pi} + \frac{m^3}{n^3}\frac{1}{4\pi} + \frac{m^5}{n^5}\frac{1}{16\pi} + \cdots,$$

so erhält man die von Euler aufgestellten Formeln (Introd. in. Anal. inf. § 135):

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{2mn}{n^2-m^2}\frac{2}{\pi} + \frac{m}{n}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right] + \frac{m^3}{n^3}\left[a_3\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{4}{\pi}\right] + \cdots,$$

$$\operatorname{cotg}\frac{m}{n}\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}\frac{2}{\pi} - \frac{4mn}{4n^2-m^2}\frac{1}{\pi} - \frac{m}{n}\left[b_1\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\right] - \frac{m^3}{n^3}\left[b_3\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{4\pi}\right] - \frac{m^5}{n^5}\left[b_5\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{.16\pi}\right] - \cdots.$$

Wz.

P. APPELL. Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des premiers nombres entiers. Nouv. Ann. (3) VI. 312-321.

P. Appell. Sur les valeurs approchées des polynômes de Bernoulli. Nouv. Ann. (3) VI. 547-554.

Durch die Aufgabe: „Eine ganze Function $\varphi_p(x)$ von x zu bilden, welche für $x = 0$ verschwindet und der Bedingung:

$$\varphi_p(x) - \varphi_p(x-1) = x^p$$

genügt, worin p eine ganze Zahl bedeutet“, gelangt der Herr Verfasser zu den Bernoulli'schen Polynomen:

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}, \cdots$$

und leitet verschiedene Eigenschaften derselben ab.

Durch Anwendung einer von Herrn Darboux gegebenen Methode (vergl. F. d. M. X. 1878. 279) auf die Function

$$\frac{e^{z(x+1)}-1}{e^z-1} = 1 + \varphi_0(x) + \frac{z}{1}\varphi_1(x) + \frac{z^2}{2!}\varphi_2(x) + \frac{z^3}{3!}\varphi_3(x) + \cdots$$

gewinnt der Herr Verfasser, wenn n eine sehr grosse Zahl bedeutet, Näherungswerte von $\varphi_{2n}(x)$ und $\varphi_{2n+1}(x)$, aus denen sich auch ein Kriterium für die Convergenz der Reihe

$$\frac{1}{z} + \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right]\varphi_0(x) + \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2}\right]\varphi_1(x) + \left[\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z+1)^3}\right]\varphi_2(x) + \cdots$$

ergiebt. Wz.

J. Slavík. Ueber die Summe der k^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen. Cas. XVI. 121.

Unter Verwendung des Binomialsatzes wird die Formel

$$(n+1)[(n+1)^{k-1} - 1] = k_1 \sum_1^n n^{k-1} + k_2 \sum_1^n n^{k-2} + \cdots + k_{k-1} \sum_1^n n,$$

aus welcher sich die Lösung der genannten Aufgabe in recurrenter Weise ergiebt, abgeleitet. Std.

R. W. D. Christie, Genese, A. M. Nash. Solution of question 8700. Ed. Times XLVII. 96-97.

Zur Auffindung von S_{r+1} aus S_r, wo

$$S_r = 1^r + 2^r + 3^r + \cdots + n^r,$$

wird ein Integrationsverfahren angegeben, das durch eine Note von Prouhet zu Sturm's Cours d'Analyse (Note VI von Bd. II) längst Gemeingut aller Mathematiker ist. Lp.

M. d'Ocagne. Sur une classe de nombres remarquables. American J. IX. 353-380.

Die Zahlen, deren Eigenschaften hier entwickelt werden, sind definirt durch die Formel:

$$K_m^p = pK_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1},$$
$$K_m^1 = 0, \quad K_m^m = 1.$$

Es werden Reihen und lineare Differentialgleichungen untersucht, deren Coefficienten aus solchen Zahlen gebildet sind, und die Beziehungen zu den Euler'schen und Bernoulli'schen Zahlen entwickelt. (Vgl. S. 155.) Sn.

T. J. Stieltjes. Tables des valeurs des sommes $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$. Acta Math. X. 299-302.

Legendre hat die Summen S_2, S_3, ..., S_{35} bis auf 16 Decimalen berechnet; die von ihm gegebenen Werte von S_5, S_7, S_{10}, S_{11}, S_{16}, S_{35} besitzen einen Fehler von der Grösse einer Einheit der 16ten Stelle. Herr Stieltjes hat die Summen S_2, S_3, ..., S_{70} bis auf 32 Decimalen berechnet; der Fehler seiner Zahlen kann, wie aus der Berechnung folgt, nicht 15 Einheiten der 32sten Stelle betragen und ist in Wirklichkeit noch kleiner. Wz.

F. Mertens. Ueber die Convergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe. Gött. N. 265-269.

Bezeichnet α eine reelle Zahl, so ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{1+i\alpha}} + \frac{1}{3^{1+i\alpha}} + \frac{1}{4^{1+i\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+i\alpha}} + \cdots,$$

deren einzelne Glieder den ganzen Zahlen entsprechen, für keinen Wert von α, die Reihe

$$\frac{1}{2^{1+i\alpha}}+\frac{1}{3^{1+i\alpha}}+\frac{1}{5^{1+i\alpha}}+\cdots+\frac{1}{p^{1+i\alpha}}+\cdots$$

dagegen, deren einzelne Glieder den Primzahlen entsprechen, für alle von Null verschiedenen Werte von α convergent, für welche die Reihe

$$1+\frac{1}{i\alpha}-\frac{1+i\alpha}{1.2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{2+i\alpha}}-\frac{(1+i\alpha)(2+i\alpha)}{1.2.3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{3+i\alpha}}-\cdots$$

nicht gleich Null ist. Wz.

H. Simon. Zur Theorie der harmonischen Reihe. Hoppe Arch. (2) VI. 105-111.

Aus der harmonischen Reihe werde eine neue in der Weise gebildet, dass die Vorzeichen gruppenweise wechseln; die p ersten Glieder sollen positiv, die p nächsten Glieder sollen negativ genommen werden, u. s. w. Die neue Reihe wird vom Herrn Verfasser durch dasselbe Verfahren, wie in seiner Dissertation (F. d. M. 1886. XVIII. 218), für eine endliche Anzahl von Gliedern summirt, der Grenzwert der Summe für $n=\infty$ bestimmt, das Resultat auf verschiedene Beispiele angewandt. Wz.

C. F. Gauss. Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$$

Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung übersetzt von H. Simon. Berlin. J. Springer.

Die Uebersetzung schliesst sich dem Urbild möglichst treu an; eine Reihe von Druckfehlern, meist in den Rechnungen, ist berichtigt worden. Die am Schlusse hinzugefügten Anmerkungen des Herrn Uebersetzers sind überwiegend literarischen und historischen Inhalts. Wz.

STRACHEY. On the computation of the harmonic components of a series representing a phenomenon occurring in daily and yearly periods. Lond. R. S. Proc. XLII. 61-79.

Enthält praktische Formeln zur Berechnung der harmonischen Componenten der aufeinander folgenden Glieder einer Reihe, die eine periodisch wiederkehrende, in gleichen Zeitintervallen beobachtete Erscheinung darstellt. Cly. (Lp.)

M. D'OCAGNE. Sur une nouvelle source d'identités. S. M. F. Bull. XV. 133-143.

Bezeichnet man durch $f(n)$ eine beliebige Function der ganzen Zahl n, durch $f_1(n)$ die Summe $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$, durch $f_{k+1}(n)$ die Summe $f_k(1)+f_k(2)+\cdots+f_k(n)$ (für $k=1, 2, 3, \ldots$), so ist, wie leicht ersichtlich:

$$f_{k+1}(n) = C^k_{n+k-1}f(1)+C^k_{n+k-2}f(2)+\cdots+C^k_kf(n),$$

worin C^ν_μ die Zahl der Combinationen von μ Grössen zu je ν bedeutet. Gelingt es nun, $f_{k+1}(n)$ durch einen andern Ausdruck darzustellen, so ist diese Formel eine Identität, oder nach der Bezeichnungsweise des Herrn Cesaro (Mathesis VI. 126-131) eine „Quelle von Identitäten". Diese Formel wird angewandt auf

$$f(n) = n, \quad a^{n-1}, \quad n^2, \quad 2n-1, \quad (-1)^{n-1}(2n-1),$$

wodurch sich viele Relationen zwischen den Grössen C^ν_μ ergeben; ferner auf $\sin(n\omega)$ und die Fibonacci'sche Folge:

$$f(n) = u_n; \quad u_1 = u_2 = 1, \quad u_n = u_{n-1}+u_{n-2}.$$

Wz.

L. BOSI. Riposta alla quistione 65ª. Batt. G. XXV. 379-380.

Beweis, dass:

$$\sum_{k=1}^{m-2} A_k = \sum_{k=2}^{m} \frac{k(k-1)}{2} A_{m-k} + \sum_{k=3}^{m} \left[\frac{k(k-1)}{2} - 1\right] A_{m-k}$$

ist. Wz.

T. J. STIELTJES. Thèse d'Analyse. Recherches sur quelques séries semiconvergentes. Paris. (1886.) 64 S. 4°.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.)

F. G. TEIXEIRA. Curso de analyse infinitesimal. Porto Typographia occidental. 356 S. 8°.

Der vorliegende Band behandelt nur die Differentialrechnung. In der Einleitung (92 S.) werden die Theorie der complexen Zahlen und des Rechnens mit ihnen, die Lehre von den unendlichen Reihen, Producten und Kettenbrüchen, endlich die Hauptsätze über die elementaren Functionen behandelt. Die Betrachtung beschränkt sich nicht bloss auf das Gebiet der reellen Zahlen, sondern erstreckt sich überall auf das der complexen.

Der Lehrgang der Differentialrechnung ist in acht Capitel geteilt. Das erste Capitel dient zur Erörterung der Grundbegriffe: Grenze, Continuität, Unendlichkleines, Ableitung, Grenzmethode, Methode des Unendlichkleinen. Im zweiten Capitel werden die Ableitungen der elementaren Functionen für reelle und complexe Veränderliche hergeleitet; daran schliessen sich sofort die Betrachtungen über die Beziehung zwischen einer Function und ihren Ableitungen, über Functionaldeterminanten, die Ableitung eines Curvenbogens und die Vertauschung der Veränderlichen. Die Anwendungen der vorangehenden Lehren auf die Geometrie der Ebene und des Raumes bilden den Gegen-

stand des dritten Capitels. Nun erst werden im vierten Capitel die Ableitungen beliebiger Ordnung gebildet, und hieran knüpft sich der Beweis der Taylor'schen und MacLaurin'schen Reihe. In zweckmässiger Weise werden die analytischen und geometrischen Anwendungen der Taylor'schen Formel auf die beiden folgenden Capitel (V u. VI) verteilt. Das kurze siebente Capitel erörtert die Singularitäten der durch Reihen definirten Functionen, darunter die Weierstrass'sche Function ohne Ableitung. Im achten Capitel endlich giebt der Verf. einen kurzen Abriss der Theorie der Functionen complexer Variabeln und schliesst mit dem Mittag-Leffler'schen Theorem. Obschon der Umfang des Bandes in mässigen Grenzen gehalten ist, so zeichnet sich das Werk doch dadurch aus, dass es unter dem Gesichtspunkte der Functionentheorie bearbeitet ist und daher manche Dinge aufgenommen hat, welche sonst in den einführenden Leitfäden nicht Platz finden. Aber auch in den elementaren Teilen, welche den gemeinschaftlichen Besitz aller Lehrbücher der Differentialrechnung bilden, finden sich manche originale Gedanken des Verfassers, von denen er allerdings die meisten schon früher in den periodischen Zeitschriften veröffentlicht hat, über die daher in diesem Jahrbuche am geeigneten Orte berichtet worden ist. Die Ausstattung ist eine vorzügliche; leider sind manche Druckfehler stehen geblieben. Lp.

P. Mansion. Résumé du Cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand. Calcul différentiel et principes du Calcul intégral. Paris. Gauthier-Villars. VIII + 300 S. 8°.

Das erste Heft dieses Werkes ist 1877 erschienen (F. d. M. IX. 1877. 199) und umfasst zwei Abschnitte: I. Gegenstand und Methode der infinitesimalen Analysis. II. Grundeigenschaften der Ableitungen, der Integrale und der Reihen.

Das zweite Heft umfasst ebenfalls zwei Teile: III. Differentialrechnung. IV. Eigenschaften der Functionen, danach einen Anhang und Ergänzungsnoten im Anschluss an die beiden ersten in gedrängter Kürze abgefassten Abschnitte.

Der Unterschied dieses Lehrbuchs der Analysis von anderen liegt darin, dass die Theorie der elementaren Functionen gleichzeitig in ihm behandelt wird, und dass die Methode für die Fälle einer reellen und einer complexen Veränderlichen einheitlich ist. Zur Erreichung dieses Zieles hat der Verfasser an mehreren Stellen den herkömmlichen Lehrgang abändern müssen. 1) Die Exponentialgrösse e^{x+yi} wird, ohne die Reihe herbeizuziehen, durch die Gleichung $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$ definirt; diese Definition ermöglicht es, ohne Schwierigkeit die Ableitung aller einfachen elementaren Functionen zu finden. 2) Die Regel für die Ableitung der zusammengesetzten Functionen und der Satz über die Vertauschung der Folge der Differentiationen $D^2_{xy}u = D^2_{yx}u$ werden bewiesen, mag die Veränderliche reell oder imaginär sein, als Folge derselben Sätze für die Summen. 3) Die eigentliche Functionentheorie wird auf das Theorem von Rolle und auf das von Darboux gegründet:

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \lambda\sqrt{2}\,e^{\alpha i}\Delta z F(z+\theta\Delta z),$$

welches auf elementare Weise daraus abgeleitet wird. Vermöge dieses Theorems hat der Verfasser manche Theorien einfach begründen können, welche man gewöhnlich von Principien in betreff der krummlinigen Integrale abhängig gemacht hat, z. B. die der imaginären Exponentialgrössen und Logarithmen, die Entwickelung des Binoms in allen Fällen, in denen sie gilt, die Taylor'sche Formel und das Wronski'sche oberste Hauptgesetz für die Functionen einer reellen oder imaginären Variabeln.

Folgendes ist die Verteilung des Stoffes: I. Grenzmethode; Infinitesimalmethode; Functionen einer imaginären Veränderlichen; Continuität. II. Grundeigenschaften der Ableitungen; directer Beweis des Satzes, dass $F(x)$ constant ist, wenn $F'(x) = 0$; Grundeigenschaften der Integrale und der Reihen. III. Differentialrechnung mit Einschluss der Theorie der Functionaldeterminanten. IV. Theoreme von Rolle und von Darboux; wahre Werte der unbestimmten Ausdrücke; Taylor'scher Satz; Newton'sche Formel mit dem Cauchy'schen Reste; Gauss'sche Formel für mechanische Quadratur nebst Form des Restes; Reihenentwickelung der elementaren Functionen; Maxima und Minima.

V. Historische Skizze der Geschichte der Infinitesimalrechnung (s. diesen Bd. S. 27); Aequivalenz der folgenden Principe: Eine stets wachsende Veränderliche hat eine Grenze; eine Veränderliche mit Schwankungen, die unbegrenzt abnehmen, hat eine Grenze; wahrer Sinn des Principes der Substitution der unendlich kleinen Grössen; ableitungslose Weierstrass'sche Function; Ergänzungen zur Reihentheorie (insbesondere Abel'sches Theorem über die Convergenz). Ein recht vollständiges Namen- und Sach-Register schliesst das Werk. Mn. (Lp.)

Ph. Gilbert. Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire. 3me éd. Paris. Gauthier-Villars. XII + 552 S. gr. 8°.

Die erste Auflage dieses Lehrbuches erschien 1872 (F. d. M. IV. 1872. 118); die zweite 1878 (F. d. M. X. 197). Der allgemeine Plan des Buches ist derselbe geblieben, aber die Capitel über die Theorie der Grenzen, die Reihen, die Functionen und ihre Ableitungen im allgemeinen, die Theorie der singulären Punkte, die geradlinigen Oberflächen, die Functionen einer complexen Veränderlichen, die einfachen oder doppelten Integrale sind umgearbeitet; die gegenwärtige Darstellung der auf die Principien bezüglichen Fragen ist bündiger und strenger als in der vorangehenden Ausgabe. Die Vermehrungen betragen etwa 80 Seiten.

Folgendes ist die Anordnung des Inhaltes. Einleitung: Mittelwerte, complexe Zahlen, irrationale Zahlen, Grenzen, Reihen. I. Differentialrechnung. Principien der Theorie der Functionen einer einzigen reellen Veränderlichen. Ableitungen und Differentiale. Reihenentwickelungen der Functionen. Maxima und Minima. II. Geometrische Anwendungen der Differentialrechnung: Tangente, Berührungsebene, Krümmung; Berührung der krummen Linien und Oberflächen. Anhang: Elementare Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen (nach Darboux und Mansion). III. Integralrechnung. Quadraturen. Methoden der unbestimmten Integration. Principien über die bestimmten

einfachen oder doppelten Integrale. Gewöhnliche geometrische Anwendungen. Angenäherte Berechnung der bestimmten Integrale. IV. Integralrechnung. Integration der Differentialgleichungen. In diesem Abschnitt beschäftigt sich der Verfasser mit den meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Integral durch elementare Verfahrungsarten erhalten werden kann, und er schliesst mit einem Capitel über die Existenz und die genäherte Auswertung der Differentialgleichungen. Noten: 1) Ueber die Existenz der Ableitung bei den stetigen Functionen. 2) Ueber die durch ein System simultaner Gleichungen definirten Functionen. 3) Ueber einen Lehrsatz betreffs der Integration der linearen Gleichungen.

Zahlreiche, sehr gut gewählte Beispiele begleiten jedes Capitel.

In praktischer und theoretischer Hinsicht ist das Handbuch des Herrn Gilbert eins der besten, die man den Studirenden in die Hände geben kann. Mn. (Lp.)

G. Peano. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino. Bocca. XII. u. 336 S.

Das vorliegende Werk, welches freilich nicht über die Elemente der Infinitesimalgeometrie hinausgeht, verdient dennoch wegen der Eigentümlichkeit der Methoden und wegen der sorgfältigen Genauigkeit der Durchführung ein hohes Interesse. Die fortwährende Anwendung der Möbius-Grassmann'schen Streckentheorie, die eine solche Knappheit und Eleganz mit sich bringt, wie sie kaum bei der Quaternionentheorie zu finden ist, die exacte Begründung des Grenzbegriffes in der Geometrie, endlich die Einführung der Punktgebiete und der Functionen von Gebieten, wodurch die Infinitesimalgeometrie zu demselben Masse von Strenge und Allgemeinheit gebracht wird, welches die Infinitesimalrechnung neuerdings erlangt hat, dies alles macht die charakteristische Eigenart des Buches aus. Es möge nun eine kurze Uebersicht des Inhalts folgen.

Einleitung. Elemente der Streckentheorie; Summe mehrerer

Strecken; Product zweier Strecken (von Grassmann, nicht von Resal eingeführt; siehe das Vorwort zur Ausdehnungslehre von 1844 S. VIII); Flächen und Volumina als gerichtete Grössen betrachtet; Coordinaten von Strecken; Elemente des barycentrischen Calcüls.

Capitel I. Geometrische Grenzen und Ableitungen. Nachdem die Grenzen von Strecken, Flächen und Rauminhalten sowie von Punkten, Geraden und Ebenen definirt sind, werden einige Sätze über die Grenzen von geometrischen Grössen (Summen von Strecken, Schnittpunkte von Geraden, u. s. w.) aufgestellt. Der Grenzbegriff führt auf natürliche Weise zur Definition der Ableitung einer als Function einer Zahl betrachteten Strecke; diese Abgeleitete ist ebenfalls eine Strecke und lässt folglich weitere Ableitungen zu. Die Uebertragung der Begriffe von Interpolarfunctionen und partiellen Abgeleiteten und der Taylor'schen Formel auf Strecken bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Capitel II. Ebene Curven.

Capitel III. Raumcurven und Flächen.

Capitel IV. Functionen der Lage eines Punktes. Als eine solche Function wird eine Zahlgrösse bezeichnet, die von der Lage eines Punktes abhängig ist. Gesetzt $U = f(P)$, $U + \Delta U = f(P_1)$, so ist (nach der in Capitel I gegebenen Definition des Productes von zwei Strecken) der Quotient $\frac{\Delta U}{PP_1}$ eine Strecke, deren Grenze als die Ableitung der ursprünglichen Function definirt wird. Ist eine Function U auf einer Linie oder Fläche constant, so ist die Ableitung normal zur Linie bezw. Fläche. Maxima und Minima der Functionen der Lage eines Punktes.

Capitel V. Geometrische Grössen. Ist eine lineare Punktmenge vorhanden, so kann man eine endliche Anzahl von Strecken angeben, die sämtliche Punkte der Menge enthalten, und auch eine endliche Anzahl von Strecken, deren sämtliche Punkte der vorgegebenen Punktmenge angehören. Die untere (obere) Grenze der gesamten Länge der ersten (zweiten) Strecken heisst die äussere (innere) Länge der Menge. Analoge Definitionen gelten für mehrdimensionale Punktmengen. Die äussere

Länge stimmt mit dem Cantor'schen „Inhalte" (Math. Ann. XXIII. 473, Acta Math. IV. 388; siehe auch Harnack in Math. Ann. XXV. 241. Referate darüber in F. d. M. XVI. 1884. 459 u. 460, XVII. 1885. 506) vollkommen überein.

Die Länge eines krummlinigen Bogens ist die obere Grenze der Längen der eingeschriebenen gebrochenen Linien.

Eine Function eines Bereiches („campo", wie der Verfasser eine Punktmenge nennt) ist eine Grösse, die für jede Beschaffenheit des Bereiches je einen einzigen bestimmten Wert hat; z. B. die (äussere oder innere) Länge eines linearen Bereiches. Als ein Hauptsatz der Theorie solcher Functionen erweist sich der folgende (Vgl. Cantor in Acta Math. VII. 106; F. d. M. XVII. 1885. 504): Ist q eine solche Beschaffenheit eines Bereiches, dass, wenn man diesen in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt, sie wenigstens einem Teilbereiche zukommt, so giebt es einen dem betrachteten Bereiche oder dessen Grenzbereiche (abgeleitete Punktmenge) angehörenden Punkt, dessen umgebender Bereich die Beschaffenheit q besitzt.

Eine Function eines Bereiches heisst distributiv, wenn der Wert der Function für den ganzen Bereich die Summe ihrer Werte für die Teilbereiche ist; so ist die oben als Beispiel angeführte Function distributiv.

Die Theorie der Functionen eines Bereiches giebt zu manchen Anwendungen Veranlassung, die aber hier nicht berührt werden können. Es folgt darauf die Berechnung von Linien, Flächen und Rauminhalten; die Theorie der angenäherten Quadratur ist, wie der Verfasser angiebt, nach Mansion (Belg. Bull. (3) XI. 293, F. d. M. XVIII. 1886. 265) bearbeitet.

Capitel VI. Von der Krümmung. Krümmung und Torsion der Linien. Krümmung der Flächen.

Capitel VII. Veränderliche Figuren; Enveloppen. Die genaue Definition der Grenze einer veränderlichen Figur und die Aufstellung einiger darauf bezüglichen Sätze bilden die Grundlage für die Theorie der Enveloppen von Linien und Flächen. Die, wie wir glauben, neuen Definitionen der Polarlinie einer Geraden in der Ebene und der Polarebene einer Ebene im Raume

erleichtern die Untersuchungen über ebene Enveloppen von Geraden und räumliche Enveloppen von Ebenen, sowie die Auflösung mancher geometrischen Probleme.

Die in den Text eingeflochtenen Beispiele und die zahlreichen Uebungen sind dazu geeignet, den Leser mit den wichtigsten Curven und Flächen bekannt zu machen. Vi.

H. LAURENT. Traité d'analyse. Tome II. Calcul différentiel. Applications géométriques. Paris. Gauthier-Villars. 475 S. 8°.

Der erste Band des Traité d'analyse von Herrn Laurent ist in den F. d. M. XVII. 1885. 236-237 angezeigt worden. Der zweite Band mit den geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung handelt im ersten Capitel von den Aufgaben der ebenen Geometrie, welche von den unendlich kleinen Grössen der ersten Ordnung abhängen (S. 1-80); dagegen ist das zweite Capitel der Erörterung derjenigen Fragen gewidmet, welche auf unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung beruhen (S. 81-147), und das dritte der Untersuchung der singulären Punkte (S. 148-220). Nach denselben Gesichtspunkten ist der Stoff der räumlichen Geometrie auf die Capitel IV-VI verteilt, von denen das vierte ebenfalls die Fragen behandelt, die durch das Unendlichkleine der ersten Ordnung erledigt werden können (S. 221-345), das fünfte die Raumcurven (S. 346-416), das sechste die krummen Oberflächen (S. 417-469) zum Thema hat.

Wie im ersten Bande, so sind auch hier wieder viele Themata dem Werke einverleibt, welche sonst zu anderen Disciplinen gerechnet werden, z. B. zur analytischen Geometrie oder zur Kinematik. Den einzelnen Capiteln folgen Uebungsaufgaben.

Lp.

M. STEGEMANN. Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Teil. Differential-Rechnung. 5te Aufl. herausgegeben von L. KIEPERT. Hannover 1888. Helwing'scher Verl. XII u. 465 S. 8°.

Die in den Kreisen studirender Techniker beliebte Diffe-

rentialrechnung von Stegemann ist von Hrn. L. Kiepert, unter Wahrung des Charakters des Buches als Leitfaden zur Einführung in die Infinitesimalrechnung, gründlich umgearbeitet und bedeutend vermehrt worden. Weil er jedoch auf den Leserkreis Rücksicht zu nehmen hatte, von welchem das Werk hauptsächlich benutzt ist, und weil er somit nicht bloss den äusseren Rahmen, sondern z. B. auch die vorhandenen Stöcke zu den Figuren verwerten musste, so hatte er nicht ganz freie Bewegung zur Gestaltung des Stoffes. Trotzdem hat er zahlreiche Irrtümer und Mängel der früheren Auflagen beseitigt, Lücken des Inhaltes ausgefüllt und die nötigen Verbesserungen mit geschickter Hand getroffen. In Bezug auf den besonderen Charakter dieses Lehrbuches verweisen wir im übrigen auf die Anzeige der Integralrechnung (4te Aufl.) desselben Verfassers in F. d. M. XVIII. 1886. 236. Für die Abgrenzung des Stoffes waren dem Herausgeber seine eigenen Vorträge an der technischen Hochschule zu Hannover massgebend. Lp.

C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Tome III: Calcul intégral (Équations différentielles). Paris. Gauthier-Villars et Fils. XIV u. 615 S. 8°.

Der dritte und letzte Band des Werkes von Herrn Jordan behandelt in vier Capiteln: I. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen. II. Die linearen Differentialgleichungen. III. Die partiellen Differentialgleichungen. IV. Die Variationsrechnung. Es folgen mehrere Noten über verschiedene Themata. (Vgl. die sehr ausführliche Anzeige in Darboux Bull. (2) XI. 262-273). Lp.

I. Boussinesq. Cours d'analyse infinitésimale, à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques. Tome I. Calcul différentiel. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Die, wi:h der Vorrede, von der ein Teil im Verlagskatalog der Firma Geraden'e trimestre 1887. S. 13-16) abgedruckt ist, soll das Werk

in möglichst elementarer Weise alle die Theorien der Analysis behandeln, welche den Physikern und Technikern notwendig sind. Es setzt daher ein geringes Mass von Vorkenntnissen voraus und zerfällt in ein erstes Heft, welches den elementaren Cursus umfasst, und ein zweites mit eingehenderen Ergänzungen, die an den vom Verfasser bezeichneten Stellen des ersten Heftes eingefügt werden können. Beide Hefte, von denen das zweite das umfangreichere ist, sind getrennt verkäuflich. Lp.

A. Deligne. Notions complémentaires de mathématiques. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Nach den neuen Programmen für die Écoles nationales d'Arts et Métiers werden dort jetzt die analytische Geometrie und die Elemente der Infinitesimalrechnung gelehrt. Diesen Vorträgen soll das vorliegende Buch als Leitfaden dienen. Es zerfällt in zwei gesondert verkäufliche Teile: I. Analytische Geometrie. II. Ableitungen. Erste Lehren der Differential- und Integral-Rechnung. (Verlagskatalog der Firma, Ier et IIe trimestre 1887. S. 41-43). Lp.

M. Chandrykoff. Lehrbuch der Analysis. Kiew. (Russisch.) Wi.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

Mahler. Die Wertigkeitsrechnung und die Spaltung der Gleichungen und Functionen nach Dühring. Böklen. Mitt. I_3. 61-65. 1886.

Die Dühring'schen Anschauungen und Begriffe werden kurz

auseinandergesetzt und einige Bedenken gegen ihre Anwendung auf die Ableitung des Differentialquotienten geltend gemacht.

No.

F. G. Teixeira. Sobre a derivaçao das funcçoes compostas. Teixeira. J. VIII. 120-131.

Dieser Aufsatz enthält Betrachtungen über die verschiedenen Mittel, welche man anwendet, um das Theorem der Differentiation der zusammengesetzten Functionen zu beweisen, sowohl für den Fall, dass die Variabeln reell, als auch dass sie imaginär sind.

Tx. (Hch.)

M. David. Applications de la dérivation d'Arbogast. Formule générale pour le changement de la variable indépendante. Journ. de Math. (4) III. 53-62.

Die Methode zur Entwickelung von $\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$ nach Potenzen von x, von welcher der Verfasser schon früher (Journ. de Math. (3) VIII. 61ff.; F. d. M. 1882. XIV. 129f.) interessante Anwendungen gemacht hat, wird hier benutzt zur Lösung des Problems der Vertauschung der unabhängigen Variabeln. Ist z eine Function von x, und setzt man

$$\frac{dz}{dx} = a_1, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 2!\,a_2, \quad \frac{d^3z}{dx^3} = 3!\,a_3, \quad \ldots,$$

$$\frac{dx}{dz} = b_1, \quad \frac{d^2x}{dz^2} = 2!\,b_2, \quad \frac{d^3x}{dz^3} = 3!\,b_3, \quad \ldots,$$

so lautet die erhaltene allgemeine Formel

$$b_n a_1^n + b_{n-1} D a_1^{n-1} + b_{n-2} D^2 a_1^{n-2} + \cdots = 0.$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n = 1, 2, \ldots, 5$, so erhält man z. B. für $\frac{d^5x}{dz^5}$ die Darstellung

$$\frac{(-1)^{5-1}5!}{a_1^{\frac{5.6}{2}}} \begin{vmatrix} Da_1 & a_1^2 & 0 & 0 \\ D^2a_1 & Da_1^2 & a_1^3 & 0 \\ D^3a_1 & D^2a_1^2 & Da_1^3 & a_1^4 \\ D^4a_1 & D^3a_1^2 & D^2a_1^3 & Da_1^4 \end{vmatrix}.$$

T.

M. Jenkins. On Professor Cayley's extension of Arbogast's method of derivations. American J. X. 29-41.

Cayley hat (Trans. of the Royal Soc. 1860) eine Methode zur Bildung und Anordnung der Combinationen von gegebenem Grade und Gewicht der Buchstaben a, b, c, d, ... mit den resp. Gewichten 0, 1, 2, 3, ... durch Ableitung aus einem Term gegeben. Der Verfasser macht einige Bemerkungen dazu und giebt eine andere Methode, die vor jener Vorzüge einer leichteren Anwendbarkeit besitzt. T.

Bochow. Substitution neuer Variabeln in höheren Differentialquotienten. Schlömilch. Z. XXXII. 346-359.

Ausgehend von der Aufgabe: eine Function $\Phi_n(t)$ so zu finden, dass für beliebige positive, ganze n und für beliebige f

$$\frac{d^n f(\psi(t))}{dt^n} = \frac{d^n}{d\psi(t)^n}[f(\psi(t))\Phi_n(t)]$$

sei, gelangt der Verfasser zu folgender Grundformel:

$$\frac{d^n f(v)}{dx^n} = \left[\frac{d^n}{dy^n}\left\{f(y)\left(\frac{y-v}{t-x}\right)^{n+1} : \psi'(t)\right\}\right]_{t=x},$$

worin t und y durch die Gleichung $\psi(t) = y$ mit einander verbunden sind und $v = \psi(x)$ ist. Die Ableitung geschieht ganz unabhängig von der Theorie der Differentiation zu beliebigem (d. h. negativem und gebrochenem) Index, aus der sie sich am leichtesten ergiebt und für derartige Indices von Herrn Schimpf (Programm Bochum 1885) und unabhängig davon vom Verfasser in seiner Dissertation schon bewiesen worden war. Sodann werden Folgerungen aus der Grundformel gezogen, indem einerseits f und andrerseits ψ specialisirt werden, und schliesslich die so erhaltenen Formeln zur Herleitung einer Reihe von Identitäten für die analytischen Facultäten benutzt. T.

P. A. MacMahon. The differential equation of the most general substitution of one variable. Phil. Mag. (5) XXIII. 542-543.

Die Substitution $y = \frac{(a, b)(x, 1)}{(a', b')(x, 1)}$ führt zu dem Ausdrucke:

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist eine Reciprocante und eine Invariante. Im Falle der allgemeinen Substitution n^{ter} Ordnung ist der sich ergebende Ausdruck nicht mehr eine Reciprocante, wohl aber eine Invariante einer gewissen binären Form.

Gbs. (Lp.)

H. G. Dawson. Note on a theorem in higher Algebra. Mess. (2) XVII. 69-72.

Der Satz betrifft die Aequivalenz der Operatoren:

$$p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq} \quad \text{und} \quad a_0\frac{d}{da_1} + 2a_1\frac{d}{da_2} + 3a_2\frac{d}{da_3} + \cdots$$

bei ihrer Anwendung auf eine Function der Grössen $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, falls die Transformation $x = pX + qY$, $y = p'X + q'Y$ die binäre Form $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n$ in die Form

$$(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n)(X, Y)^n$$

überführt. Der Verfasser giebt einen einfacheren Beweis dieses Satzes als Faà di Bruno in seiner „Théorie des formes binaires" und ermittelt gerade dadurch das Wesen jener Aequivalenz.

Glr. (Lp.)

C. Posse. Ueber eine Identität der Differentialrechnung. Mosk. math. Samml. XIII. 489-491. (Russisch.)

Es handelt sich um einen Beweis der Identität

$$\varphi D^\mu \psi = D^\mu(\varphi\mu) - \frac{\mu}{1} D^{\mu-1}(\psi D\varphi) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} D^{\mu-2}(\psi D^2\varphi) - \cdots + (-1)^\mu \psi D^\mu \varphi.$$

Wi.

E. Combescure. Note sur les différentielles binômes. Darb. Bull. (2) XI. 245-247.

Es wird das Differential $x^m(a + bx^n)^p dx$ durch die Substi-

tution $ax^{-\frac{n}{2}} + bx^{\frac{n}{2}} = t$ transformirt. Ist $\frac{2(m+1)}{n} + p$ eine ganze, positive oder negative Zahl, so reducirt sich auf diese Weise das Differential auf Differentiale von der Form $\frac{t^r dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}}$, wo r ein echter, positiver Bruch ist. Als Beispiel wird die Reduction der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx^6}}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx^2)^2}}$ auf elliptische Integrale gegeben. T.

E. Combescure. Note sur les différentielles exactes homogènes. Darb. Bull. (2) XI. 243-244.

Sind in dem integrablen Ausdruck

$$df = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n$$

die Functionen X_1, X_2, ..., X_n homogen und von derselben Dimension m, so ist

$$f = \frac{1}{m+1}(x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n) + \text{const.},$$

wenn $m+1 \gtrless 0$ ist. Ist dagegen $m+1 = 0$ und dem entsprechend, wenn $x_2 = x_1 y_2$, ..., $x_n = x_1 y_n$ gesetzt wird,

$$X_1 = \frac{1}{x_1} Y_1,\quad X_2 = \frac{1}{x_1} Y_2,\quad \ldots,\quad X_n = \frac{1}{x_1} Y_n,$$

wo Y_2, ..., Y_n nur von y_2, ..., y_n abhängen, so muss

$$Y_1 + y_2 Y_2 + \cdots + y_n Y_n = \text{const.}$$

sein, und df geht über in $a\frac{dx_1}{x_1} + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_n dy_n$. T.

G. Koenigs. Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. C. R. CIV. 673-675 u. 842-844.

In der ersten dieser beiden Mitteilungen geht Herr Koenigs von einer Schar von Flächen des gewöhnlichen Raumes aus, welche von $n+1$ Parametern u_1, ..., u_{n+1} abhängt, und be-

trachtet die Differentialform:

$$M(u_1, \ldots, u_{n+1} \,|\, du_1, \ldots, du_{n+1}) = M(u, du),$$

deren Verschwinden ausdrückt, dass die beiden unendlich benachbarten Flächen u und $u + du$ einander berühren Er teilt ohne Beweis einige Sätze über derartige Formen mit, aber diese Sätze sind nicht neu, sie sind im Grunde schon im Jahre 1875 von Bäcklund bewiesen (s. Math. Ann. IX. 307, 308, 311, 312).

Dagegen dürften die Sätze der zweiten Mitteilung neu sein. Herr Koenigs giebt darin das Kriterium dafür, dass ∞^n beliebig gewählte unter jenen ∞^{n+1} Flächen eine feste Fläche, eine feste Curve oder einen festen Punkt berühren; ferner das Kriterium, an welchem man erkennen kann, ob jene Schar von ∞^{n+1} Flächen durch eine Berührungstransformation des gewöhnlichen Raumes in eine Schar von ∞^{n+1} Curven übergeführt werden kann. Er teilt endlich mit, dass die Form $M(u, du)$ nur dann quadratisch sein kann, wenn $n = 3$ ist, und dass umgekehrt jede quadratische Form $M(u, du)$, gleich Null gesetzt, als Bedingung für die Berührung zweier unendlich-benachbarten Flächen einer Schar von ∞^4 Flächen gedeutet werden kann. El.

G. Koenigs. Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. Acta Math. X. 313-338.

Als erzeugendes Element des Raumes lässt sich statt des Punktes eine von einer bestimmten Anzahl von Parametern abhängige Linie oder Fläche annehmen. Die Theorie solcher Elemente ist im einzelnen bereits bearbeitet worden. Im Gegenwärtigen fasst der Verf. das Element von Anfang allgemein auf, zieht auch beliebig viele Dimensionen in Betracht, und fragt zuerst: Unter welchen notwendigen und ausreichenden Bedingungen kann eine Form von Differentialen die fundamentale Form für ein passend gewähltes Element sein? Nachdem der allgemeine Typus dieser Formen construirt ist, folgt als natürliche Ergänzung die Aufgabe: Für eine diesen Bedingungen genügende Form alle Systeme von Elementen zu finden, welche

dieselbe als fundamentale zulassen. Die Lösung derselben führt zu dem Satze: Wenn zwei Systeme von Elementen derselben fundamentalen Form Raum geben, so existirt eine Berührungstransformation, welche die zwei Systeme in einander überführt. Es werden dann besonders die Curve und die Fläche als Elemente geprüft, dann alle Fälle aufgesucht, wo die fundamentale Form quadratisch ist. Sind p Gleichungen des adjungirten Systems linear, so lässt sich die Anzahl der Parameter um p vermindern. Die Elemente, welche eine quadratische Form zur fundamentalen haben, können nicht von mehr als vier Parametern abhängen. Zum Schlusse werden Formen mit constanten Coefficienten und eine besondere Form der adjungirten Gleichungen in Betracht gezogen (vgl. das vorige Referat). H.

M. L. Albeggiani. Generalizzazione di due teoremi riguardanti le parentesi d'ordine n. Palermo Rend. I. 314-326.

Fortsetzung einer bis jetzt ungedruckten Arbeit, deren Resultate in Palermo Rend. I 6-7, 9-11, 12-13, 27 angegeben worden sind. Als eine „Poisson'sche Parenthese der n^{ten} Ordnung" wird der Ausdruck:

$$(H_1\, H_2 \dots H_n) = \sum_{i=1}^{\nu} \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial x_{1i}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_{ni}} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial x_{ni}} \end{vmatrix}$$

bezeichnet, wo H_1, H_2, ..., H_n Functionen der $n\nu$ Variabeln x_{ji} ($j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, \nu$) darstellen. Sind nun $G_1, \dots, G_{h\nu}$ $h\nu$ Functionen von $y_{11}, \dots, y_{h\nu}$; $x_{11}, \dots, x_{k\nu}$; $a_1, \dots, a_{h\nu}$ (wo $h+k = n$), und bezeichnet

$$P_i(G^n) \qquad \left(i = 1, 2, \dots, \binom{h\nu}{n}\right)$$

alle aus je n Functionen G gebildeten Poisson'schen Parenthesen, so ist:

$$P_i(G^n) \equiv 0 \qquad \left(i = 1, 2, \dots, \binom{h\nu}{n}\right)$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die aus

den Gleichungen:

$$G_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h\nu)$$

hervorgehenden Functionen:

$$y_{st} = F_{st}(x_{11}, \ldots, x_{k\nu};\ a_1, \ldots, a_{h\nu}) \quad (s = 1, \ldots, h;\ t = 1, \ldots, \nu)$$

den simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$P_i(y^h, F) = 0 \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \binom{h\nu}{n}\right)$$

genügen, wo $P_i(y^h, F)$ den Ausdruck bezeichnet, welcher sich ergiebt, wenn man h der Functionen F in $P_i(F^n)$ durch ebensoviele Variabeln y ersetzt. Vi.

E. PADOVA. Sulle espressioni invariabili. Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 14 S.

Bericht auf S. 127 dieses Bandes.

G. RICCI. Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale. Rom. Acc. L Rend. (4) III. 15-18.

Bericht auf S. 128 dieses Bandes.

L. SAALSCHÜTZ. Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken. Schlömilch Z. XXXII. 378-382.

Wenn $v = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, indem

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(a) = 0$$

und ebenso

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

ist, während $\varphi^{(n)}(a)$ nicht verschwindet, dagegen $f^{(n)}(a)$ einen ganz beliebigen endlichen Wert besitzt, also auch verschwinden kann, so wird für den Wert $v'(a)$ des Differentialquotienten $v'(x)$ für $x = a$, der zunächst ebenfalls in unbestimmter Form erscheint, die einfache Formel gefunden:

$$(n+1)v'(a) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)}\right)\right]_{x=a}.$$

Lässt sich von Anfang an oder während der Rechnung ein Factor absondern, der für $x = a$ in bestimmter Form erscheint, so ist die Berechnung noch weiterer Vereinfachung fähig. Das Gesagte wird an Beispielen erörtert und eine Anwendung auf die Berechnung des Krümmungsradius für eine solche Stelle einer Curve gemacht, an welcher der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ sich in der Form $\frac{0}{0}$ darstellt. T.

G. Darboux. Sur le maximum du produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante. Darb. Bull. (2) XI. 149-151.

Der ganz elementare Beweis des Satzes, dass das geometrische Mittel aus n positiven Zahlen kleiner als ihr arithmetisches Mittel ist, wird in der Weise geführt, dass der Satz zunächst successive für $n = 2, 4, 8, 16, \dots$ als richtig erkannt wird. Der Fall eines beliebigen n wird dann einfach dadurch erledigt, dass zu den betrachteten Zahlen ihr arithmetisches Mittel noch so oft hinzugesetzt wird, bis man zu einer Anzahl von Gliedern gelangt, welche eine Potenz von 2 ist. [Dem Verfasser ist es wohl entgangen, dass dieser Beweis bereits in Cauchy's Algebraischer Analysis, zweiter Nachtrag, Satz 17 gegeben ist. Red.] T.

E. Goursat. Sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante. Nouv. Ann. (3) VI. 437-439.

Ein anderer (cf. das vorhergehende Referat) Beweis, der nur auf der sehr einfachen Bemerkung beruht: sind in einem Product von lauter positiven Zahlen nicht alle Factoren gleich, so dass wenigstens einer grösser (um h) und wenigstens einer kleiner (um k) als ihr arithmetisches Mittel m ist, und vermindert man jenen um h und vermehrt diesen um ebensoviel, so nimmt das Product, das jetzt einen Factor m mehr enthält, zu, während die Summe seiner Factoren ungeändert bleibt.

T.

K. H. Liersemann. Maxima und Minima, analytisch-geometrisch beleuchtet. Pr. Realgymn. Rawitsch. (No. 159) S. 33-81 u. Taf. 4-11. 4°.

Fortsetzung der Arbeit gleichen Titels, über deren ersten Teil F. d. M. XVIII. 1886. 247 berichtet ist. Der jetzt vorliegende Abschnitt erläutert die im ersten Teile vom Verfasser angegebene elementare Methode an einer Reihe sorgfältig und eingehend ausgearbeiteter Beispiele. Sieht man mit ihm von allen besonderen Vorkenntnissen ab, so kann man diesen Weg auch nur für die betrachteten Functionen benutzen, nämlich algebraische Ausdrücke in einer Variabeln x mit höchstens einer Quadratwurzel als der einzigen Irrationalität. Die gegebene Function $f(x)$ wird gleich y gesetzt, und der Gang der Function wird genau erörtert. Hierbei ergeben sich ausser den extremen Werten (durch die zur x-Axe parallelen Tangenten) naturgemäss alle Zweige der Curve $y = f(x)$, ihre geraden und parabolischen Asymptoten, ihre Wendepunkte und singulären Punkte. Durch die Substitution von $1/y$ statt y werden die Punkte im Unendlichen der Anschauung näher gebracht, und eine grosse Anzahl von genau ausgeführten Figuren in mehreren Farben stellt die Ergebnisse graphisch dar. Lp.

W. J. C. Miller, S. Sircom. Solution of question 8137. Ed. Times. XLVI. 27-28.

Die Geschwindigkeit eines Wagens sei proportional dem Kubus des Cosinus des Neigungswinkel der Strasse gegen die horizontale Ebene. Dann besteht der Weg des schnellsten Anstiegs vom Fusse eines halbkugligen Hügels nach dem Gipfel aus einer sphärischen Curve, welche durch einen Punkt eines Grosskreises beschrieben wird, der auf einem Kleinkreise vom Radius $\frac{1}{6}\pi$ um den Pol als Centrum rollt, und ausserdem aus einem Grosskreisbogen vom Kleinkreise an bis zum Pole. Lp.

J. Wolstenholme, G. B. Mathews, J. Beyens. Solution of question 8719. Ed. Times. XLVII. 39-40.

Die Längen der Kanten OA, OB, OC eines Tetraeders seien mit a, b, c bezeichnet, die ihrer Gegenkanten BC, CA, AB mit x, y, z, die ihnen gegenüberliegenden Flächenwinkel mit A, B, C, X, Y, Z. Ist dann das Volumen V in a, b, c, x, y, z ausgedrückt, so ist $\partial V/\partial a = \frac{1}{6} ax \operatorname{cotg} A$, u. s. w. Daraus folgt: Sind a, x, b, y, und $c+z$ gegeben, so ist V ein Maximum, wenn $C = Z$. Sind a, x, b, y, und $c-z$ gegeben, so ist V ein Maximum, wenn $C+Z = \pi$. Sind a, x, $b+y$, $c+z$ gegeben, so ist V ein Maximum, wenn $B = X$ und $C = Z$ (d. i. $b = x$, $c = z$). Sind a, x, $b+y$, $c-z$ gegeben, so ist V ein Maximum, wenn $B = X$, $C+Z = \pi$. Lp.

Capitel 3.
Integralrechnung.

R. A. Roberts. A treatise on the integral calculus: Part I, containing an elementary account of elliptic integrals and applications to plane curves. Dublin. Hodges, Figgis and Co. VIII + 368 S.

Das Buch ist ohne Vorrede ausgegeben, so dass man sich kaum über den Umfang, in welchem der Verf. den Gegenstand abzuhandeln beabsichtigt, ein Urteil bilden kann. Der Hauptpunkt, welcher einen Unterschied von den gebräuchlichen englischen Lehrbüchern bildet, ist die Einführung eines Capitels über elliptische Integrale, welchen bisher in den üblichen Lehrgängen der Integralrechnung nicht viel Beachtung geschenkt worden ist. Das fünfte Capitel giebt eine recht gute Erörterung der elementaren Eigenschaften, und im achten Capitel werden Anwendungen auf die Rectification ebener Curven gemacht. In Anbetracht des weiten Gebrauches der Hyperbelfunctionen in neueren Arbeiten aus englischen mathematischen Zeitschriften hätten dieselben, wie wir denken, neben den Kreisfunctionen eine Stelle finden

deutet. Im zweiten Falle wird

$$\int \frac{f\,dx}{\vartheta^{\frac{1}{3nP}}} = A \log \Pi_{\varphi=0}^{\varphi=3nP-1} z_{\varphi}^{a\varphi}.$$

H.

D. Besso. Sull' integrale del prodotto di una funzione razionale pel logaritmo di una funzione razionale. Batt. G. XXV. 356-362.

Ein Integral der Form $\int P \log Q\,dx$, wo P und Q rational in x, lässt sich zunächst auf die zwei Integrale

$$\int \frac{\log x}{x-a}\,dx, \quad \int \frac{\log(1+x^2)}{x-a}\,dx,$$

wo a complex, zurückführen; ersteres hat der Verfasser in Batt. G. XII. 1 (s. F. d. M. VI. 1874. 187) auf die Grundformen

$$\int_1^\beta \frac{\log x}{1+x}\,dx, \quad \int_0^\beta \frac{\log(1+x^2)}{c+x}\,dx, \quad \int_0^\beta \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{c+x}\,dx,$$

wo β und c reell, gebracht. Jetzt wird bewiesen, dass auch das letztere auf dieselben reducirt werden kann. H.

E. Linhardt. Ueber die Integrale $\int z^{-a} \sin z\,dz$ und $\int z^{-a} \cos z\,dz$. Hoppe Arch. (2) V. 91-110.

Nach gleicher Methode, wie sie Herr E. Lommel in den Math. Ann. XVI. 183 (s. F. d. M. XII. 1880. 398) auf die Specialfälle $a=1$ und $\frac{1}{2}$ anwendet, werden beide Integrale in folgende Reihen entwickelt, deren eine halbconvergent, die andere convergent ist:

$$\int \frac{\sin z\,dz}{z^a} = -\frac{\sin z}{z^a} \sum_p (-1)^p \frac{a^{1:(2p+1)}}{z^{2p+1}}$$

$$-\frac{\cos z}{z^a} \sum (-1)^p \frac{a^{1:2p}}{z^{2p}} + C,$$

$$\int \frac{\cos z\,dz}{z^a} = \frac{\cos z}{z^a} \Sigma (-1)^p (1-\alpha)^{-1:(2p+1)} z^{2p+1}$$

$$+ \frac{\sin z}{z^a} \Sigma (-1)^p (1-\alpha)^{1:(2p+2)} z^{2p+2} - \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\Gamma(\alpha)} + C_1,$$

$$= -\frac{\cos z}{z^a} \Sigma (-1)^p \frac{\alpha^{1:(2p+1)}}{z^{2p+1}} + \frac{\sin z}{z^a} \Sigma (-1)^p \frac{\alpha^{1:2p}}{z^{2p}} + C_1.$$

Bei Herleitung dieser Ausdrücke werden Reductionen jener Integrale auf die von Lommel mittels der Bessel'schen Functionen definirten Functionen $S_{\mu,\nu}$ gefunden und gezeigt, dass sie Lösungen der Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = z^{-a}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = z^{-a-1}$$

sind. Ferner ergeben sich Ausdrücke für besondere S und eine Darstellung der obigen Integrale in Bessel'schen Functionen.

H.

F. Klitzkowski. Ueber die Integration der m^{ten} Wurzel aus einer rationalen Function. Diss. Königsberg.

Die gegenwärtige Untersuchung betrifft ebenso wie eine Abhandlung von Briot und Bouquet die Integrale der Gleichung $F\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0$, wo F ganze Function m^{ten} Grades beider Argumente ist, und entlehnt deren Methode. Jene sucht die Bedingungen für die Existenz eines eindeutigen Integrals, diese mit Ausschluss der Eindeutigkeit die Bedingungen algebraischer Integrale, während einfach und doppelt periodische einer spätern Fortsetzung vorbehalten bleiben, jedoch im vorbereitenden ersten Teile, welcher die allgemeinen Aufstellungen enthält, mit berücksichtigt sind. Die dann folgende Ausführung behandelt den Fall, wo F aus zwei Termen besteht, die Gleichung also lautet: $\left(\frac{du}{dz}\right)^m = \frac{f_0(u)}{f_m(u)}$. Nach Vorgang der genannten Autoren wird, gemäss der Integralgleichung $f(u, z-z_1) = 0$, $u-u_1$, welches mit $z-z_1$ verschwindet, nach Potenzen von $z-z_1$ mit rational gebrochenen Exponenten entwickelt und aus dem Exponenten

des ersten Terms auf die Eigenschaft der Integralfunction geschlossen, woraus die Bedingung der algebraischen Form erhalten wird. H.

P. Predella. Sulle formole attribute a Gauss e Stokes per le trasformazioni di integrali qui sotto indicate. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 215-222.

Ein neuer Beweis der bekannten Formeln:

$$\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)d\sigma=\int(Xdx+Ydy),$$

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dS=-\int(X\cos\widehat{nx}+Y\cos\widehat{ny}+Z\cos\widehat{nz})d\sigma,$$

$$\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\widehat{nx}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\widehat{ny}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\widehat{nz}\right]d\sigma$$
$$=\int(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Vi.

H. Laurent. Remarques sur les conditions d'intégrabilité. Nouv. Ann. (3) VI. 274-279, 305-311.

Die bekannten Bedingungen dafür, dass ein linearer Ausdruck in $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ ein vollständiges Differential ist, hat der Verfasser in einem frühern Aufsatze (Nouv. Ann. (2) XIX. 153) durch ein neues System ersetzt. Im gegenwärtigen wird davon eine Verallgemeinerung hergeleitet, aus der der Satz hervorgeht: „Damit die Gleichungen

$$du_k = X_{k1}dx_1+X_{k2}dx_2+\cdots+X_{kn}dx_n$$

vollständig integrabel seien, ist es notwendig und hinreichend, dass man für beliebige $x_1, x_2, \ldots, x_n, k, i$ erst hat

$$\frac{\partial X_{k1}}{\partial x_i}+\sum_\mu\frac{\partial X_{k1}}{\partial u_\mu}X_{\mu i}=\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_1}+\sum_\mu\frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu}X_{\mu 1},$$

dann für $x_1=x_1^0$, aber beliebig $x_2, x_3, \ldots, x_n, k, i$

$$\frac{\partial X_{k2}}{\partial x_i}+\sum_\mu\frac{\partial X_{k2}}{\partial u_\mu}X_{\mu i}=\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_2}+\sum_\mu\frac{\partial X_{ki}}{\partial u_\mu}X_{\mu 2},$$

und so fort." Um jenes System zu integriren, integrire man das System

$$\frac{du_1}{dx_1} = X_{11}, \quad \frac{du_2}{dx_1} = X_{21}, \ldots, \quad \frac{du_m}{dx_1} = X_{m1}$$

und bestimme die Werte $u_1^0, u_2^0, \ldots$ von $u_1, u_2, \ldots$ für $x_1 = x_1^0$ mittels der Gleichungen

$$\frac{du_1^0}{dx_2} = X_{12}^0, \quad \frac{du_2^0}{dx_2} = X_{22}^0, \ldots, \quad \frac{du_m^0}{dx_2} = X_{m2}^0,$$

wo X_{12}^0 die Werte von X_{12} für $x_1 = x_1^0$ bezeichnen, dann die Werte $u_1^{00}, u_2^{00}, \ldots$ von $u_1^0, u_2^0 \ldots$ für $x_2 = x_2^0$ mittels der Gleichungen

$$\frac{du_1^{00}}{dx_3} = X_{13}^{00}; \quad \frac{du_2^{00}}{dx_3} = X_{23}^{00}, \ldots, \quad \frac{du_m^{00}}{dx_3} = X_{m3}^{00}$$

und so fort. H.

HUMBERT. Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques. Acta Math. X. 281-298.

Referat im Abschnitt VII, Cap. 1.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

F. F. K. H. GEBENSLEBEN. Ueber die Methoden zur Wertbestimmung einfacher bestimmter Integrale. Pr. R.-Gymn. Nordhausen.

Erläuterung der Bedeutung und der Ziele der Integralrechnung und geordnete Zusammenstellung der bekannten und einfacheren Methode der Wertberechnung von Integralen. H.

P. MANSION. Rapport sur le Mémoire intitulé: Remarques sur certaines intégrales définies par M. E. Catalan. Belg. Bull. XIII. 474-477.

Die Integrale, mit welchen sich Hr. Catalan beschäftigt, sind Frullani'sche Integrale, d. h. solche, bei denen die zu integrirende Function die Differenz zweier Functionen ist, welche dieselben Extremwerte haben, indem die eine aus der anderen durch eine ziemlich einfache Substitution hervorgeht. Hr. Catalan findet den Wert der sogearteten Integrale durch Ableitung unter dem Integralzeichen. Beispiel:

$$\int_0^1 \left\{\frac{x^\alpha}{1-x} - \beta\,\frac{x^{\alpha\beta+\beta-1}}{1-x^\beta}\right\} dx = \log\operatorname{nat}\beta.$$

Mn. (Lp.)

Ch. Hermite, E. Catalan, T. R. Terry. Solution of question 8560. Ed. Times XLVI. 21.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left\{\frac{1}{(1+x)^n} - \frac{1}{(1+x/a)^n}\right\} = \log\operatorname{nat} a.$$

Lp.

Ch. Hermite. Solution of questions 8588, 8863. Ed. Times XLVI. 63-64, XLVII. 53.

1. Ist a eine reelle positive Zahl, so ist:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{cotg}(x+ai)dx = \tfrac{1}{2}\log\operatorname{nat}[-\operatorname{cotg}^2(ai)] + i\,.\,\tfrac{1}{2}\pi.$$

2. Unter derselben Bedingung ist zunächst:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\sin(x-ia)} = +\int_0^\pi \frac{dx}{\sin(x+ia)} = 2\log\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}},$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin(x-ia)} = -\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sin(x+ia)} = 4i\operatorname{arc}\operatorname{tg} e^{-a}.$$

In diesen letzten Integralen kann dann aber a durch $\alpha+i\beta$ ersetzt werden, wo α positiv und von Null verschieden ist.

Lp.

D. Edwardes, S. Sircom. Solution of question 8423. Ed. Times XLVII. 119-121.

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x (\log \sin x)^2 dx = 2 + (\log 2)^2 - 2\log 2 - \tfrac{1}{12}\pi^2,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x (\log \sin x)^2 dx = \tfrac{1}{8}\pi \{2(\log 2)^2 - 2\log 2 + \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1\}.$$

Lp.

C. F. LINDMAN. Om några definita integraler. Stockh. Öfv. XLIV. 243-251.

Berechnung der Integrale

$$J = \int_0^p \frac{\log(1+px)}{1+x^2} dx, \quad J_1 = \int_0^p \frac{\log(1-px)}{1+x^2} dx \qquad (p < 1)$$

ohne Anwendung der sogenannten Bertrand'schen Formel. Zuletzt zeigt der Verfasser, dass das Integral

$$J_2 = \int_0^p \arcsin \frac{x}{p} \cdot \frac{x dx}{1-x^2} \qquad (p \lessgtr 1)$$

nicht, wie Hr. Bierens de Haan in seinem Exposé etc. S. 465 angiebt, gleich

$$-\frac{\pi}{4}\log(1-p^2) + \tfrac{1}{2}(\arcsin p)^2$$

ist, sondern

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \log \frac{1+\sqrt{1-p^2}}{2\sqrt{1-p^2}}.$$

K.

BIEGLER. Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter. J. für. Math. CII. 237-254.

Referat in Abschnitt VII, Cap. 2_A.

W. H. RUSSELL. On certain definite integrals No. 15. Lond. R. S. Proc. XLII. 477-482.

Fortsetzung früherer Untersuchungen (s. F. d. M. XVII. 1885. 269, 272). Beispiele zum Vergleiche von Transcendenten, die auf dem Principe des Hrn. Fox Talbot beruhen, aber in anderer Weise angewandt werden. Cly. (Lp.)

G. DE LONGCHAMPS. Sur la rectification de quelques courbes remarquables. Mathesis VII. 127-128, 170-175.

Da jede unicursale circulare Curve dritter Ordnung die Inverse eines Kegelschnittes ist, so kann sie durch Kreisbogen rectificirt werden. Der Bogen der Cissoide wird durch die elementaren Functionen dargestellt; derjenige der Curve $\varrho^2 = a^2(\sec^2\omega + \operatorname{cosec}^2\omega)$ durch elliptische Integrale. Im allgemeinen werden die Bogen der Curven $\varrho = f(\omega)$ und $R = f(k\omega)$ durch Integrale ausgedrückt, welche der Form nach ungefähr ähnlich, für die zweite jedoch etwas complicirter sind. So habe z. B. die Curve ϱ einen durch ein elementares Integral (Gerade, Kreis) ausgedrückten Bogen, dann kann die Curve R durch die elliptischen Functionen rectificirt werden. Mn. (Lp.)

F. SAMUDA. Die Quadratur der Hyperbel nach einer neuen Methode berechnet. Graz 1888. Styria.

Die neue Methode ist die Anwendung der Analogie statt der Deduction. Vermeintliche Analogien zwischen Hyperbel und Ellipse führen den Verfasser zu lauter unrichtigen Schlüssen und lauter unrichtigen Resultaten. H.

A. BASSANI. Sopra una trasformazione d'integrali definiti. Batt. G. XXV. 223-224.

Unter der Voraussetzung, dass sich die Function $\varphi(\alpha)$ in der Form $A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots$ entwickeln lässt, ergeben sich die zwei Formeln:

$$\int_0^x pe^{2ipy}\varphi(e^{ipy}\sin py)\,dy = \int_0^1 e^{ipx}\sin px\,\varphi(ze^{ipx}\sin px)\,dz,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x pe^{2ipy}\varphi(e^{ipy}\cos py)\,dy = -i\int_0^1 e^{ipx}\cos px\,\varphi(ze^{ipx}\cos px)\,dz.$$

Setzt man $\varphi(\alpha) = \alpha^{n-1}$ und differentiirt beide Gleichungen nach n, so erhält man die vier Formeln, welche Euler in seiner Abhandlung „Quatuor theoremata ..." giebt H.

M. Lerch. Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Prag. Ber. 673-682.

Eine complexe Variable z wird als innerer Punkt des Dreiecks $(0, a, a+ib)$ aufgefasst in der Form $z = x(a+it)$, wo t zwischen 0 und b, x zwischen 0 und 1 variiren kann. Eine Function von z heisst synektisch in einem Bezirk der z-Ebene, wenn sie innerhalb desselben eine endliche und einförmig stetige Function von t und x ist und eine endliche und bestimmte Derivirte $f'(z)$ von derselben Eigenschaft hat. Unter Annahme dieser Eigenschaften erhält man eine Reihe allgemeiner Beziehungen zwischen Integralen von Functionen Complexer und nach Zusammensetzung eines Vielecks aus Dreiecken obiger Form den Satz: Ist die Function $f(z)$ synektisch innerhalb und auf dem Umfange eines geradlinigen einfachen Vielecks, so ist das Integral $\int f(z)dz$, über den Umfang genommen, $= 0$. Dieser Satz reicht nach Aussage des Verfassers zur Herleitung aller fundamentalen Eigenschaften der Functionen einer imaginären Variabeln hin und erspart die Einführung krummliniger Integration. Aus ihm wird nun der Satz Cauchy's über die Integrale zwischen imaginären Grenzen, dann weitere Sätze hergeleitet. H.

F. Franklin. Two proofs of Cauchy's theorem. American J. IX. 389-390.

Für den Cauchy'schen Fundamentalsatz über das Begrenzungs-Integral $\int w dz$ werden hier zwei Beweise mitgeteilt, welche indessen nicht den Anforderungen der Strenge genügen. Der erste Beweis ist nur unwesentlich von demjenigen verschieden, welchen Cauchy gegeben hat. Der zweite Beweis zeigt die Gültigkeit des Satzes für die Begrenzung eines infinitesimalen Gebietes und schliesst hieraus seine Allgemeingültigkeit. Hz.

P. L. Tschebyscheff. Ueber die Residuen, welche die angenäherten Werte der Integrale geben. Peterb. Abh. LV. 1-50. (Russisch.)

In der Abhandlung: „Ueber die Darstellung der Grenzwerte der Integrale mit Hülfe der Residuen“ (s. F. d. M. XVII. 172) hat Herr Tschebyscheff gezeigt, dass, wenn $2m$ Integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b xf(x)\,dx, \ \ldots, \ \int_a^b x^{2m-1}f(x)\,dx$$

gegeben sind, die Grenzwerte des Integrals $\int_a^v f(x)dx$ ermittelt werden können. Es sei nämlich der Ausdruck:

$$\frac{1}{z}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{z^2}\int_a^b xf(x)dx + \cdots + \frac{1}{z^{2m}}\int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

als Kettenbruch zu entwickeln, $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ der m^{te} Näherungsbruch dieses Kettenbruches,

$$Z = \gamma(z-v) - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}, \quad \Phi_0(z) = \varphi_m(z)\,Z - \varphi_{m-1}(z),$$
$$\Phi_1(z) = \psi_m(z)\,Z - \psi_{m-1}(z).$$

Dann giebt das zwischen $a-w$ und v genommene Residuum von $\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$ den Wert des Integrals $\int_a^v f(x)dx$ mit einer Abweichung, die nicht $\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1(v)}$ übersteigen kann.

In der vorliegenden Abhandlung untersucht der Verfasser den Wert dieser Abweichung und giebt die Formeln, welche zur Bestimmung ihrer oberen Grenze dienen. Die ganze hier gegebene Analyse beruht auf den Formeln der berühmten Abhandlung des Hrn. Tschebyscheff: „Ueber Kettenbrüche“.

Wenn für zwei Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ die Gleichungen:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xf_1(x)dx,$$
$$\ldots, \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx = \int_a^b x^{2m-1}f_1(x)dx$$

bestehen, so kann die Differenz zwischen den Integralen $\int_a^v f(x)dx$ und $\int_a^v f_1(x)dx$ augenscheinlich nicht den doppelten Wert des Maximums der Abweichung übersteigen. Als ein Bei-

spiel dieses Resultates erhält der Verfasser, indem er

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2}$$

setzt, das folgende Theorem: „Die Function $f_1(x)$ gebe, indem sie positiv bleibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)dx = \frac{1}{q^2}, \ \ldots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x)dx = \frac{1.3.5\ \ldots\ 2m-3}{q^{2m-2}}, \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x)dx = 0,$$

so bleibt der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{v} f_1(x)\,dx$ zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{1}{4}}(q^2v^2+1)^2}{2(m-3)^4\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{1}{4}}(q^2v^2+1)^2}{2(m-3)^2\sqrt{m-1}}.\text{“}$$

Dieses Theorem findet eine wichtige Anwendung in der Abhandlung des Verfassers: „Zwei Theoreme über die Wahrscheinlichkeiten“. (S. diesen Band S. 208.) Wi.

H. Poincaré. Sur les résidus des intégrales doubles. Acta Math. IX. 321-380.

Der Gegenstand ist bearbeitet von Maximilien Marie, Picard und Stieltjes, über deren Behandlungen der Verfasser im Anfang sein Urteil abgiebt. Die Aufstellungen von Marie lassen sich nur durch Interpretation aufrecht halten und führen zu Irrungen. An Picard's Theorie wird nur der Name intégrales de périodes gerügt, welcher vielfache Verwirrung erzeuge. Stieltjes hat seine zwei Arbeiten nicht veröffentlicht, weil er auf Einwürfe gegen dieselben nicht antworten konnte. In einem spätern Abschnitte des Gegenwärtigen wird das Verfahren mitgeteilt und die Ein-

wände gegen die eine Arbeit widerlegt. Die hier gewählte Methode sucht die geometrische Darstellung einer vierfachen Mannigfaltigkeit durch vier Dimensionen zu vermeiden, indem sie dieselbe auf dreifache Variation beschränkt. Sind $\xi = x + iy$, $\eta = z + it$ die Integrationsvariabeln und ist $P(\xi, \eta) : Q(\xi, \eta)$ die als rational angenommene Function unter dem doppelten Integrationszeichen, so wird letztere nur dann unendlich, wenn x, y, z, t zwei Gleichungen erfüllen, wodurch eine Fläche S bestimmt wird, und die Unstetigkeit wird umgangen, wenn die Integrationsfläche S' keinen Punkt mit S gemein hat. Es werden nun x, y, z, t im Integrationswege als Functionen von λ, μ, ν und letztere als Raumcoordinaten betrachtet, und es wird behauptet, dass diese Darstellung nicht nur für jede Integralfläche möglich sei, sondern dass sogar die Functionen genau oder doch nahezu rational gewählt werden können. Die Bedingung, unter der ein Integral $\int\int (A dy dz + B dz dx + C dx dy)$ bei jedem Integrationswege, wenn nur der Umfang der Integrationsfläche unverändert bleibt, denselben Wert hat, ist:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Von derselben Form sind die Bedingungen bei beliebig vielen Variabeln Wenn die Flächen S, S' nicht ganz in einem Raume (λ, μ, ν) liegen, werden sie in kleine Stücke zerlegt, für welche dies nahezu stattfinden kann. Es werden nun über den Sinn der Durchlaufung der Umfänge Bestimmungen getroffen und die verschiedenen Lagen von S und S' durchgegangen, wo sie keinen gemeinsamen Punkt haben. Ist dagegen S eine geschlossene Fläche, welche singuläre Curven umschliesst, so ist das Integral

$$J = \int\int \frac{P(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{Q(\xi, \eta)\; R(\xi, \eta)},$$

wo Q und R irreductible ganze Functionen sind, die Summe von Integralen über Flächen $\Sigma, \Sigma', \ldots$ im Innern von S, deren jede nur eine jener singulären Curven umschliesst, und für jede

solche ist das Residuum das einfache Abel'sche Integral:

$$J = \int \frac{2i\pi P d\xi}{R\frac{\partial Q}{\partial \eta}} = \int \frac{2i\pi P d\xi}{Q\frac{\partial R}{\partial \eta}}.$$

Stieltjes hatte bei Betrachtung desselben Doppelintegrals J eine Verallgemeinerung der Formel von Lagrange entdeckt, jedoch keine Erklärung des Umstandes finden können, dass der Ausdruck der Periode bei Vertauschung von Q und R sein Vorzeichen wechselt. Es folgt hier die Erklärung: nämlich die Fläche $Q = 0$ fällt innerhalb, die Fläche $R = 0$ ausserhalb der Integrationsfläche. Als Anwendung seiner Theorie giebt der Verfasser den Beweis des Satzes: Eine ganze Function von ξ, η, die für unabhängige unendliche ξ, η einen endlichen Grenzwert hat, ist eine Constante. Dann folgt eine Betrachtung variabler Perioden, dann Anwendung auf die Functionen Θ in seiner Abhandlung über die Abel'schen Functionen, American J. VIII. 289 (s. F. d. M. XVIII. 1886. 421). H.

R. Lipschitz. Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale. J. für Math. CI. 214-226

Die hier betrachteten vielfachen Integrale hängen mit Verallgemeinerungen der ϑ-Reihe zusammen, bei denen die in dem Exponenten vorkommende Form nicht mehr zu den wesentlich positiven gehört. Es sei $f(z)$ eine ganze rationale Function der Variabeln z mit reellen Coefficienten, und es habe $f(z)$ mit $\frac{df(z)}{dz}$ keinen gemeinsamen Teiler. Die $(n+1)$ Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$, $z_0, z_1, \dots, z_n$, welche von einander verschieden sind, mögen aus p reellen Wurzeln $z_\lambda = z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$ und aus q Paaren complexer Wurzeln $z_\mu = z_p, z_{p+1}, \dots, z_{p+q-1}$, $z_{\mu+q} = z_{p+q}, z_{p+q+1}, \dots, z_{p+2q-1}$, wo z_μ conjugirt zu $z_{\mu+q}$, bestehen. Mit $(n+1)$ reellen Variabeln $x_0, x_1, \dots, x_n$ werde nun das Product von $(n+1)$ linearen Functionen:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{\lambda=0}^{p-1} (x_0 + z_\lambda x_1 + \dots + z_\lambda^n x_n)$$
$$\times \prod_{\mu=p}^{p+q-1} (x_0 + z_\mu x_1 + \dots + z_\mu^n x_n)(x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \dots + z_{\mu+q}^n x_n)$$

hergestellt. Alsdann haben die vielfachen Integrale die Form

$$\int\int \cdots e^{-F(x_0, x_1, \ldots, x_n)} dx_0 \, dx_1 \ldots dx_n,$$

ausgedehnt über dasjenige Gebiet, das für $p+q$ beliebige positive Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}, c_p, \ldots, c_{p+q-1}$ dem System der Ungleichheiten:

$$0 < x_0 + z_\lambda x_1 + \cdots + z_\lambda^n x_n < b_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, p-1),$$

$$0 < (x_0 + z_\mu x_1 + \cdots + z_\mu^n x_n)(x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \cdots + z_{\mu+q}^n x_n) < c_\mu^2$$

$$(\mu = p, p+1, \ldots, p+q+1)$$

genügt.

In der Theorie der hier untersuchten vielfachen Integrale erhält die Anzahl $p+q$, die gleich der Summe der Anzahl der reellen und der Anzahl der Paare von complexen conjugirten Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ ist, eine besondere Bedeutung.

Das Folgende enthält eine Mitteilung des Herrn Hermite über die Entwickelungen der 16 Verbindungen $\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(a)}$ u. s. f. (s. F. d. M. XVII, 1885, 460 u. 461), und über die Integrale der genannten Verbindung zwischen den Grenzen $a = 0 \ldots K$ und $a = -\frac{K}{2} \cdots + \frac{K}{2}$ u. dgl. m. M.

D. Edwardes. Solution of questions 8465 and 8500. Ed. Times. XLVI. 75-76.

Man setze $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, so ist

$$S_1 - (\tfrac{1}{2})^2 \frac{S_2}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{S_3}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{S_4}{4} + \cdots = \frac{16}{\pi}(1 - \log 2),$$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1-k)}{(1-k\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} dk \, d\varphi = 8(\log 2 - 1).$$

Lp.

F. Mertens. Ueber ein dreifaches Integral, welches das Potential eines homogenen Ellipsoids als speciellen Fall enthält. Gött. N. 269-272.

Sind χ und ψ homogene ganze Functionen zweiten Grades

von x, y, z,

$$\varphi = \chi + 2b_{14}x + 2b_{24}y + 2b_{34}z + b_{44}$$

und μ, ν positive Zahlen, so wird für das Integral

$$J = \iiiint (1-\psi-t\varphi)^{\mu-1} t^{\nu-1} dt\,dx\,dy\,dz,$$

welches sich über alle positiven t und über alle möglichen Werte von x, y, z, die der Bedingung $\psi + t\varphi \overline{\gtrless} 1$ genügen, erstreckt, folgender Ausdruck gefunden:

$$J = \frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)} \int \frac{t^{\nu-1} L^{\mu+\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{\Delta}}$$

mit den Grenzbedingungen $\psi \leqq 1$; $L \geqq 0$; $t \geqq 0$, und zwar ist gesetzt

$$L = 1 + t^2 \frac{F(b_{14}, b_{24}, b_{34})}{\Delta} - b_{44} t$$

und bedeutet Δ die Discriminante, F die adjungirte Form der quadratischen Form $\psi + t\chi$. Ferner ergiebt sich:

$$\iiint \frac{(1-\psi)^{\mu+\nu-1}}{\varphi^{\nu}} dx\,dy\,dz = \frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{3}{2}+\mu)} \int \frac{t^{\nu-1} L^{\mu+\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{\Delta}}.$$

Nimmt man

$$\mu = 1-\nu; \quad \varphi = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

an, so ergiebt sich der bekannte Ausdruck für das Potential eines homogenen Ellipsoids. H.

U. Bigler. Betrachtung des räumlichen Integrals $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r^{1+\alpha}}$ ausgedehnt über das Innere des Ellipsoides $\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1$. Bern. Mitt. No. 1175. 52-61.

Da sich der Verfasser der Darstellung

$$\frac{1}{r^{1+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}(1+\alpha))} \int_0^\infty e^{-r^2\chi} \chi^{\frac{1}{2}(-1+\alpha)} d\chi$$

und des discontinuirlichen Factors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} (e^{ig\varphi} + e^{-ig\varphi}) d\varphi = 1 \quad \text{für} \quad 0 < g < 1,$$

$$= 0 \quad " \quad 1 < g$$

bedient, so stellt die Arbeit eine Modification des Dirichlet'schen Verfahrens zur Ermittelung des Wertes des vorgelegten Integrals dar. Lp.

U. Bigler. Potential einer elliptischen Scheibe von der Dichtigkeit 1, deren Punkte den Gleichungen $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}\leqq 1$, $z=0$ genügen, abgeleitet mittelst des discontinuirlichen Factors von Dirichlet. Bern. Mitt. No. 1176. 62-71.

Die Arbeit steht mit der vorangehenden in engem Zusammenhange, so dass einige Betrachtungen aus der einen auch in der anderen Verwertung finden. Die vom Verfasser benutzten Integrationswege sind zum Teile dieselben wie die in seiner Arbeit: „Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter“ (J. für Math. CII. 237). Lp.

J. Larmor. The transformation of multiple surface integrals into multiple line integrals. Mess. (2) XVII. 23-30.

Ein über ein Volumen erstrecktes Integral kann auf verschiedene Arten als ein über seine Begrenzung erstrecktes Oberflächen-Integral ausgedrückt werden. Viele derartige elegante Sätze stammen von Gauss her. Damit aber das Oberflächen-Integral einer Vectorfunction (ihrer Normalcomponente über die Oberfläche hin) durch ein Linien-Integral über den Umfang hin ausdrückbar sei, muss die Function einer gewissen Bedingung genügen. Diese Bedingung wird ermittelt, und unter der Annahme ihres Bestehens wird die fragliche Integral-Relation bestimmt und erörtert.

Der Verfasser findet, dass noch eine andere Klasse von Integralen aus der mathematischen Physik besteht, in denen die Integration über zwei Umfänge erstreckt wird. Eine gleichförmig leuchtende offene Oberfläche sende z. B. durch eine gegebene Oeffnung eine Strahlenmenge, welche nur von den Umgrenzungen der Oberfläche und der Oeffnung abhängt, wobei dafür gesorgt

ist, dass alle Punkte der einen Umgrenzung von allen der anderen sichtbar sind. Oder aber die gegenseitige Energie zweier elektrischen Ströme kann entweder als ein über ihre Stromkreise erstrecktes Integral, oder als ein aus den äquivalenten magnetischen Schalen hergeleitetes Oberflächen-Integral ausgedrückt werden. Der Verfasser untersucht die allgemeinen Formen solcher Beziehungen. Glr. (Lp.)

N. N. Zinine. Ueber einige mehrfache Integrale. Warsch. Nachr. 1-15. (Russisch.)

Das n-fache Integral

$$S_n = \int_{(n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, F(x_1+x_2+\cdots+x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

wo die Integration auf alle positiven Werte der Veränderlichen ausgedehnt ist, die der Bedingung $x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq h$ genügen, lässt sich bekanntlich durch das Integral

$$J_{n-1}(t) = \int_{(n-1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}$$

(die Integration erstreckt sich auf alle positiven Werte der Veränderlichen, für welche $x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq t$) in folgender Weise ausdrücken:

$$S_n = \int_0^h F(t)\,.\,J_{n-1}(t)\,dt.$$

In der vorliegenden Note erfolgt die Reduction vermittelst der Formel

$$\int_0^a dx\,.\int_0^x \varphi(x, y)\,dy = \int_0^a dy\,.\int_y^a \varphi(x, y)\,dx.$$

Es werden auch als specielle Fälle des allgemeinen Theorems die Theoreme von Dirichlet, Liouville und Schlömilch abgeleitet. Wi.

F. Buchwald. Interpolation og Integration ved Räkker. Zeuthen T. (5) V. 79-90, 97-121.

Für gegebene Functionen entwickelt der Verfasser nach dem Vorgange Newton's Interpolationsreihen, indem er diese

so bestimmt, dass für n Werte der unabhängigen Variabeln die Summe der n ersten Glieder der Reihe die genauen Werte der Function annimmt. Darnach wird gezeigt, wie man Interpolationsreihen für Integrale entwickeln kann.

Der Aufsatz beschäftigt sich im wesentlichen damit, wie man Interpolationsreihen darstellen kann, die für Zahlenrechnungen bequem sind, und wie die genannten n Werte der unabhängigen Variabeln so zu wählen sind, dass der Fehler, den man durch Auslassung der Restglieder begeht, so klein wie möglich wird.

V.

N. J. Sonine. Ueber die angenäherte Berechnung der bestimmten Integrale und über die dabei vorkommenden ganzen Functionen. Warsch. Nachr. 1-76. (Russisch.)

Ausführliche Darlegung der Theorie nach dem von Gauss, Tschebyscheff, Markoff u. a. erreichten Standpunkt. Der Verfasser beabsichtigt, die Aufgabe der angenäherten Berechnung der bestimmten Integrale nach der Interpolationsmethode in ihrer grössten Allgemeinheit darzustellen. Dazu betrachtet er das Integral $\int_a^b \mathfrak{F}(x) f(x) dx$ ($\mathfrak{F}(x)$ soll das Zeichen zwischen den Grenzen a und b nicht ändern) und setzt voraus, dass m gewisse Bedingungen zwischen den Coefficienten der Näherungsformel und den dabei eintretenden Werten der Unbekannten bestehen. Es wird bei diesen Voraussetzungen die allgemeinste Formel der mechanischen Quadratur mit dem Restgliede erhalten, in welcher alle bekannten Formeln von Tschebyscheff, Christoffel u. a. enthalten sind.

In dem speciellen Falle $m = 0$ sind die n Werte der Unbekannten in der Näherungsformel die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$. Diese Function $\varphi_n(x)$ hat die Eigenschaft: das Integral

$$\int_a^b \mathfrak{F}(x) \varphi_n(x) \Theta(x) dx$$

ist gleich Null, wenn $\Theta(x)$ eine willkürliche Function $(n-1)^{\text{ten}}$

Grades ist. Der Verfasser zeigt ausführlich, wie alle bekannten Eigenschaften der Function $\varphi_n(x)$ aus jener charakteristischen Eigenschaft folgen. Die Entwickelung der willkürlichen Function nach den Functionen $\varphi_n(x)$ führt zu einem einfachen Beweis der Tschebyscheff'schen Formel für das Integral:

$$\int_a^b \mathfrak{F}(x) f(x) f_1(x) dx.$$

Am Ende werden neue Eigenschaften der speciellen Functionen $\varphi_n(x)$ hergeleitet; so führt der Verfasser die Functionen an:

(1) $\varphi_n(x) = (-2\alpha)^{-n} e^{\alpha(x+p_1)^2} D^n e^{-\alpha(x+p_1)^2}$,

(2) $\varphi_n(x) = (-\alpha)^{-n}(x-a)^{-\lambda} e^{\alpha(x-a)} D^n e^{-\alpha(x-a)}(x-a)^{\lambda+n}$,

(3) $\varphi_n(x)$

$$= (-1)^n \frac{(x-a)^{-\lambda}(b-x)^{-\mu}}{(\lambda+\mu+n+1)\dots(\lambda+\mu+2n)} D^n(x-a)^{n+\lambda}(b-x)^{n+\mu}.$$

Wi.

R. Vogel. Berechnung der bestimmten Integrale nach den particulären Werten der integrirten Function. Kiew. Nachr. 173-186. (Russisch.)

Es werden die Gleichungen, zu denen die Gauss'sche Methode der mechanischen Quadratur führt, elementar ohne Berufung auf die Eigenschaften der Kugelfunctionen aufgelöst. Wi.

B. Baillaud. Sur le calcul numérique des intégrales définies. Toulouse Ann. de l'Obs. II. 1-36.

Die Arbeit behandelt in weitem Umfange das Problem der numerischen Berechnung der bestimmten Integrale, folgt im ganzen dem Princip von Gauss, entwickelt aber die zu integrirende Function nach den sinus und cosinus der Vielfachen des Arguments. H.

P. Mansion. Sur la formule de quadrature de Gauss et sur la formule d'interpolation de M. Hermite. C. R. CIV. 488-490.

Es wird gezeigt, wie man aus der Newton'schen Quadratur-

formel durch einen einfachen Grenzübergang mit Anwendung von Cauchy's Formel für die Residuen zur Interpolationsformel von Hermite gelangen kann, eine Methode, die Lipschitz in C. R. LXXXVI. 120 (F. d. M. X. 1878 187) angiebt, jedoch ohne auf imaginäre Variabeln Rücksicht zu nehmen. H.

P. Mansion. Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss. Mathesis VII. Suppl. I.

Aus den Belg. Bull. (3) XI. 293-307 (F. d. M. XVIII. 1886. 265-266). Mn. (Lp.)

P. Mansion. Sur le calcul approché des aires planes. Mathesis VII. 77-84.

Verschiedene Folgerungen aus den nachstehenden Grundformeln:

$$h(\tfrac{1}{2}y_0+\tfrac{1}{2}y_1) < \text{Inhalt}\,(y_0, y_1) < h(\tfrac{3}{2}y_1-\tfrac{1}{2}y_2),$$
$$h(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+\tfrac{1}{2}y_2) < \text{Inhalt}\,(y_0, y_2) < 2hy_1,$$
$$h(\tfrac{1}{2}y_0+\tfrac{1}{2}y_1) < \text{Inhalt}\,(y_0, y_1) < h(\tfrac{1}{2}y_0+\tfrac{1}{2}Y_1),$$

wo y_0, y_1, y_2 drei Ordinaten einer gegen die x-Axe concaven Curve sind, die den Abscissen x_0, x_0+h, x_0+2h entsprechen, Y_1 die Ordinate desjenigen Punktes ist, in welchem die Tangente im Endpunkte von y_0 die Verlängerung von y_1 trifft, Inhalt (y_0, y_1) und Inhalt (y_0, y_2) die Flächenstücke der Curve bedeuten, welche zwischen den Ordinaten y_0 und y_1 oder y_0 und y_2 liegen.

Mn. (Lp.)

É. Collignon. Une méthode graphique de quadrature. S. M. F. Bull. XV. 145-146.

Das Integral $\int y dx$ wird dargestellt als Summe von Trapezen I, II, ... über den Elementen dx zwischen den Ordinaten y_0, y_1, y_2, ..., begrenzt durch Sehnen, deren Mitten 1, 2, ... seien. Man verbinde 1 mit 2; die Verbindungslinie schneide y_1 im Punkte a_1, der nach vertauschten Enden in (12) fällt. Die Verbindungslinie von (12) und 3 schneide y_2 im Punkte a_2, der

nach vertauschten Enden in (123) fällt, u. s. f. Der zuletzt so erhaltene Punkt (123 ...) ist der Schwerpunkt des Systems der nach 1, 2, 3, ... parallel verschobenen Elemente dx, und das Rechteck aus seiner Ordinate und dem Intervall der x drückt den gesuchten Flächenraum aus. Es folgen viele Beispiele vorteilhafter Anwendung dieser Methode. H.

J. Massau. Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 1 vol. 8°. 731 S. mit Atlas in 4° von 24 Tafeln.

Nach einer Notiz, welche der Verf. vor der Veröffentlichung des Buches im Bulletin de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand, December 1877, hat erscheinen lassen, ist der Inhalt der folgende:

Die hauptsächlichen graphischen Methoden, die bis jetzt angewandt sind, gehören zwei Gattungen an: Die einen sind rein geometrischer Natur und bilden seit lange eine bekannte Wissenschaft unter dem Namen des graphischen Calcüls oder der zeichnerischen Rechnung. Die anderen stammen gleichzeitig aus der Geometrie und der Statik her und bilden eine ganz junge Wissenschaft, die man graphische Statik genannt hat. Der Hauptvorzug dieser letzteren besteht darin, dass sie fast einzig auf einer und derselben Zeichnung beruht, der Zeichnung des Seilpolygons vermittelst des Polygons von Varignon. Daher kommt es, dass man sehr schnell mit den Constructionen vertraut wird, und man gelangt nicht nur schneller zum Ziele als durch jede andere Methode, sondern eine einfache Prüfung der Federzeichnung ermöglicht die unmittelbare Auffassung der Gesamtheit der Operationen und die Prüfung ihrer vollständigen Genauigkeit. Der graphische Calcül scheint dieselben Vorzüge nicht zu besitzen; die wichtigsten Aufgaben werden durch unvollständige oder unhandliche Methoden gelöst, die den Geist fast immer mehr ermüden als die Rechnungen, die sie umgehen wollen. Der Grund liegt in der Mannigfaltigkeit der Operationen, und dem Anscheine nach dürfte man durch die Wahl einer typischen Construction

und einen systematischen Gebrauch dieser Construction zu neuen, ebenso vorteilhaften Methoden gelangen wie in der graphischen Statik. Der Zweck des Werkes des Hrn. Massau liegt in der systematischen Erläuterung dieser Methoden. Es ist in sechs Bücher eingeteilt.

Das erste Buch handelt von der typischen Operation, die graphische Integration genannt wird und sich, wie folgt, beschreiben lässt. Wenn eine Curve $y = f(x)$, die Stammcurve (courbe primitive), gegeben ist, die Curve $Y = F(x)$ (wo $F'(x) = f(x)$) oder die Integralcurve zu construiren. Wie man durch das Polygon von Varignon die Neigungen der Seiten des Seilpolygons erhält, so kann man ein Diagramm construiren, welches die Neigungen der Seiten eines der Integralcurve ein- oder umbeschriebenen Polygons giebt, und daraus zwei allgemeine Methoden graphischer Integration ableiten, von denen die erste die Kenntnis der Durchschnitts-Ordinaten, die zweite die Kenntnis der Durchschnitts-Abscissen der Bogen der Stammcurve erfordert. In der Mehrzahl der für die Bedürfnisse der Praxis zu betrachtenden Fälle werden diese mittleren Ordinaten und Abscissen leicht bestimmt, und man erhält eine genaue Integration; in den übrigen Fällen geht man schrittweise vor und erhält eine angenäherte Integration. Es ist unnötig, sich wegen der Integrationsconstanten Sorge zu machen; ein beliebiges Integral n^{ter} Ordnung, das gezeichnet ist, stellt das allgemeine Integral dar, wenn man voraussetzt, dass die Ordinaten der Curve nach der negativen Seite hin durch eine willkürliche Parabel des Grades $n-1$ begrenzt sind; die Bedingungen, welche ein besonderes Integral definiren, gestatten die Bestimmung der auf dieses Integral bezüglichen Merkcurve (courbe de repère).

Das zweite Buch ist der Erforschung der verschiedenen Anwendungen auf die Algebra, die Geometrie und die Mechanik gewidmet. Eine grosse Zahl von Curven können durch die Verfahrungsarten der graphischen Integration construirt werden. Anzuführen sind die Parabeln verschiedener Grade, wenn sie durch ihre Gleichungen oder eine genügende Anzahl von Punkten und Tangenten gegeben sind; die Hyperbeln, welche eine Glei-

chung von der Gestalt

$$y = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{x^{m-1}} + \cdots + l$$

haben; die Curven, deren Ordinate eine rationale Function der Abscisse ist, und allgemeiner alle die algebraischen Curven, denen Hr. Cayley den Namen unicursale Curven gegeben hat. Die ebenen Flächeninhalte und ihre Momente verschiedener Ordnungen können vermittelst gewisser Integralcurven bestimmt werden, welche Momenten-Curven heissen. So werden die statischen und die Trägheits-Momente bezw. durch eine doppelte und eine dreifache Integration erhalten; die Ordinate des Schwerpunktes ist die Ordinate, wo das statische Moment Null ist, und wird mit der grössten Leichtigkeit gewonnen. Die Oerter der Schubkräfte und der Biegungsmomente eines geraden, durch Normalkräfte beanspruchten Balkens sind bezw. das erste und das zweite Integral der Belastungscurve. Die Gleichgewichtscurve eines von denselben Kräften beanspruchten Fadens ist identisch mit dem Orte der Biegungsmomente und kann durch eine doppelte Integration erhalten werden.

Das dritte Buch enthält Zeichnungen, welche die graphische Ausführung aller Berechnungen der zur Anlage eines Weges nötigen Erdarbeiten gestatten.

Das Buch IV umfasst die Entwickelung der graphischen Methoden bezüglich der Festigkeiten der Bauten in Mauerwerk; man kann ohne irgend eine Rechnung die Abmessungen der Mauern eines Behälters oder von Futtermauern bestimmen und alle Aufgaben bezüglich der Festigkeit von Gewölben lösen.

Das Buch V handelt von der Berechnung gerader Balken. Die Oerter der Schubkräfte und der Biegungsmomente sind Integrale, die mit gewissen Constanten behaftet sind (Stützenreactionen, Kämpferreactionen). Die Neigung $\frac{dy}{dx}$ und der Pfeil y der mittleren deformirten Faser sind bezw. das erste und das zweite Integral des Ortes der Biegungsmomente. Es ist also möglich, graphisch alle Elemente eines geraden Balkens zu finden, wie auch die Belastungen, die Stützbedin-

gungen und die Anzahl der Zwischenräume beschaffen sein mögen.

Das Buch VI giebt die Auseinandersetzung eines Integrationsverfahrens, das auf die Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form $f(x, y, y') = 0$ anwendbar ist. Es beruht auf der Erforschung der Curven $f(x, y, a) = 0$, den Oertern derjenigen Punkte, wo die unendlich vielen Integrale der gegebenen Gleichung dieselbe Neigung besitzen. Durch dieses Verfahren kann man die Gestalt der hydraulischen Axen der nicht prismatischen Wasserläufe untersuchen.

Der Unterschied dieses Werks von den ähnlichen Arbeiten liegt darin, dass der Verfasser mehr die Bestimmung der Integrale durch hinreichende Elemente als die wirkliche Zeichnung der Curven unternimmt. Die auf einander folgenden Integrationen der ganzen Functionen werden (Buch II) durch die Bestimmung einer Parabel n^{ten} Grades ausgeführt vermittelst eines halbumbeschriebenen vieleckigen Umfanges. Die äussersten Seiten dieses Umfanges berühren die Vielecksaxe, aber man kann (Buch V) soviel Punkte und Tangenten, wie man will, durch eine einfache Construction finden. Die Differenzen verschiedener Ordnungen der Ordinaten dieser Vielecke sind den Ableitungen in einem Punkte der Parabelaxe proportional. Man kann also die Berührung beliebiger Ordnung zwischen zwei verschiedenen Parabelaxen leicht ausdrücken.

Ein grosser Teil beruht auf der genauen Integration der Parabeln. In anderen Teilen wendet der Verfasser, wenn die Functionen nicht integirt werden können, die angenäherte graphische Integration an. Mn. (Lp.)

J. Massau. Note sur les intégraphes. Paris. Gauthier-Villars. 32 S.

J. Massau. Calcul des cotisations des sociétés de secours mutuels. Paris. Gauthier-Villars. 21 S.

Die erste Broschüre giebt Nachträge zu dem Werke des Verfassers über die graphische Integration. 1) Scheiben-Inte-

graph. 2) Integraph des Hrn. Abdank-Abakanowicz. 3) Kugel-Integrator. 4)-7) Sachliche Einteilung der Integratoren. a) Integratoren in Polarcoordinaten, b) in rechtwinkligen Coordinaten; c) mit ausgeglichenen Fehlern. 8) Besondere Integratoren; mechanische Aufzeichnung der elliptischen Integrale. 9) Wage zum Abwägen der Polynome.

Die zweite Schrift enthält eine neue, auf der graphischen Integration beruhende Lösung für die Untersuchung der Beiträge der auf Gegenseitigkeit gegründeten Gesellschaften.

Mn. (Lp.)

G. W. McElroy. Description of cubical integrator. Annals of Math. III. 105-108.

Das hier beschriebene Instrument giebt durch Drehung eines Radius das Volumen eines Ringes an, der bei Rotation einer geschlossenen ebenen Figur entsteht, wenn ein Stabende längs des Umfangs des erzeugenden Flächenstücks geführt wird. H.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

L. Königsberger. Ueber die Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung angehörigen selbstständigen Transcendenten. Math. Ann. XXX. 299-309.

Im Anschluss an die Arbeit „Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung angehörigen selbständigen Transcendenten" (Acta Math. III; F. d. M. XV. 1883. 242) wird hier nachgewiesen, dass es stets algebraische irreductible Differentialgleichungen beliebig vorgeschriebener Ordnung giebt, für welche die Anzahl der durch dieselben definirten Transcendenten endlich, aber grösser als die Ordnung der Differentialgleichung

ist. Wendet man nämlich auf eine irreductible homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$z^{(m)}+P_1 z^{(m-1)}+\cdots+P_{m-1}z'+P_m z=0$$

die Substitution

$$f_0(x, y)z+f_1(x, y)z'+\cdots+f_k(x, y)z^{(k)}=0$$

an, worin $f_0, \ldots, f_k$ algebraische Functionen bedeuten, so erhält man eine algebraische Gleichung $(m-1)^{ter}$ Ordnung in y, von welcher das allgemeine Integral sich als eine algebraische Function von $m(k+1)-1$ ihrer particulären Integrale ausdrücken lässt. In dem speciellen Falle der citirten Arbeit ist $m=2$, $k=1$. Den Beschluss bildet ein neuer Beweis des Satzes, dass die einzigen algebraischen Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären, der unabhängigen Variabeln und willkürlicher Constanten ist, die linearen Differentialgleichungen oder durch algebraische Substitutionen aus solchen abgeleitete sind. Hr.

L. Königsberger. Bemerkungen zu Liouville's Classificirung der Transcendenten. Math. Ann. XXVIII. 483-492.

Der Verfasser findet, dass Liouville in seiner Arbeit: Sur la classification des transcendantes etc. im zweiten und dritten Bande seines Journals die Frage nach der Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen für die Absicht, sie auf transcendente Functionen zu übertragen, nicht zweckmässig formulirt hat, und nimmt daraus Anlass, die hierher gehörigen Probleme in völliger Allgemeinheit zu bezeichnen, ohne deshalb die sich ergebenden Sätze mit einer Einteilung der Transcendenten, wie sie Liouville vorschwebte, in Zusammenhang bringen zu wollen. Wie Abel algebraische Functionen 1ter, 2ter, ... Ordnung einführt, die als Lösungen successiv zu bildender binomischer Gleichungen auftreten, durch die die Wurzeln algebraisch auflösbarer Gleichungen rational ausgedrückt werden, so werden z. B. beim Logarithmus (oder der Exponentialgrösse) logarithmische (Exponential-) Functionen 1ter, 2ter, ... Ordnung durch successiv aufzustellende algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung definirt und die

Frage aufgeworfen, welche algebraische Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung logarithmische Integrale irgend welcher Ordnung besitzen können. Es ergiebt sich, dass einer solchen eine logarithmische Function von einer höheren als der m^{ten} Ordnung niemals genügen kann. Das so charakterisirte Problem und die entsprechende Untersuchungsmethode wird auf Transcendenten erweitert, die durch eine beliebige irreductible Differentialgleichung n^{ter} Ordnung definirt sind, und die Frage erörtert, ob eine gegebene algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die betrachtete Transcendente in irgend einer Ordnung zum Integrale haben kann. Hierbei lässt sich der vom Verfasser gefundene Satz über die Unveränderlichkeit einer algebraischen Relation zwischen Integralen algebraischer Differentialgleichungen und ihren Ableitungen (J. für Math. LXXXIV, F. d. M. X. 1878. 243) mit Erfolg anwenden. Hr.

G. Teixeira. Deuxième note sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 107-110.

Beweis des folgenden Theorems: Die Reihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reducirte Brüche darstellen, kann nicht die Entwickelung einer Function sein, die durch eine algebraische Gleichung zwischen $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ mit constanten Coefficienten

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$$

definirt ist, wenn die Nenner von $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, wie gross auch n sei, Primfactoren enthalten, die bezüglich grösser sind als $n+1, n+2, \ldots$ Hr.

P. Appell. Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. C. R. CIV. 1776-1779.

P. Appell. Sur les invariants des équations différentielles. C. R. CV. 55-58.

Der von Laguerre eingeführte Begriff der Invarianten der

linearen homogenen Differentialgleichungen wird auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, die in Bezug auf die unbekannte Function und ihre Ableitungen homogen von beliebigem Grade sind, ausgedehnt. Als Beispiel wird der einfachste Fall, wo Ordnung und Grad gleich 2 sind, behandelt, und zwar zunächst die Form

$$By'y''+Cyy''+Dy'^2+Eyy'+Fy^2=0,$$

B, C, ... sind gegebene Functionen von x. Die Substitution $y=Xe^{\int\frac{dx}{v}}$ führt bei passender Bestimmung von X als Function von x auf die Form

$$(1)\qquad \frac{dv}{dx}=\alpha v^3+\beta v^2+\gamma v+\delta.$$

Die weitere Substitution $v=\lambda w+\mu$, bei geeigneter Wahl der Functionen λ und μ, und eine Aenderung der unabhängigen Variabeln, führt zu der reducirten Form

$$\frac{dw}{d\xi}=w^3+J.$$

J ist eine absolute Invariante, deren Ausdruck durch α, β, γ, ... angegeben wird. Ist $J=0$, so existirt zwischen vier Integralen der Gleichung (1) eine algebraische Relation. Bei der allgemeineren Form

$$Ay''^2+By''y'+Cy''y+Dy'^2+Eyy'+Fy^2=0,$$

wo A von Null verschieden ist, beschränkt sich der Verfasser auf die Betrachtung eines besonderen Falls. Endlich wird bemerkt, dass, wenn A, B, ... constant oder von der Form $(x-a)^4\mathfrak{A}$, $(x-a)^3\mathfrak{B}$, ..., $(x-a)\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ sind ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... Constanten), Integrale von der Form e^{rx} oder $(x-a)^r$ existiren; diese sind particulär, wenn $A=0$, und können singulär sein, wenn $A\gtrless 0$. In der zweiten Note wird mitgeteilt, dass die Gleichung (1) bereits Gegenstand einer Note des Herrn Liouville (C. R. CIII, F. d. M. XVIII. 1886. 287) gewesen ist, und dass die dort angegebenen Fälle der Integrabilität diejenigen sind, in welchen die Gleichung (1) in eine andere von derselben Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann. Daran an-

schliessend wird gezeigt, dass die Gleichung

$$y^{n-1}y'' = a_0 y'^n + a_1 y'^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

auf die reducirte Form

$$\frac{dw}{d\xi} = w^n + J_2 w^{n-2} + J_3 w^{n-3} + \ldots + J_{n-2} w^2 + J_n$$

zurückgeführt werden kann. $J_2, \ldots, J_n$ sind absolute Invarianten. Sind diese constant oder von der Form $J_k = c_k \xi^{\overline{1-n}}$ (with k over the bar: $J_k = c_k \xi^{\frac{k}{1-n}}$), so ist die Gleichung integrirbar und kann auf eine solche mit constanten Coefficienten zurückgeführt werden. Hr.

A. Cayley. On Briot and Bouquet's theory of the differential equation $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$. London M. S. Proc. XVIII. 314-324.

Die Bedingungen, welche Briot und Bouquet in ihrem berühmten Werke: „Théorie des fonctions doublement périodiques etc.“ (vorher im J. de l'Éc. Pol. Cah. XXXVI) dafür entwickelt haben, dass die im Titel angeführte Gleichung ein monodromes Integral zulasse, werden von neuem abgeleitet, ohne dass jedoch in der Methode irgend eine Veränderung erkennbar wäre, wenn man nicht die Einführung gewisser Bezeichnungen dafür nehmen wollte. Die fraglichen Bedingungen lassen sich nach Briot und Bouquet aus den Entwickelungen der Function U nach Potenzen von $u-a$ entnehmen, wenn U und u durch die Gleichung $F(U, u) = 0$ verknüpft sind, und $u = a$ als der zu $z = c$ gehörige Anfangswert angenommen ist. Herr Cayley nimmt für u, U die Variabeln x, y und nennt diejenigen Curvenpunkte zulässig (permissive), bei denen die gedachte Entwickelung auf die Eindeutigkeit des Integrals u an der untersuchten Stelle schliessen lässt, die anderen Curvenpunkte heissen unzulässig (prohibitive). Der Verfasser stellt nun eine vollständige Tafel der „zulässigen Punkte“, d. h. der zugehörigen Entwickelungen, auf und fügt am Schluss einige Beispiele von Differentialgleichungen mit monodromen (nach Herrn Cayley's Bezeichnung „monotropischen“) Integralen hinzu. Zur Tabelle ist zu be-

merken, dass der Punkt $y = (x-a)^2 P(x-a)$ (P bedeutet eine nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Reihe, deren Anfangsglied nicht verschwindet) nicht unter allen Umständen, wie dort angegeben, zu den zulässigen zu rechnen ist, da die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{du}{dz} = au^2 + bu^3 + cu^4 + \cdots$$

nur, wenn $b = 0$ ist, zu einem eindeutigen Integral u führt, wie auch aus dem citirten Werke von Briot und Bouquet p. 300 zu ersehen ist. Ist aber $b \gtrless 0$ und setzt man $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{b}{a^2}$, so erhält man

$$z = -\frac{A}{u} + B \log u + u P(u)$$

oder

$$e^{\frac{z}{B}} = u e^{-\frac{A}{Bu} + \frac{uP(u)}{B}},$$

und diese Gleichung führt nicht, wie Herr Cayley angiebt, durch Umkehrung zu einem Ausdruck in Form einer einwertigen Reihe in z. Dieselbe Bemerkung gilt für die Gleichungen, die aus (1) durch die Substitutionen $u^{\frac{1}{n}}$, u^{-1}, $u^{-\frac{1}{n}}$ für u abgeleitet sind.

Hr.

E. Picard. Sur un point de la théorie générale des équations différentielles. Darb. Bull. (2) XI. 194-198.

Die Herren Briot und Bouquet haben gezeigt, dass die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

falls f holomorph in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ ist, ein holomorphes Integral besitzt, und dass ausser diesem kein anderes Integral existirt, das für $x = 0$ verschwindet. Den letzteren Satz dehnt der Verfasser auf das System

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \ldots, \quad \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

aus, worin die f holomorphe Functionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ sind.

Wenn der Verfasser in der Einleitung auf die Bemerkung Wert legt, dass beim Verschwinden der Function y für $x = 0$ die Voraussetzung zu machen ist, dass x längs eines Weges von endlicher Länge zum Werte Null gelangt, so findet sich der Hinweis darauf fast in denselben Worten bereits in der Arbeit von Hrn. Fuchs „Ueber die singulären Werte, welche die Integrale etc.", in den Berl. Ber. vom März 1886, p. 283 (F. d. M. XVIII. 1886. 280.)

Hr.

J. Möller. Ueber Coincidenzsysteme gewöhnlicher, algebraischer Differentialgleichungen. Stockh. Öfv. 647-666.

Es werden in betreff der Differentialgleichungen von höherer Ordnung als der ersten Fragen behandelt, die denjenigen analog sind, welche bei der Untersuchung über die singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung auftreten.

Wenn eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\mathfrak{F}(x, y, y', y'') = 0$$

gegeben ist und y'' zwischen dieser und $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y''} = 0$ eliminirt wird, dann muss, damit die dadurch erhaltene Gleichung

$$F(x, y, y') = 0$$

singuläres Integral sei, die Bedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y'} y'' = 0$$

befriedigt sein.

Im allgemeinen ist also die Bedeutung der Gleichung $F = 0$ eine andere. Mit Hülfe eines Satzes von Briot u. Bouquet (Théorie des fonctions elliptiques) wird gezeigt, dass man für ein Wertsystem (x_0, y_0, y'_0), das $F = 0$ befriedigt, eine Entwickelung von der Form

$$y = y_0 + y'_0 x + \tfrac{1}{2} y''_0 x^2 + a x^{\frac{5}{2}} + b x^3 + c x^{\frac{7}{2}} + \cdots$$

(wo x statt $x - x_0$) erhalten kann. Geometrisch bedeutet dies, dass die Integralcurven „Schnabelspitzen" haben. Ausserdem werden mehrere Ausnahmefälle untersucht.

Aehnliche Untersuchungen über Differentialgleichungen beliebiger Ordnung werden darauf angestellt, und hieraus ergeben sich schliesslich für diejenigen erster Ordnung als specielle Fälle die schon früher (von Darboux) gefundenen Resultate. M-n.

A. Cunningham. Depression of differential equations. Mess. (2) XVII. 118.

Bekanntlich gestattet eine Differentialgleichung eine Erniedrigung der Ordnung um Eins, 1) wenn sie y nicht enthält, 2) wenn sie x nicht enthält, 3) wenn sie homogen in erster und wenn sie homogen in m^{ter} Ordnung ist, 4) wenn sie homogen in der Ordnung ∞ ist. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist die Erforschung der Möglichkeit successiver und wiederholter Erniedrigungen.

In betreff der successiven Erniedrigungen ergiebt sich, dass eine Differentialgleichung sie in folgenden Fällen gestattet: 1) Um r Einheiten der Ordnung, wenn die r Grössen $y, y', y'', \dots, y^{(r-1)}$ alle fehlen; 2) um eine Einheit, wenn x fehlt; 3) um eine Einheit, wenn sie in einer beliebigen Ordnung 1 homogen ist; 4) um eine Einheit, wenn sie in jeder anderen Ordnung homogen ist. So gestattet eine Gleichung, in der $x, y, y', y'', \dots, y^{(r-1)}$ fehlen und welche in zwei Ordnungen homogen ist, eine Erniedrigung der Ordnung um $r+3$.

Es zeigt sich auch, dass in gewissen Fällen eine der Erniedrigungen wiederholt werden kann, ohne irgend eine der anderen Besonderheiten zu beeinflussen, und dass in gewissen Fällen die Anwendung der Erniedrigungen 2), 3) oder 4) eine Gleichung erzeugt, welche eine der in der ursprünglichen Gleichung nicht vorhandenen Besonderheiten 1), 2) besitzt und daher weiterer Erniedrigung fähig ist. Glr. (Lp.)

W. G. Imschenetzky. Ueber eine allgemeine Methode zur Auffindung der rationalen gebrochenen particulären Integrale der linearen Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Petersb. Abh. LV. 1-55. (Russisch.)

Die Methode von Liouville für die Auflösung der gestellten Frage (J. de l'Éc. Polyt. XIV) war von ihm nur auf die Gleichungen erster und zweiter Ordnung angewandt; ihre Unzulänglichkeit für die Gleichungen höherer Ordnung war schon von Poisson in seinem Berichte an die Akademie gezeigt. In der vorliegenden Abhandlung wird eine andere Methode gegeben, die nur elementare Operationen fordert. Nach dieser Methode wird die gegebene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m y = V,$$

wo alle P und V ganze Functionen sind, in der Form angewandt:

$$(2) \qquad \frac{d^m (Q_0 y)}{dx^m} + \frac{d^{m-1}(Q_1 y)}{dx^{m-1}} + \cdots + Q_m y = V,$$

wo alle Q auch ganze Functionen von x sind. Es sei M der grösste gemeinschaftliche Teiler aller Functionen Q, so dass

$$Q_0 = Mq_0, \quad Q_1 = Mq_1, \ \ldots, \ Q_m = Mq_m;$$

setzt man $z = My$, so hat die Gleichung die Form:

$$(3) \qquad \frac{d^m (q_0 z)}{dx^m} + \frac{d^{m-1}(q_1 z)}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m z = V.$$

Jeder ganzen Function z_1, die dieser Gleichung (3) genügt, entspricht das gebrochene Integral der gegebenen Gleichung (1): $y = \frac{z_1}{M}$. Also hängt die Lösung der Frage von folgenden Operationen ab: 1) von der Berechnung der Functionen Q und dem Auffinden des grössten gemeinschaftlichen Teilers derselben; 2) von dem Auffinden des ganzen Integrals für die lineare Gleichung mit ganzen Coefficienten nach der Methode der unbestimmten Coefficienten.

Wenn die Polynome $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, kann doch die Differentialgleichung rationale gebrochene particuläre Integrale besitzen und die auseinandergesetzte Methode kann angewandt werden, wenn man vorher die Coefficienten der Gleichung mit einem gemeinsamen rationalen ganzen Factor μ multiplicirt. Auf Grund des Liouville'schen Theorems: „Wenn $y = \frac{X}{Y}$ ein rationales gebrochenes Integral

der Gleichung (1) ist, so teilen alle einfachen Factoren der Function Y den Coefficienten P_0", zeigt sich, dass dieser integrirende Factor μ stets eine Potenz von P_0 ist, deren Exponent leicht ermittelt werden kann.

Am Ende der Abhandlung wird die Methode des Auffindens der rationalen Integrale auch auf die simultanen linearen Gleichungen mit rationalen Coefficienten erweitert. Wi.

P. S. Florow. Ueber den integrirenden Factor der linearen Differentialgleichungen. Chark. Ges. I. 47-51. (Russisch.)

Es handelt sich um die Aufstellung des gegenseitigen Zusammenhangs, welcher zwischen der gegebenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung und der Differentialgleichung des integrirenden Factors besteht, und um die Herleitung der Formel, welche das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung durch die n particulären Integrale der Multiplicatorgleichung ausdrückt.

Wi.

W. Zajaczkowski. Fuchs' Theorie der linearen und homogenen Differentialgleichungen. Krak. Denkschr. XIII. (Polnisch.)

Eine ausführliche Darstellung der bekannten Fuchs'schen Untersuchungen unter Berücksichtigung der hierauf bezüglichen Arbeiten von Frobenius, Thomé u. a. Die Schrift besteht aus folgenden Abschnitten: 1. Die Existenz und Definition des Integrals. 2. Allgemeine Eigenschaften der Integrale. 3. Ueber das Verhalten der Integrale in der Umgebung singulärer Punkte. 4. Lineare und homogene Differentialgleichungen, deren Coefficienten einwertige Functionen in der ganzen Ebene sind. 5. Anwendung der Theorie auf die Differentialgleichungen

$$(x-a)^m y^{(m)} + p_1(x-a)^{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + p_m y = 0,$$

$$(x-a)^2(x-b)^2 y'' + (x-a)(x-b)(c+dx)y' + (f+gx+hx^2)y = 0.$$

Die letzte Gleichung lässt sich auf die die hypergeometrische

Function definirende Gleichung zurückführen. In dieser letzten Gestalt wird sie vom Verfasser näher discutirt. Dn.

V. Volterra. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. Parte prima. Nap. Mem. (3) VI. 107 S.

Ein System von Integralen einer linearen Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten hat die Eigenschaft, bei dem Ueberschreiten gewisser Unstetigkeitslinien eine lineare Substitution zu erleiden, deren Coefficienten längs jeder Linie constant sind. Diese wohlbekannte Thatsache brachte den Verfasser auf den sinnreichen Gedanken, die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf die Theorie der Substitutionen zurückzuführen. Der uns vorliegende erste Teil seiner Untersuchungen, welcher der Differential- und Integralrechnung der Substitutionen gewidmet ist, zeugt von der Fruchtbarkeit dieses Gedankens. Ist:

$$S_x = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\} = \{a_{ij}\}$$

eine lineare Substitution, deren Elemente derivirbare Functionen einer Variabeln x sind, so heissen:

$$dS = S_{x+dx}\, S_x^{-1} = \{a_{ij} + da_{ij}\}\, \{a_{ij}\}^{-1},$$
$$Sd = S_x^{-1}\, S_{x+dx} = \{a_{ij}\}^{-1} \{a_{ij} + da_{ij}\},$$
$$\frac{d}{dx} S = \left\{\frac{da_{ij}}{dx}\right\} \{a_{ij}\}^{-1},$$
$$S \frac{d}{dx} = \{a_{ij}\}^{-1} \left\{\frac{da_{ij}}{dx}\right\}$$

bezw. das linke und das rechte Differential, die linke und die rechte Ableitung von S. Hat die Determinante $|a_{ij}|$ einen constanten Wert, so verschwindet die Summe der Elemente der ersten Diagonale von jeder Ableitung. Ist insbesondere $|a_{ij}| = 1$,

und setzt man $\frac{dS}{dx}\left(\text{oder } S\frac{d}{dx}\right) = \{\alpha_{ij}\}$, so ist:

$$dS\,(\text{oder } Sd) = \left\{\begin{matrix} 1+\alpha_{11}\,dx & \alpha_{12}\,dx & \ldots & \alpha_{1n}\,dx \\ \alpha_{21}\,dx & 1+\alpha_{22}\,dx & \ldots & \alpha_{2n}\,dx \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1}\,dx & \alpha_{n2}\,dx & \ldots & 1+\alpha_{nn}\,dx \end{matrix}\right\}.$$

Die rechte Ableitung ist die transformirte der linken Ableitung durch die ursprüngliche Substitution. Alle Substitutionen, die man dadurch erhält, dass man eine und dieselbe Substitution rechts (links) mit constanten Substitutionen multiplicirt, haben eine und dieselbe linke (rechte) Ableitung. Das Differential eines Productes von zwei Substitutionen ist das Product der Differentiale, die man erhält, wenn man die erste und die zweite Substitution nach und nach als constant betrachtet. Eine ganz ähnliche Regel gilt für die Producte mehrerer Substitutionen.

Schon aus dem letzten Satze lässt sich vermuten, dass der Uebertragung der Begriffe und der Sätze der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung auf den neuen Calcül die Ersetzung der Summen durch Producte vorangehen müsse. Diese Vermutung wird bald bestätigt durch die Definition des Integrales einer Substitution. Ist die Substitution $S = \{\alpha_{ij}\}$ als Function von x in einem Intervalle $p \ldots q$ gegeben, und zerlegt man das Intervall in n Teile $h_1, h_2, \ldots, h_n$, so kann es sich ereignen, dass die Producte $\prod_{\lambda=1}^{r} T_\lambda$, $\prod_{\lambda=r}^{1} T_\lambda$, wo:

$$T_\lambda = \left\{\begin{matrix} 1+\alpha_{11}^{(\lambda)}h_\lambda & \alpha_{12}^{(\lambda)}h_\lambda & \ldots & \alpha_{1n}^{(\lambda)}h_\lambda \\ \alpha_{21}^{(\lambda)}h_\lambda & 1+\alpha_{22}^{(\lambda)}h_\lambda & \ldots & \alpha_{2n}^{(\lambda)}h_\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1}^{(\lambda)}h_\lambda & \alpha_{n2}^{(\lambda)}h_\lambda & \ldots & 1+\alpha_{nn}^{(\lambda)}h_\lambda \end{matrix}\right\}$$

und $\alpha_{ij}^{(\lambda)}$ den Wert von α_{ij} in einem beliebigen Punkte des Intervalles h_λ bezeichnet, bei unbeschränkt zunehmendem n sich je einer von der Art der Zerlegung unabhängigen Grenze nähern; diese Grenze ist die linke bezw. rechte Integralsubstitution von

S im Intervalle $p \ldots q$ und wird durch $\int_p^q S\,dx$ bezw. $S\,dx \int_p^q$ bezeichnet. Die Integrabilitätsbedingung für eine Substitution ist dieselbe wie für eine Function, nämlich $\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda=1}^{n} D_\lambda h_\lambda = 0$, wenn D_λ die Schwankung der Substitution (d. i. die grösste Schwankung ihrer Elemente) im Intervalle h_λ bedeutet. Linke (rechte) Integration und linke (rechte) Derivation sind umgekehrte Operationen; es ist nämlich:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_p^x S\,dx\right) = S, \qquad \left(S\,dx \int_p^x\right)\frac{d}{dx} = S.$$

Zur Integration eines Productes von zwei Substitutionen dient eine Regel, die als teilweise Integration bezeichnet werden darf.

Es bietet keine Schwierigkeit dar, die bisherigen Definitionen und Sätze auf die von mehreren Veränderlichen abhängigen Substitutionen auszudehnen.

Kommt man noch einmal auf den Fall einer einzigen unabhängigen Veränderlichen zurück, und bildet die Differentiale $d(dS)$ und $(dS)d$, so ergiebt sich, dass diese zwei Substitutionen bis auf unendlich kleine Grössen der dritten Ordnung einander gleich sind; sie bilden das zweite linke Differential von S, welches durch d^2S bezeichnet wird und die Form:

$$\begin{Bmatrix} 1+\alpha_{11}\,dx^2 & \alpha_{12}\,dx^2 & \ldots & \alpha_{1n}\,dx^2 \\ \alpha_{21}\,dx^2 & 1+\alpha_{22}\,dx^2 & \ldots & \alpha_{2n}\,dx^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1}\,dx^2 & \alpha_{n2}\,dx^2 & \ldots & 1+\alpha_{nn}\,dx^2 \end{Bmatrix}$$

hat. Die Substitution $\{\alpha_{ij}\}$ heisst die zweite linke Ableitung von S, und wird durch $\frac{d^2}{dx^2}S$ bezeichnet. Sie ist nicht identisch mit $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}S\right)$. Die höheren partiellen Ableitungen einer von mehreren Variabeln abhängigen Substitution werden analog definirt, und einige darauf bezügliche Sätze aufgestellt, wodurch der Weg zur Aufsuchung der Bedingungen gebahnt wird, unter welchen ein gegebenes Product von Infinitesimalsubstitutionen:

$\prod_{r=1}^{m} S_r dx_r$ das vollständige Differential einer (von den m Variabeln x_r abhängigen) Substitution ist. Diese Bedingungen sind:

$$\Delta'(S_r, S_s)_{x_r x_s} = \{0\} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m);$$

$\{0\}$ bezeichnet die Substitution, deren Elemente sämtlich gleich Null sind, und $\Delta'(S_r, S_s)_{x_r x_s} = \{\mu_{ij}^{(rs)}\}$, wo:

$$\mu_{ij}^{(rs)} = \frac{\partial \alpha_{ij}^{(s)}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{ij}^{(r)}}{\partial x_s} + \Sigma \left[\alpha_{it}^{(r)} \alpha_{tj}^{(s)} - \alpha_{it}^{(s)} \alpha_{tj}^{(r)}\right],$$
$$S_r = \{\alpha_{ij}^{(r)}\}, \quad S_s = \{\alpha_{ij}^{(s)}\}$$

ist.

Die weiteren Abschnitte beschäftigen sich mit der Integration eines vollständigen Differentiales, der Theorie der Variation der Integrale, der vielfachen und der krummlinigen Integration, den Differentialparametern der zweiten Ordnung. Zur Charakterisirung dieser Untersuchungen heben wir hervor, dass die Sätze über die krummlinigen und die zweifachen Integrale der von zwei Variabeln abhängigen Substitutionen und über die Differentialparameter den ersten Riemann'schen Studien über die Functionen von zwei Veränderlichen ganz analog sind.

Das Hauptergebnis der Untersuchung kann folgendermassen zusammengefasst werden: Sind zwei von x und y abhängige Substitutionen X, Y mit verschwindender Diagonalsumme in einem einfach zusammenhängenden Gebiete Σ gegeben, und ist $\Delta'(X, Y)_{x,y} = 0$, so ist für jede innerhalb Σ liegende geschlossene Linie s $\int_s Xdx \,.\, Ydy = 1$, wo 1 die identische Substitution bezeichnet; mit anderen Worten, die Substitution $S = \int_A^{(x,y)} Xdx \,.\, Ydy$, wo A ein beliebiger aber fester Punkt ist, ist eine einwertige Function von x und y. Ist dagegen das Gebiet Σ mehrfach zusammenhängend und wird durch Querschnitte in ein einfach zusammenhängendes Σ' verwandelt, so ist S innerhalb Σ' einwertig, und für jeden Querschnitt Q_r existirt eine solche constante Substitution T_r, dass die Werte von S längs eines Ufers

von Q_r aus den Werten von S längs des gegenüberliegenden Ufers durch Multiplication mit T_r entstehen.

Bezeichnet man als den linken Differentialparameter zweiter Ordnung von S die Substitution:

$$\Delta'_2 S = \Delta'\left(-\frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x,y}$$

(wo $-T$ diejenige Substitution ist, deren Elemente entgegengesetzt gleich den Elementen von T sind), so gelten die folgenden Sätze:

Werden zwei Gebiete Σ, Σ' auf einander conform abgebildet, und ist für die Substitution S, als Function der Punkte von Σ betrachtet, $\Delta'_2 S = 0$, so besteht dieselbe Gleichung, wenn S als Function der Punkte von Σ' angesehen wird.

Ist für eine Substitution S von der Determinante Eins $\Delta'_2 S = 0$, so existirt immer eine (conjugirte) Substitution S_1 von derselben Determinante, welche den Gleichungen:

$$\Delta'_2 S_1 = 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}$$

genügt. Vi.

V. Volterra. Sulle equazioni differenziali lineari. Rom. Acc. L. Rend. (4) III. 393-396.

Zwischen den Integralen algebraischer Functionen und denjenigen der linearen homogenen Differentialgleichungen besteht die Analogie, dass, während die ersteren längs der Discontinuitätslinien zu beiden Seiten constante Differenzen aufweisen, die letzteren längs dieser Linien so beschaffen sind, dass die Werte auf der einen Seite sich aus denen auf der anderen Seite mittels linearer Substitutionen mit constanten Coefficienten ableiten lassen. Diese Analogie, sowie der enge Zusammenhang zwischen der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Substitutionstheorie, der in den neueren Arbeiten eine so wichtige Rolle spielt, wird in vorliegender Note zur unmittelbaren Evidenz gebracht, indem zwei Infinitesimal-Operationen an Substitutionen mit variablen Elementen ausgeübt werden, die der gewöhnlichen Differentiation und Integration analog sind, und welche direct

den Uebergang von den Fundamentalintegralen einer linearen Differentialgleichung zu ihren Coefficienten und umgekehrt von diesen zu den Integralen bewerkstelligen. Bedeutet S_x eine lineare Substitution von nicht identisch verschwindender Determinante der n^{ten} Ordnung, deren Elemente endliche und continuirliche Functionen einer Variabeln x sind, und S_{x+dx} gehe aus S_x hervor, indem x durch $x+dx$ ersetzt wird, dann sind die beiden Substitutionen:

$$S_x^{-1} S_{x+dx}, \quad S_{x+dx} S_x^{-1}$$

unendlich wenig von der identischen Substitution verschieden, in der die Elemente der Diagonale gleich 1, die übrigen Elemente gleich Null sind. Dividirt man jedes Element durch dx, nachdem man von den Elementen der Diagonale die Einheit abgezogen, so erhält man zwei Substitutionen, welche als die beiden Ableitungen der Substitution S_x nach x, genommen resp. nach rechts und nach links, zu betrachten sind. Von hier führt dann der umgekehrte Weg zu einem Product von unendlich vielen, von der identischen Substitution unendlich wenig verschiedenen Substitutionen, das als Integration einer gegebenen Substitution aufgefasst und je nach der Ordnung, in der man Substitutionen aufeinanderfolgen lässt, mit Integration nach rechts oder links bezeichnet wird. So ist, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein System von Fundamentalintegralen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y$$

bedeutet, die Substitution

$$S = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ v_1' & v_2' & \ldots & v_n' \\ \vdots & & & \\ v_1^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \ldots & v_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

das Integral nach links der Substitution

$$T = \begin{vmatrix} 0, & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \ldots & p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

so dass also die Beziehung zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung und ihren Integralen symbolisch ausgedrückt werden kann durch

$$S = \int T dx, \quad T = \frac{dS}{dx}.$$

Hr.

L. W. Thomé. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. J. für Math. CI. 203-208.

H. Poincaré. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta Math. X. 310-312.

Herr Thomé macht die Abhandlung des Herrn Poincaré „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires", die derselbe in den Acta Math. VIII, 295 (F. d. M. XVIII. 1886. 273) im Anschluss an eine frühere Arbeit im American J. VII (F. d. M. XVII. 1885. 290) veröffentlicht hat, zum Gegenstande von kritischen Bemerkungen. Sind in der Differentialgleichung

$$P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = 0$$

die P ganze rationale Functionen von x, alle von demselben Grade m, so giebt es n Reihen von der Form $e^{a_i x} x^{r_i} \sum_0^\infty c_\lambda x^{-\lambda}$, welche der Differentialgleichung formell genüge leisten. Eine solche sogenannte Normalreihe stellt, auch wenn sie divergirt, nach Herrn Poincaré eines der Integrale der Gleichung „asymptotisch" dar, falls x mit einem bestimmten Argument ins Unendliche wächst. Herr Thomé wirft dagegen ein, dass die Exponenten r_i zu den Exponenten ϱ_i der wirklich bestehenden Entwickelungen $x^{\varrho_i} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\lambda x^\lambda$, welche für die Verzweigung der Integrale bei $x = \infty$ charakteristisch sind, in gar keiner Beziehung stehen. Diesem Einwande liegt, wie Herr Poincaré bemerkt, die Auffassung zu Grunde, als ob durch dieselbe Normalreihe stets das nämliche Integral asymptotisch dargestellt würde, welches auch das Argument sei, mit dem x ins Unendliche wächst, woraus dann folgen würde, dass die ϱ_i den r_i gleich sein müssten. Gegen diese Deutung verwahrt sich Herr Poincaré unter Berufung auf ver-

schiedene Stellen der erwähnten Abhandlungen, insbesondere auf pag. 309 und 310 der Abhandlung in den Acta Math., wo ausdrücklich bemerkt ist, dass das dargestellte Integral von dem Argumente von x abhängig ist, indem es für gewisse Werte des Arguments plötzlich in ein anderes Integral übergeht, welches die analytische Fortsetzung des ersteren bildet. Eine weitere Bemerkung des Herrn Thomé betrifft das Kriterium, welches Herr Poincaré für die Convergenz einer Normalreihe aufgestellt hat. Dadurch sei die Beantwortung dieser Frage auf die Lösung einer mindestens ebenso schwierigen Aufgabe zurückgeführt. Herr Poincaré giebt dies zu, hält es jedoch angesichts der Unmöglichkeit, die fraglichen Convergenzbedingungen in expliciter Form zu geben, für nützlich, den Zusammenhang zweier gleich unlöslichen Probleme aufgedeckt zu haben. Hr.

L. Heffter. Zur Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Giessen. Habilitationsschrift. Leipzig. Teubner. 32 S.

Im ersten Teil wird untersucht, unter welchen Bedingungen es möglich ist, ein Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung herzustellen von der Beschaffenheit, dass für einen nicht singulären Punkt irgend welche n Ableitungen desselben willkürlich gegebene Werte annehmen. Der folgende Teil beschäftigt sich mit der Form der Integrale in der Umgebung singulärer Punkte unter der Voraussetzung, dass sich sämtliche Integrale nach der Bezeichnung des Herrn Thomé daselbst „regulär“ verhalten.

Ist $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ eine Gruppe von Wurzeln der zum singulären Punkt gehörigen Exponentengleichung, die sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, so stellt man nach Herrn Fuchs die Gruppe zugehöriger Integrale in der Form dar

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha} \psi_{\alpha\beta} \log(x-a)^{\beta-1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

worin $\psi_{\alpha\beta} = (x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha\beta}$, die $\varphi_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $x = a$

eindeutig und stetig sind und für $x = a$ nicht alle $\varphi_{\alpha\beta}$ mit demselben ersten Index verschwinden. Zwischen den $\psi_{\alpha\beta}$ bestehen gewisse von Herrn Fuchs angegebene Relationen, aus denen der Verfasser noch die neue Folgerung zieht, dass die Entwickelung der Function $\varphi_{\alpha\beta}$ nach Potenzen von $x-a$ mit einer Potenz beginnt, deren Exponent $\geqq r_{\alpha-\beta+1} - r_\alpha$ ist. In besonderen Fällen können bekanntlich die Integrale einer solchen Gruppe von Logarithmen frei werden. Während bisher nur die Frage behandelt wurde, unter welchen Bedingungen jedes zu einem bestimmten Exponenten gehörige Integral von Logarithmen frei ist, ist hier die Aufgabe, ein Kriterium dafür aufzustellen, ob es ein zu einem bestimmten Exponenten gehöriges Integral einer solchen Gruppe giebt, welches keinen Logarithmus enthält. Die hierfür gefundenen Bedingungen führen ihrerseits zur Beantwortung der vorerwähnten Frage. Das auf diesem Wege erhaltene System von Bedingungsgleichungen wird als äquivalent mit demjenigen nachgewiesen, welches Herr Frobenius auf einem anderen Wege abgeleitet hat. (J. für Math. LXXVI. 226, F. d. M. V. 1873. 180). Hr.

A. Cayley. Note on the theory of linear differential equations. J. für Math. CI. 209-213.

Zur Entscheidung darüber, ob die Entwickelungen der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung, welche zu einer Gruppe von Verzweigungsexponenten gehören, die sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, Logarithmen enthalten oder nicht, hat Herr Fuchs in der zweiten grundlegenden Abhandlung (J. für Math. LXVIII. 1868) verschiedene Methoden angegeben. Eine derselben ist in dem Satze V. § 6 (p. 374) ausgesprochen. Diesen reproducirt der Verfasser und zeigt an der Hand von Beispielen, dass die erforderliche Rechnung mit derjenigen zusammenfalle, die angestellt werden muss, um zu erkennen, ob eine zum niedrigsten Exponenten der Gruppe gehörige Potenzreihe der Differentialgleichung genügt. Hr.

E. Picard. Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations. Toulouse Ann. I A. 1-15.

Die Transformationsgruppen, von denen hier die Rede ist, sind in ihren wichtigsten Eigenschaften für die Theorie der linearen Differentialgleichungen bereits in einer Note des Verfassers „Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires“ (C. R. XCVI. 1131—34, F. d. M. XV. 1883. 258) charakterisirt worden. Die Ausführung in vorliegender Arbeit betrifft die weitere Untersuchung der Gruppen im Anschluss an die Lie'sche allgemeine Theorie der Transformationsgruppen, unter der besonderen hier zutreffenden Voraussetzung, dass die Transformationsgruppen linear in Bezug auf die Variabeln und algebraisch in Bezug auf die willkürlichen Parameter sind.

Hr.

G. Peano. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari. Torino Atti. XXII. 437-446.

Herr Caqué im Journal de Math. 1864 und Herr Fuchs in den Annali di Mat. 1870 (s. F. d. M. II. 175) haben eine Entwickelung der Integrale linearer Differentialgleichungen in Reihen gegeben, deren Glieder durch wiederholte Quadraturen gebildet sind. Der Verfasser giebt die gleiche Entwickelung für die Integrale des Systems linearer Differentialgleichungen

$$(1)\quad \frac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n, \; \ldots, \; \frac{dx_n}{dt} = \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n,$$

worin $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn}$ continuirliche Functionen von t in dem Intervalle $p \ldots q$ sind. Hierbei ist besonders die Vereinfachung in der Beweismethode und der Darstellung des Endresultats bemerkenswert, die durch die Einführung complexer Zahlen n^{ter} Ordnung bewirkt wird. Das System der Grössen $x_1, \ldots, x_n$ wird durch die complexe Zahl

$$X = [x_1 \ldots x_n]$$

repräsentirt. Das aus den rechten Seiten von (1) gebildete System

$$\alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n, \quad \ldots, \quad \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n$$

ist wiederum eine complexe Zahl, die aus der Zahl X durch die auf sie ausgeübte Transformation

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

hergestellt ist, und wird mit αX bezeichnet. Nennt man zwei complexe Zahlen einander gleich, wenn die sie componirenden Zahlen der Reihe nach gleich sind, so kann man das System (1) in der einzigen Gleichung zusammenfassen

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X.$$

Bei dieser Schreibweise lässt sich das Endresultat in folgender Weise angeben: Es seien $a_1, \dots, a_n$ die Werte von $x_1, \dots, x_n$ für $t = t_0$, die sie repräsentirende Zahl sei

$$a = [a_1 \dots a_n].$$

Dann lautet die Lösung des Systems (1)

$$X = \left(1 + \int \alpha dt + \int \alpha dt \int \alpha dt + \int \alpha dt \int \alpha dt \int \alpha dt + \cdots\right) a,$$

worin die Integrale sich von t_0 bis t erstrecken. Hierbei bedeutet $\int \alpha dt . a$ die auf die complexe Zahl a angewandte Transformation

$$\begin{vmatrix} \int \alpha_{11} dt & \dots & \int \alpha_{1n} dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int \alpha_{n1} dt & \dots & \int \alpha_{nn} dt \end{vmatrix},$$

$\int \alpha dt \int \alpha dt . a$ dieselbe Transformation zweimal hinter einander auf a angewandt, u. s. f. Für die Gültigkeit der Darstellung ist nur erforderlich, dass die Grenzen t_0, t im Intervalle $p \dots q$ liegen. Bedeutet M den grössten Wert, den der stets positive Quotient

$$\frac{(\alpha_{11} x_1 + \cdots + \alpha_{1n} x_n)^2 + \cdots + (\alpha_{n1} x_1 + \cdots + \alpha_{nn} x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

im Intervalle t_0 bis t annehmen kann, so ist die Convergenz obiger Reihe vergleichbar mit der der Exponentialreihe $e^{M \operatorname{mod}(t-t_0)}$.

Hr.

J. E. Oliver. On the general linear differential equation. Annals of Math. III. 109-111.

Im Anschluss an ein Verfahren des Herrn Forsyth zur Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung giebt der Verfasser das allgemeine Integral einer beliebigen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung in Form von unendlichen convergenten Reihen, deren Glieder durch wiederholte Integration gewonnen werden. Wir bemerken, dass diese Lösung bereits von Herrn Fuchs im Jahre 1870 in den Annali di Mat. gegeben worden ist. (Vgl. noch die im Vorhergehenden besprochene Arbeit des Herrn Peano). Hr.

W. Schulz. Untersuchung linearer, homogener Differentialgleichungen, deren Integrale nur einer homogenen Relation höheren als ersten Grades genügen. Diss. Halle. 27 S. 8°.

W. Heymann. Ueber die Integration linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXXII. 22-45.

Die vorliegende Abhandlung bildet die Fortsetzung einer in Schlömilch Z. XXX. 27ff. und 79ff. (S. F. d. M. XVII. 1885. 299) veröffentlichten Arbeit, worin gezeigt wird, wie das „Supplement-Integral" einer completen Differentialgleichung, d. h. die Function, die zu der vollständigen Lösung der reducirten Gleichung hinzuzufügen ist, um das vollständige Integral der completen Differentialgleichung darzustellen, ohne Anwendung der Variation der Constanten erhalten werden kann. Die für diesen Zweck hier behandelte Gleichung lautet:

$$(1)\qquad (a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = \chi,$$

unter χ eine beliebige Function von x verstanden. Die Gleichung lässt sich durch Substitutionen der Form $x=g(\xi)$, $y=\eta h(\xi)$ auf die Gestalt

$$(2)\qquad \xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\frac{d\eta}{d\xi}+p\eta = f(\xi)$$

bringen, und für diese wird das Supplementintegral mit Hülfe der Laplace'schen Methode in zwei Formen dargestellt:

a) $$\eta = -\int_{u_1}^{u_2} \left\{ e^{u\xi} u^{p-1}(u+1)^{q-1} \int_{u_0}^{u} F(u) u^{-p}(u+1)^{-q} du \right\} du,$$

worin $F(u)$ so zu bestimmen ist, dass $\int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u)\, du = f(\xi)$ und die Grenzen u_1, u_2 so zu wählen sind, dass

$$\left| e^{u\xi} u^p (u+1)^q \int_{u_0}^{u} F(u) u^{-p}(u-1)^{-q} du \right|_{u_0}^{u_1} = 0$$

ist.

b) $$\eta = \int_{u_1}^{u_2} \left\{ u^{-p}(u+1)^{-q} F(u) \int_{u_0}^{u} e^{u\xi} u^{p-1}(u+1)^{q-1} du \right\} du,$$

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{u\xi} F(u)\, du = f(\xi),$$

$$\left| e^{u\xi} u^p (u+1)^q \right|_{u_0} = 0.$$

Die Aufgabe, $F(u)$ aus der Functionalgleichung

$$(3) \qquad \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u) du = f(x)$$

zu bestimmen, wird für den Fall, dass $f(x)$ eine echt gebrochene Function ist, gelöst, indem von der aus der Theorie der Gammafunctionen bekannten Relation

$$\int_0^{\pm\infty} e^{ux} u^{\nu-1} du = \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu)}{x^\nu} \qquad (\nu > 0)$$

$$(+\infty \text{ für } x < 0, \ -\infty \text{ für } x > 0)$$

ausgegangen wird. Bemerkenswert sind noch folgende Hülfsmittel zur Bestimmung von F in (3), wenn f gegeben ist. F wird nach Abel's Vorgang „die Determinante von f" genannt. Ist $F(u)$ die Determinante von $f(x)$, dann ist $\frac{d^n F(u)}{du^n}$ die Determinante von $(-1)^n x^n f(x)$, wenn

$$\left| e^{ux} \frac{d^{n-1} F}{du^{n-1}} \right|_{u_1}^{u_2} = 0,$$

und $(u-\alpha)^a(u-\beta)^b F(u)$ die Determinante von

$$e^{\beta x}\frac{d^b}{dx^b}\left\{e^{(\alpha-\beta)x}\frac{d^a}{dx^a}e^{-\alpha x}f(x)\right\}.$$

Der Fall, dass in (1) χ eine ganze Function

$$A_0+A_1x+\cdots+A_\mu\frac{x^\mu}{\mu!}$$

ist, wird besonders behandelt. Wenn $b_0 = 0$ ist, dann ist das Supplementintegral eine ganze Function μ^{ten} Grades, deren Coefficienten sich durch Substitution in (1) mittels recurrenter Gleichungen bestimmen.

Ist b_0 von Null verschieden, dann hat das Supplementintegral die Form

$$y = z+\alpha_0+\alpha_1x+\frac{\alpha_2x^2}{2}+\cdots+\alpha_{\mu-1}\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!},$$

worin $\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1}$ sich durch Coefficientenvergleichung nach der Substitution in (1) eindeutig bestimmen lassen, z aber aus der Differentialgleichung

$$(a_2+b_2x)z''+(a_1+b_1x)z'+(a_0+b_0x)z = A_0-(a_0\alpha_0+a_1\alpha_1+a_2\alpha_2)$$

zu bestimmen ist, was direct mittels der Laplace'schen Methode bewirkt werden kann, bis auf einige Ausnahmefälle, wo die Transformation in (2) erforderlich wird.

Im zweiten Teile der Arbeit wird eine Uebersicht derjenigen Differentialgleichungen gegeben, welche auf die Gleichungen

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)y''+(a_1+b_1x)y'+a_0y = X,$$
$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = X$$

zurückgeführt werden können. Für die erste ist das Supplementintegral in der erwähnten früheren Arbeit dargestellt worden.

Hr.

R. Liouville. Sur quelques équations différentielles non linéaires. J. de l'Éc. Pol. Cah. LVII. 189-250.

Die behandelte Klasse von nicht linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist dadurch charakterisirt, dass ihr allgemeines Integral als eine lineare Relation zwischen den willkürlichen Constanten dargestellt werden kann, deren Coefficienten

die Variabeln enthalten. Eine solche Differentialgleichung hat notwendig die Form

$$(1) \qquad y''+a_1y'^3+3a_2y'^2+3a_3y'+a_4 = 0,$$

worin $a_1, \ldots, a_4$ Functionen von x und y sind, die den Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial a_4}{\partial y}+3a_2a_4\Big)-\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\Big)$$
$$-3a_3\Big(2\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\Big)-a_4\Big(\frac{\partial a_1}{\partial x}-3a_1a_3\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial a_1}{\partial x}-3a_1a_3\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial a_3}{\partial y}-2\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\Big)$$
$$-3a_2\Big(\frac{\partial a_3}{\partial y}-2\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\Big)+a_1\Big(\frac{\partial a_4}{\partial y}+3a_2a_4\Big) = 0.$$

Die vorstehenden Gleichungen constituiren eine Gruppe, die für die Transformationen

$$x = f_1(\xi, \eta), \quad y = f_2(\xi, \eta)$$

invariant bleibt.

Die Integration der betrachteten Differentialgleichung führt der Verfasser auf die eines simultanen Systems von drei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurück, die drei unabhängige gemeinsame Lösungen zulassen. Zu dem Ende wird in dem einleitenden Teile ein solches System einem eingehenden Studium unterzogen, wobei u. a. die in den C. R. CI. (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 344) vom Verfasser mitgeteilten Resultate bewiesen werden. Die Lösung des Systems lässt sich stets auf die Integration einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer unabhängigen Variabeln zurückführen. Mit der Differentialgleichung (1) ist die folgende adjungirt:

$$y''+A_1y'^3+3A_2y'^2+3A_3y'+A_4 = 0,$$

wo

$$A_1 = -a_1, \quad A_2 = -a_2+\tfrac{1}{3}\frac{\partial \log a_1}{\partial y}, \quad A_3 = -a_3+\tfrac{2}{3}\frac{\partial \log a_1}{\partial x},$$
$$A_4 = -\frac{1}{a_1}\Big(\frac{\partial a_3}{\partial y}-2\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\Big),$$

derart, dass mit der Integration der einen die der anderen gegeben ist.

In dem Falle, dass die Coefficienten $a_1, \dots, a_4$ nur eine Variable, etwa x, enthalten, hat das allgemeine Integral der Gleichung (1) die Form

$$K_1\psi_1(x)e^{m_1y}+K_2\psi_2(x)e^{m_2y}+K_3\psi_3(x)e^{m_3y} = 0,$$

wo m_1, m_2, m_3 die Wurzeln einer kubischen Gleichung sind, deren Coefficienten aus den a und ihren Ableitungen rational zusammengesetzt sind, und die ψ durch Quadraturen erhalten werden. K_1, K_2, K_3 sind willkürliche Constanten. Diesem Resultate wird durch eine einfache Transformation eine bemerkenswerte Verallgemeinerung gegeben. Endlich wird für den Fall $a_1 = 0$, $a_4 = 0$, während a_2, a_3 von x und y abhängen, die vollständige Integration geliefert. Zum Schluss werden mehrere Beispiele berechnet. Hr.

G. Floquet. Sur une classe d'équations différentielles linéaires non homogènes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 111-128.

Die betrachteten Differentialgleichungen haben die Form

$$(1) \qquad \frac{d^my}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_my$$
$$= \tilde{\omega}_0(x)+x\tilde{\omega}_1(x)+\cdots+x^n\tilde{\omega}_n(x),$$

in kürzerer Bezeichnung

$$P(y) = \tilde{\omega}(x).$$

Die Coefficienten $p_1, \dots, p_m$ sind eindeutige periodische Functionen von x mit dem einzigen wesentlich singulären Punkt $x=\infty$ und der Periode ω. Die Coefficienten $\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ sind periodisch „von der zweiten Art", und zwar multipliciren sie sich mit einem allen gemeinsamen constanten Factor ε, wenn x sich um ω vermehrt, im übrigen sind sie von derselben Eigenschaft wie die p. Diese Differentialgleichungen haben nun, wie der Verfasser zeigt, stets zum Integral einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{P}(x) = \chi_0(x)+x\chi_1(x)+\cdots+x^s\chi_s(x),$$

worin die χ von derselben Beschaffenheit, wie die $\tilde{\omega}$ sind. In Bezug auf den „Grad" s von $\mathfrak{P}(x)$ gilt Folgendes. Hat die Gleichung $P(y) = 0$, welche, wie der Verfasser früher nachge-

wiesen hat (Ann. de l'Éc. Norm. (2) XII, F. d. M. XV. 1883. 279), zu Lösungen doppelt periodische Functionen zweiter Art besitzt, keine Lösung mit dem Multiplicator ε, so giebt es nur ein Polynom $\mathfrak{P}(x)$, welches der Gleichung (1) genügt, und sein Grad ist n. Hat aber $P(y) = 0$ μ fundamentale zum Multiplicator ε gehörige Lösungen, so enthalten die Coefficienten des Polynoms $\mathfrak{P}(x)$ linear μ willkürliche Constanten, und ihre Grade liegen zwischen den Zahlen n und $n+\mu$ einschliesslich der Grenzen. Wie leicht ersichtlich, gehören zur betrachteten Klasse die completen linearen Differentialgleichungen, in denen auf der linken Seite die Coefficienten constant sind und die rechte Seite ein Polynom darstellt, multiplicirt mit einer Exponentialgrösse oder mit einem Ausdruck von der Form $a\cos px + b\sin px$. Zum Schluss macht der Verfasser eine Anwendung auf die Bestimmung der Bahn eines Punktes unter dem Einfluss einer Centralkraft, die durch den Ausdruck $f(\vartheta):r^2$ dargestellt ist, wo r die Distanz vom Centralpunkt, genommen als Pol, und ϑ den Polarwinkel bedeutet. $f(\vartheta)$ wird als periodische Function mit der Periode 2π vorausgesetzt, und zwar zuerst als ganze und dann als eine rationale Function von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$. Hr.

J. Collet. Sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 129-144.

Die von Cauchy herrührende allgemeine Lösung einer linearen (reducirten oder completen) Differentialgleichung mit constanten Coefficienten mittels Integration über einen geschlossenen Umfang (vgl. Darb. Bull. (2) III. 311ff., F. d. M. XI. 1879. 234) wird reproducirt, und die daraus abgeleiteten expliciten Ausdrücke, welche im Falle der completen Gleichung eine einfache Quadratur enthalten, werden mittels der gewöhnlichen Integrationsmethoden verificirt. Hr.

Oltramare. De l'intégration des équations linéaires à coefficients constants. Ass. Franç. Toulouse. 75-87.

W. W. Johnson. Symbolic treatment of exact linear differential equations. American J. X. 94-98.

Den Differentialausdruck

$$(1) \qquad x^q[A_0+A_1xD+A_2x^2D^2+\cdots]D^my,$$

wo $D = \frac{d}{dx}$ ist, kann man mittels des Operationssymbols $\vartheta = xD$ auf die Form

$$x^q f(\vartheta)D^m y$$

bringen, wo f eine ganze Function von ϑ bedeutet. Ist nun m von Null verschieden und q eine ganze Zahl kleiner als m, so folgt aus der weiteren Umformung

$$x^q f(\vartheta)D^m = D^{m-q}(\vartheta-m+q)\dots(\vartheta-m+1)f(\vartheta-m),$$

dass der Ausdruck (1) ein genaues Differential ist. Im anderen Falle kann man stets eine Potenz von x finden, die als Multiplicator den Ausdruck (1) zum genauen Differential macht. Wenn nämlich $\vartheta+q+1$ ein Factor von $f(\vartheta)$ ist, so dass

$$f(\vartheta) = (\vartheta+q+1)\varphi(\vartheta),$$

dann gilt die Formel

$$x^q f(\vartheta)D^m y = Dx^{q+1}\varphi(\vartheta)D^m y.$$

Der Exponent des Multiplicators x^p braucht also nur so gewählt zu werden, dass $-(p+q+1)$ eine Wurzel von $f(\vartheta) = 0$ ist. Hiernach kann man in einer linearen Differentialgleichung, deren linke Seite aus Aggregaten von der Form (1) mit verschiedenen q und m besteht, entscheiden, ob ein integrirender Factor von der Form x^p vorhanden ist. Dies wird an mehreren Beispielen erläutert. Hr.

W. P. Ermakoff. Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen. Kiew. Nachr. (Russisch.)

Eine sehr klar abgefasste und mit einer grossen Anzahl von Beispielen versehene Monographie. Besondere Beachtung verdient das letzte Capitel, welches die Transformation der Differentialgleichungen erster Ordnung in neue Veränderliche und

den Zusammenhang dieser Transformation mit dem integrirenden Factor der Differentialgleichungen behandelt. Als ein Beispiel dieser Untersuchungen des Verfassers führen wir das folgende Theorem an:

„Wenn die Transformationsformeln

$$x = \varphi(\xi, \eta, t), \quad y = \psi(\xi, \eta, t)$$

einer Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

eine willkürliche Constante t enthalten, welche in der gegebenen und in der transformirten Differentialgleichung fehlt, so ist

$$\frac{1}{M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt}}$$

der integrirende Factor der Differentialgleichung." Wi.

R. Liouville. Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre et sur les formations invariantes qui s'y rapportent. C. R. CV. 460-463.

R. Liouville. Sur une classe d'équations différentielles, parmi lesquelles, en particulier, toutes celles des lignes géodésiques se trouvent comprises. C. R. CV. 1062-1064.

Mit Bezugnahme auf eine frühere Note des Verfassers (C. R. 6. sept. 1886), wo die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0$$

behandelt ist und zwei Invarianten derselben für die Transformationen

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x), \quad y = y_1 \varphi(x)$$

aufgestellt sind, wird zunächst bemerkt, dass diese auch Invarianten der Gleichung

$$(2) \qquad Y'' + a_1 Y'^3 + 3a_2 Y'^2 + 3a_3 Y' + a_4 = 0$$

sind für die Transformationen

$$\frac{dx_1}{dx} = F(x), \quad Y = Y_1 + \Phi(x).$$

Bezeichnet man mit s_k eine Invariante vom Gewicht k, wobei s_3 mit L in der citirten Mitteilung identisch ist, so besteht für jedes ganzzahlige m die Relation

$$s_{2m+1} = a_1 s'_{2m-1} - (2m-1) s_{2m-1} [a'_1 + 3(a_2^2 - a_1 a_3)].$$

Vermittelst dieser Reihe von Invarianten kann man u. a. die Frage nach den Bedingungen beantworten, unter welchen die Gleichung (1) auf die Form

$$(3) \qquad \frac{dy_1}{dx} + y_1^3 + k x_1 y_1^2 = 0$$

reducirt werden kann (k eine Constante). Die Gleichung (2) ist in eine andere transformirbar, welche die Derivirte einer Riccati'schen ist, und daher integrirbar. In der zweiten Note wird die Gleichung

$$(4) \qquad y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0$$

betrachtet, worin a_1, a_2, ... beliebige Functionen von x und y sind. „Relative Invarianten" werden hier gewisse algebraische Functionen der Coefficienten und ihrer Derivirten genannt, die bei den allgemeinen Substitutionen

$$(5) \qquad x = \varphi(x_1, y_1), \quad y = \psi(x_1, y_1)$$

sich mit einer Potenz der Determinante

$$D = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial y_1} - \frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial y}{\partial x_1}$$

multipliciren. Der Exponent von D heisst das Gewicht der Invariante. Ist das Gewicht Null, so heisst die Invariante „absolut". Aus einer Invariante v_m vom Gewicht m kann man eine andere vom Gewicht $m+2$ ableiten vermöge der Relation

$$v_{m+2} = L_1 \frac{\partial v_m}{\partial y} - L_2 \frac{\partial v_m}{\partial x} + m v_m \left(\frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y}\right),$$

wo L_1 und L_2 gewisse aus den Coefficienten und ihren Ableitungen zusammengesetzte Ausdrücke sind. Zwei von einander unabhängige absolute Invarianten sind $v_5 v_9 : v_7^2$ und $v_7 v_9^2 : v_5^5$. Nimmt man diese zu Variabeln an der Stelle von x und y, so erhält man die Gleichung (4) in einer „canonischen Form", worin die Coefficienten absolute Invarianten sind. Hierdurch kann man die Frage zur Entscheidung bringen, ob zwei Gleichungen von der Form (4) durch eine der Transformationen (5)

ineinander überführbar sind, und gesetzten Falls die Substitutionen angeben. Die Gleichungen der geodätischen Linien auf beliebigen Flächen haben die Form der Gleichungen (1). Bei Flächen von constanter Krümmung ist $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, und man erhält den Satz, dass auf allen diesen Flächen und nur auf ihnen die geodätischen Linien in die geraden Linien einer Ebene transformirt werden können. Hr.

W. W. JOHNSON. Note on the singular solutions, etc., of homogeneous differential equations. Mess. (2) XVI. 186-188.

Wird die homogene Differentialgleichung erster Ordnung für y gelöst, so folgt $y = x\varphi(p)$. Ist p_1 eine Wurzel der Gleichung $p - \varphi(p) = 0$ und p_1 gleichzeitig eine Wurzel der Gleichung $\varphi'(p) = 0$, so ist $y = p_1 x$ eine singuläre Lösung. Ist jedoch α eine Wurzel von $\varphi'(p) = 0$, aber nicht auch eine Wurzel von $p - \varphi(p) = 0$, dann ist $y = x\varphi(\alpha)$ ein Ort für die Rückkehrpunkte. Mehrere Anomalien werden erklärt und alle aufgezählten Eigentümlichkeiten durch die Differentialgleichung beleuchtet:

$$p^2(x^2 - 2xy) - 2pxy + y^2 - 2xy = 0,$$

deren Integral $x^2 + y^2 - 2c(x+y) + c^2 = 0$ ist. Glr. (Lp.)

W. W. JOHNSON. On singular solutions of differential equations of the first order. Annals of Math. III. 33-38.

Eine klare Auseinandersetzung der Fälle, die bei den singulären Lösungen der Differentialgleichung

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

worin f in Beziehung auf x, y einwertig ist, auftreten können. Hr.

W. W. JOHNSON. On the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + Py + Q = 0.$$

Annals of Math. III. 112-115.

Die bekannte Beziehung der angeführten Gleichung zu der linearen Gleichung zweiter Ordnung

$$w'' + Pw' + Qw = 0$$

wird erörtert ohne bemerkenswerte Ergebnisse. Hr.

J. M. de Tilly. Recherches sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. Belg. Mém. C. XL. 1-98, Mathesis VII. Suppl. II.

Wir geben im folgenden eine Uebersicht über die zahlreichen, vom Verfasser in systematischer Weise vermittelst einer einzigen Transformation hergeleiteten Ergebnisse.

I. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = yF(x) + \varphi(x)$$

verwandelt sich durch die Substitution

$$x = f(u), \quad y = vf'^{\frac{1}{2}}(u) + g(u)$$

in die folgende:

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\frac{f'''}{f'}\right]$$
$$+ \left[f'^{\frac{3}{2}}gF(f) + \frac{f''g'}{f'^{\frac{3}{2}}} - \frac{g''}{f'^{\frac{1}{2}}}\right] + \varphi(f)f'^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus leitet man die folgenden Sätze ab: Man könnte alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung integriren, wenn man das allgemeine Integral der Gleichung $y'' = Xy$, wo X eine Function von x ist, die y nicht enthält, herzuleiten imstande wäre: 1) aus dem als bekannt vorausgesetzten Integrale von $y'' = kXy$ (X enthält k, wenn k eine Buchstaben-Constante (littéral) ist); 2) aus den als bekannt angenommenen Integralen von $y'' = Xy + Uy$, $y'' = Xy + kUy$, wo U eine bestimmte Function oder eine Constante ist; X enthält k und U, wenn diese Grössen Buchstaben-Constanten sind; 3) aus dem als bekannt vorausgesetzten Integrale von $y'' = Xy + V$, wenn V eine Function oder eine Constante ist; X enthält V, wenn V eine Buchstaben-Constante ist.

Der Verfasser giebt hierauf zahlreiche Folgerungen aus diesen Sätzen, indem er zuerst F, φ oder g in besonderen For-

men annimmt, dann, indem er F so bestimmt, dass man für eine gewisse Form von f die von v auffinden kann.

II. Man kann die linearen Differentialgleichungen finden, welche die Producte von je m unter den Lösungen einer anderen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu Lösungen haben; man kann auch das Integral der letzteren aus einem einzigen bekannten Integrale der ersteren erschliessen. Anwendung auf die Fälle $m = 2$ und $m = 4$; im letzteren Falle findet der Verf. eine Formel bezüglich einer Transformation zweiter Ordnung für das elliptische Integral zweiter Gattung. Man kann auch die lineare Differentialgleichung finden, welche zwei gleich hohe Potenzen zweier particulären Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung als Lösungen besitzt.

III. Versuch einer Reduction von $y'' = Xy$ auf ein System zweier simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung, um die Lösung der ersteren zu ermöglichen.

IV. Ist $y' = uy$, so wird die Gleichung $y'' = Xy$ zu $u'+u^2 = X$. Der Verf. bemerkt, man könnte diese integriren, wenn das Integral von $v'+v^2 = -X$ bekannt wäre; er versucht zwar vergebens, dies zu erreichen, findet jedoch dabei verschiedene interessante Specialsätze, indem er die Gleichung für u auf die Gestalt einer Clairaut'schen bringt, und indem er dann ein Theorem von Hrn. Ch. Lagrange anwendet. So reducirt er insbesondere die Aufgabe der Integration der Gleichungen zweiter Ordnung auf die der Gleichung $u'(v^2+x)+v'(u^2+x) = 0$, wo v bekannt ist. Die Aufsuchung des integrirenden Factors für die Gleichung in u führt zu keinem erwähnenswerten Ergebnisse.

V. Der Verfasser versucht die Integration der Gleichung $y'' = yF(x)$ durch bestimmte Integrale von der Form

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^v du, \quad v = e^{-\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}-\frac{1}{2u^2}},$$

wo θ_1 und θ_2 zu bestimmende Functionen von x sind. Der Verfasser bestimmt den Wert des letzteren Integrales, wenn $\theta_1\theta_2 = k$.

VI. Integrationsversuche durch Reduction auf partielle Differentialgleichungen. Der Verfasser integrirt:

$$y'' + (k+l)y' + kly = y^{-1+\frac{2l}{k}} \varphi(ye^{kx}),$$

wo φ eine beliebige Function bezeichnet. Man könnte $y'' = yF(x)$ integriren, wenn man das Integral von

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

zu finden imstande wäre, wo v bekannt ist. Mn. (Lp.)

J. S. Gromeka. Ueber die unendlichen Werte der Integrale der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Kas. Ges. VI. 14-40. (Russisch.)

Geometrische Betrachtungen führen den Verfasser zu dem Resultate, dass das reelle Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \nu y = 0$$

bei $x = 0$ nur dann unendlich wird, wenn für kleine Werte der Veränderlichen ν negativ bleibt, und es keine Zahl $\varepsilon < 2$ giebt, so dass νx^ε bei $x = 0$ endlich ist. Für unendlich grosse reelle Werte der Veränderlichen kann das Integral der Gleichung nur dann unendlich werden, wenn der Grenzwert von ν negativ oder Null ist. Am Ende wird die allgemeine Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

behandelt. Wi.

Weill. Sur une équation différentielle. Nouv. Ann. (3) VI. 204-205.

$V_p = x^p + \frac{k^p}{x^p}$ genügt als Function von $y = x + \frac{k}{x}$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2V}{dy^2}(y^2 - 4k) + y\frac{dV}{dy} - p^2V = 0.$$

Hr.

E. MALO. Théorème sur une équation linéaire du second ordre. Darboux Bull. (2) XI. 16-17.

Der bekannte Satz, dass ein linearer Differentialausdruck beliebiger Ordnung, mit dem Integral der adjungirten Differentialgleichung multiplicirt, ein exactes Differential wird. Hr.

A. J. STODOCKIEWICZ. Ein Beitrag zur Integrationsmethode der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Krak. Ber. XV. (Polnisch.)

Es wird die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y = 0,$$

(X_1 und X_2 sind Functionen nur von x) auf die Integration der beiden simultanen Gleichungen

$$\frac{dk}{dx} + k_1 X_1 - k^2 - X_2 = 0,$$

$$\frac{d\xi}{dx} = (k - X_1)\xi$$

zurückgeführt. In der letzten ist $\xi = y' + ky$ und $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Dn.

P. FOLDBERG. Et Theorem om den homogene lineäre Differentialligning af 2den Orden. Zeuthen Tidskr. (5) IV. 81-82. (1886.)

In der linearen Differentialgleichung der 2ten Ordnung

$$y'' = Py' + Qy,$$

wo die Coefficienten die folgende Bedingung befriedigen:

$$P = \pm(m+1)\sqrt{-\frac{Q}{m}} + \frac{Q'}{2Q},$$

sind die beiden particulären Integrale

$$y_1 = y_2^m \quad \text{und} \quad y_2 = e^{\pm\int\sqrt{-\frac{Q}{m}}dx}.$$

Gm.

B. H. RAU, R. RAWSON. Solution of question 8660. Ed. Times XLVII. 83-84.

Von der Differentialgleichung

$$4\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)^2+25\left(y^2-xy\frac{dy}{dx}\right)=0$$

ist die singuläre Lösung aufzusuchen. Hr. Rawson, der diese von Hrn. Rau gestellte Aufgabe behandelt, findet, dass die gewöhnlichen Methoden fehlschlagen, und ermittelt durch eine besondere Betrachtung die Lösung

$$x^2+y^2=0,$$

eine Gleichung, welche die von Hrn. Rau angegebene Eigenschaft besitzt, nämlich die Hüllcurve einer Schar von Kreisen darzustellen, die über der Subnormale einer Ellipse oder Hyperbel als Durchmesser beschrieben sind, deren Excentricitäten der Bedingung $e^2+1=0$ genügen. Lp.

K. HEUN. Integration regulärer linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Kettenbruchentwickelung von ganzen Abel'schen Integralen dritter Gattung. Math. Ann. XXX. 553-562.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen mit i endlichen Verzweigungspunkten und überall regulären Integralen können stets auf die „reducirte" Form gebracht werden

$$(1) \qquad \psi(x)\,y''+\chi(x)\,y'+\tilde{\omega}(x)\,y=0,$$

wo

$$\psi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_i),$$

χ und $\tilde{\omega}$ ganze Functionen bez. von den Graden $i-1$ und $i-2$ sind. Von den $2i-1$ Coefficienten in ihnen sind die i Coefficienten von χ und einer von $\tilde{\omega}$ durch die zu den endlichen Verzweigungspunkten und zu $x=\infty$ gehörigen Exponenten bestimmt, die $i-2$ übrigen Coefficienten in $\tilde{\omega}(x)$ sind nach der Bezeichnung des Verfassers die „charakteristischen" Parameter der Gleichung. Hier wird der Fall behandelt, dass ein Fundamentalintegral y_1 eine ganze Function vom n^{ten} Grade ist. Hierzu muss

$n(n-1)+k_1 n+k'_2=0$ sein, wo k_1 und k'_2 die Coefficienten der höchsten Potenzen bez. in χ und $\tilde{\alpha}$ sind. Ausserdem müssen die charakteristischen Parameter noch gewissen algebraischen Gleichungen genügen, die zur vollständigen Bestimmung dieser Parameter ausreichen, und für die Anzahl der ganzen Functionen y_1 den Ausdruck

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+i-2)}{1.2\ldots(i-2)}$$

ergeben. Die transcendenten Integrale y_2 liefert alsdann die Formel

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{\chi}{\psi}dx}}{y_1^2}dx.$$

In dem Falle $\chi(x)=\frac{1}{2}\frac{d\psi(x)}{dx}$ hat Heine (J. für Math. LXI.) der Relation zwischen y_2 und y_1 eine Form gegeben, von der der Verfasser zeigt, dass sie sich auf jede beliebige ganze Function χ vom Grade $i-1$ ausdehnen lässt. Das Resultat wird folgendermassen zusammengefasst: Besitzt die Gleichung (1) eine ganze rationale Function n^{ten} Grades als Lösung, dann ist diese der n^{te} Näherungsnenner der Kettenbruchentwickelung der Function

$$W=\sum_{\nu=1}^{\nu=i-1}C_\nu\int_{\xi_\nu}^{\xi_\nu+1}\frac{\theta(z)\,dz}{(x-z)\,\psi(z)},$$

wo

$$\psi(\xi_0)=0,\quad \theta(z)=(z-\xi_1)^{\frac{\chi(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}}(z-\xi_2)^{\frac{\chi(\xi_2)}{\psi'(\xi_2)}}\ldots(z-\xi_i)^{\frac{\chi(\xi_i)}{\psi'(\xi_i)}}$$

ist und die Constanten $C_1,\ldots,C_{i-1}$ derartig bestimmt sind, dass die n ersten Partialnenner des Kettenbruchs für W linear, der $(n+1)^{\text{te}}$ dagegen vom Grade $i-1$ wird. Ferner ist der zugehörige Rest multiplicirt in $\frac{\psi(x)}{\theta(x)}$ eine zweite Lösung derselben Differentialgleichung. Sind insbesondere $\frac{\chi(\xi_\nu)}{\psi'(\xi_\nu)}$ echte Brüche, so folgt, dass die zur Differentialgleichung gehörige erzeugende Substitutionsgruppe durch die Periodicitätsmoduln gewisser Abel'-

scher Integrale und durch ganzzahlige Wurzeln der Einheit bestimmt ist. Dadurch tritt die theoretische Bedeutung der Differentialgleichung 2ter Ordnung hervor, deren eine Lösung eine ganze rationale Function ist. Die vorstehende Untersuchung war für den specielleren Fall

$$\frac{\chi(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\chi(\xi_2)}{\psi'(\xi_2)} = \cdots = \frac{\chi(\xi_i)}{\psi'(\xi_i)} = \frac{p}{q}$$

$\left(\frac{p}{q}\right.$ ein echter Bruch$\left.\right)$ in der Habilitationsschrift des Verfassers (Göttingen 1886) ausgeführt. Hr.

A. R. Forsyth. On the solution of Legendre's equation in a particular case. Mess. (2) XVI. 168-176.

Der Verf. zeigt einen Fehler an, den er in den §§ 93-95 seines „Treatise on differential equations" begangen hat, und den er in der gegenwärtigen Note berichtigt. Er betrifft die Lösungen

$$y_2 = x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \cdots,$$

$$y = \tfrac{1}{2} y_2 \log \frac{x+1}{x-1} - x^{-n-2} - \frac{(n+2)(n+3)(3n+4)}{3(2n+3)(2n+4)} x^{-n-4} - \cdots$$

der Legendre'schen Gleichung in dem Falle, dass $2n$ eine ungerade positive Zahl ist. Glr. (Lp.)

L. Pochhammer. Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. J. für Math. CII. 76-159.

Die hypergeometrischen Reihen n^{ter} Ordnung mit den singulären Punkten $x = 0, 1, \infty$ sind Gegenstand der Untersuchungen von Clausen (J. für Math. III) sowie der Herren Thomae (Math. Ann. II, F. d. M. II. 1870. 122; J. für Math. LXXXVII, F. d. M. XI. 1879. 336) und Goursat (Ann. de l'Éc. Norm. (2) XII, F. d. M. XV. 1883. 275; Acta Math. V, F. d. M. XVI. 1884. 240) gewesen. Sie genügen, wie daselbst dargelegt

wird, einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von einer gewissen Beschaffenheit und gestatten, analog der Gauss'schen Reihe, eine Darstellung durch ein $(n-1)$-faches bestimmtes Integral. Zweck der vorliegenden Untersuchungen ist die Lösung der erwähnten Differentialgleichung durch $(n-1)$-fache bestimmte Integrale nach einer Methode, welche nicht die vorherige Entwickelung der Integrale in Reihen bedingt. Die Differentialgleichung hat die Form

$$(1)\qquad x^{n-1}(x-1)\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n-2}(a_1x-b_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots$$
$$+x(a_{n-2}x-b_{n-2})\frac{d^2y}{dx^2}+(a_{n-1}x-b_{n-1})\frac{dy}{dx}+a_ny=0.$$

Statt der $2n-1$ Constanten $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}$ führt der Verfasser andere Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ ein, deren Zusammenhang mit den ersteren durch die Identitäten

$$(2)\begin{cases}(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_n)=[z]_n+a_1[z]_{n-1}+\cdots+a_{n-1}[z]_1+a_n,\\(z+\varrho_1)(z+\varrho_2)\ldots(z+\varrho_{n-1})=[z]_{n-1}+b_1[z]_{n-2}+\cdots+b_{n-2}[z]_1+b_{n-1}\end{cases}$$

gegeben ist, indem die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z in den Entwickelungen auf beiden Seiten einander gleich gesetzt werden. Hierbei ist $[z]_x = z(z-1)\ldots(z-x+1)$. Die Substitution

$$(3)\qquad y=\int_{g_{n-1}}^{h_{n-1}}(v_{n-1}-x)^{-\alpha_n}v_{n-1}^{\alpha_n-\varrho_{n-1}}V_{n-1}dv_{n-1},$$

worin V_{n-1} eine Function von v_{n-1} allein ist und g_{n-1}, h_{n-1} zwei der vier Grössen $0, 1, \infty, x$ bedeuten, führt alsdann zu einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für V_{n-1}, welche wieder die Form der Gleichung (1) hat. Statt der daselbst auftretenden $2n-3$ Constanten führt man mittels Identitäten, die denen in (2) analog gebildet sind, die Constanten $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{n-1}$, $\varrho'_1, \ldots, \varrho'_{n-2}$ ein, und dabei ergeben sich zwischen diesen und den Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ die einfachen Beziehungen

$$\alpha'_x=\alpha_x-\varrho_{n-1}+1 \qquad (x=1, \ldots, n-1),$$
$$\varrho'_x=\varrho_x-\varrho_{n-1}+1 \qquad (x=1, \ldots, n-2).$$

Macht man nunmehr die genau nach dem Muster von (3) gebildete neue Substitution

$$V_{n-1} = \int_{g_{n-2}}^{h_{n-2}} (v_{n-2} - v_{n-1})^{-a'_{n-1}} v_{n-2}^{a'_{n-1}-\varrho'_{n-2}} V_{n-2}\, dv_{n-2}$$

$$= \int_{g_{n-2}}^{h_{n-2}} (v_{n-2} - v_{n-1})^{\varrho_{n-1}-a_{n-1}-1} v_{n-2}^{a_{n-1}-\varrho_{n-2}} V_{n-2}\, dv_{n-2},$$

wo für g_{n-2}, h_{n-2} zwei der Grössen 0, 1, ∞, v_{n-1} zu nehmen sind, so genügt V_{n-2} als Function von v_{n-2} einer Differentialgleichung $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Beschaffenheit wie (1). Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zuletzt zu einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung wie (1), deren Lösung $V_1 = (v_1 - 1)^{\varrho_1 - a_1 - 1}$ ist. So erscheint die Lösung von (1) in der Form

$$y = \int_{g_{n-1}}^{h_{n-1}} dv_{n-1} \int_{g_{n-2}}^{h_{n-2}} dv_{n-2} \cdots \int_{g_1}^{h_1} \Phi(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)\, dv_1,$$

wo

$$\Phi = (v_{n-1} - x)^{-a_n} v_{n-1}^{a_n - \varrho_{n-1}} (v_1 - 1)^{\varrho_1 - a_1 - 1}$$

$$\times \prod_{x=2}^{x=n-1} (v_{x-1} - v_x)^{\varrho_x - a_x - 1} v_x^{a_x - \varrho_{x-1}}.$$

Als Grenzen von g_x, h_x für die Integration nach v_x sind zu nehmen, wenn $x = n-1$, zwei der Grössen 0, 1, ∞, x, und wenn $x < n-1$, zwei der Grössen 0, 1, ∞, v_{x+1}. Indes führt die Anwendung der Grenze 1 zu gewissen Beschränkungen in Bezug auf die Wahl der übrigen Grenzen. Unter der grossen Zahl particulärer Integrale von (1), die sich aus der verschiedenen Bestimmung der Grenzen ergeben, sind diejenigen hervorzuheben, welche die zu den singulären Punkten $x = 0, 1, \infty$ gehörigen Fundamentalintegrale („Hauptintegrale") darstellen. Um diese zu erhalten, gilt die Regel, dass für g_i, h_i entweder der betrachtete singuläre Punkt und die variable Grenze, oder die beiden übrigen singulären Punkte zu setzen sind. Der Verfasser zeigt ferner, wie diese Hauptintegrale auf hypergeometrische Reihen n^{ter} Ordnung zurückgeführt werden können, zu welchem Behuf die $(n-1)$-fachen Integrale in andere transformirt werden,

bei denen die sämtlichen Grenzen 0 und 1 sind. Betreffs der Anordnung des Stoffs in der umfangreichen Arbeit sei bemerkt, dass in den ersten acht Paragraphen die Rechnungen für $n = 2, 3, 4$ vollständig ausgeführt und gewisse für das allgemeine Problem wichtige Hülfssätze entwickelt werden, von denen hier die Zurückführung eines m fachen bestimmten Integrals auf das Product von m Euler'schen Integralen (§ 6) hervorgehoben sei. Hr.

W. W. Johnson. On the second solution of the differential equation of the hypergeometric series, and the series for K', E', etc., in elliptic functions. Mess. (2) XVII. 35-50.

Wenn γ eine ganze Zahl ist, so sind, wie gezeigt wird, die beiden unabhängigen Integrale der Differentialgleichung für die hypergeometrische Reihe:

$$y_1 = x^\alpha \left\{1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} px + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} (px)^2 + \cdots\right\},$$

$$y = y_1 \log x + (-1)^\gamma \frac{(\gamma-2)!\,(\gamma-1)!}{p^{\gamma-1}(\alpha+1-\gamma)\dots(\alpha-1)(\beta+1-\gamma)\dots(\beta-1)} T_{\gamma-1} + y',$$

wo

$$y' = x^\alpha \left\{\frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{1} - \frac{1}{\gamma}\right) px + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{(\gamma+1)^2}\right) \times (px)^2 + \cdots\right\}$$

und $T_{\gamma-1}$ die Summe der ersten $\gamma-1$ Glieder bedeutet von

$$y_2 = x^{\alpha-\gamma+1}\left\{1 + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{(2-\gamma) . 1} px + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{(2-\gamma)(3-\gamma) . 1 . 2} (px)^2 + \cdots\right\}.$$

Die zweite Lösung besteht also aus drei Teilen, von denen der erste das Product der ersten Lösung mit $\log x$ ist, der zweite eine endliche, mit $x^{\alpha-\gamma+1}$ beginnende und mit der Potenz $x^{\alpha-1}$ endigende Reihe, und der dritte Teil die Nebenreihe y', welche,

im übrigen mit y_1 übereinstimmend, jedoch jeden Coefficienten mit einem Factor multiplicirt enthält (seinem sogenannten adjungirten), der aus der Summe der positiv genommenen reciproken Werte der Factoren des Zählers und der negativ genommenen des Nenners besteht.

Die Lösung wird auf die Differentialgleichungen angewandt, denen K und K', E und E' etc. genügen, und man gelangt so zu den Entwickelungen von K', E' etc. nach Potenzen von k. Auch auf Bessel's Gleichung wird sie angewandt. Gewisse besondere Fälle werden einzeln hervorgehoben. Glr. (Lp.)

A. Markoff. Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique I, II. Math. Ann. XXVIII. 586-593, XXIX. 247-258.

In der ersten Note werden alle Fälle angegeben, in denen das Product zweier Integrale der Differentialgleichung

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0$$

gleich einer ganzen Function ist; in der zweiten alle Fälle, in welchen obige Gleichung ein Integral von der Form

$$Xy'+Yy=0$$

oder

$$Xy'y'+Yy'y+Zyy=0$$

zulässt, wo X, Y, Z rationale Functionen von x bedeuten. (S. das folgende Referat.) Hr.

A. A. Markoff. Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Chark. Ges. II. 51-62, 95-113. (Russisch.)

Es werden in der ersten Abhandlung alle Fälle bestimmt, in welchen das Product irgend welcher zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

einer ganzen Function von x gleich ist. Zu der Auflösung dieser Aufgabe bedient sich der Verfasser der Differentialgleichung dritter Ordnung, der $z = y_1 y_2$ genügt. Die Analyse führt zum Schlusse, dass das Product zweier Lösungen der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe in den folgenden Fällen gleich einer ganzen Function von x ist:

a) bei geradem n:

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2}$,

3) $\alpha+\beta = -n$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -\frac{2n-1}{2}$;

b) bei ungeradem n:

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{n-2}{2}, \beta, \beta-1, \ldots, \beta-\frac{n-1}{2}$;

2) $\beta = -\frac{n}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{n-2}{2}, \alpha, \alpha-1, \ldots, \alpha-\frac{n-1}{2}$;

3) $\alpha+\beta = -n$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{2n-1}{2}$.

In der zweiten Abhandlung werden alle Fälle bestimmt, in welchen die Gleichung der hypergeometrischen Reihe ein Integral in der Form

$$Xy' + Yy = 0$$

oder

$$Xy'y' + Yy'y + Zy^2 = 0$$

zulässt, wo X, Y, Z rationale Functionen von x sind. Wi.

J. Cockle. On the equation of Riccati. Lond. M. S. Proc. XVIII. 180-202.

Bezeichnen $f\left(y, x\frac{d}{dx}\right)$ und $F\left(Y, x\frac{d}{dx}\right)$ lineare Differentialausdrücke beliebiger Ordnung in y und Y und sind φ und Φ Ausdrücke von der Beschaffenheit, dass $\Phi f - \varphi F = \frac{d\Omega}{dx}$,

dann heisst F eine Deformation von f (oder umgekehrt) und $\Omega = c$ ein gemischtes Integral des Systems f, F.

$$(1) \qquad y''' + py'' + qy' + ry = 0$$

und

$$(2) \qquad Y''' + PY'' + QY' + RY = 0$$

sind Deformationen von einander, wenn

$$R = -r, \quad P + \frac{R'}{R} = -\left(p + \frac{r'}{r}\right),$$

$$Q - \tfrac{1}{2}\left(P + \frac{R'}{R}\right)' + \tfrac{1}{2}\frac{R'}{R}\left(P + \frac{R'}{R}\right)$$

$$= q - \tfrac{1}{2}\left(p + \frac{r'}{r}\right)' + \tfrac{1}{2}\frac{r'}{r}\left(p + \frac{r'}{r}\right);$$

hier ist $\varphi = \frac{y'}{r}$, $\Phi = \frac{Y'}{R}$ und

$$(3) \qquad \Omega - c = \frac{1}{r}(y'Y'' - y''Y') - \frac{1}{r}\left(p + \frac{r'}{r}\right)y'Y' - yY$$

das gemischte Integral. Die Integrale von (1) stehen mit denen von (2) und deren Ableitungen in einfacher Beziehung. Setzt man

$$y = e^{\frac{1}{3}\int p dx} z, \quad Y = e^{-\frac{1}{3}\int P dx} Z,$$

und führt die Bedingungen für die Coefficienten ein, dass die Gleichungen in z und Z identisch werden, dann giebt

$$Y = ye^{\frac{1}{3}\int (P-p)\,dx},$$

vom Verfasser Charakteristik genannt, nach Substitution in (3) ein erstes Integral von (1). Indes gestatten die Ausdrücke von p und q als Functionen von r die vollständige Integration von (1). Der Verfasser behandelt darauf insbesondere die Gleichungen

$$(4) \qquad y''' + \left(\frac{1}{x} + x\right)y'' - \left(\frac{1}{x^2} + 2\right)y' + \frac{2}{x}y = 0,$$

$$(5) \qquad Y''' + \left(\frac{1}{x} - x\right)Y'' - \left(\frac{1}{x^2} + 4\right)Y' + \frac{2}{x}Y = 0,$$

die Deformationen von einander sind. Die Integration der letzteren hängt mit der der Riccati'schen

$$z'' + x^{\frac{1}{i} - 2} z = 0$$

zusammen. Aus (4) und (5) erhält man, indem man $t\sqrt{-1}$ für x substituirt und dann t durch x ersetzt, zwei neue „correlate" Gleichungen. Nennt man zwei von der Lösung x^2 unabhängige Integrale von (4) u, v und diejenigen von ihrer correlaten, die ebenfalls x^2 zur Lösung hat, $\dot{u}$, $\dot{v}$, so ergeben sich zwischen den 11 Grössen u, $\dot{u}$ und den „Synthemen"

$$\dot{u}^{(r)}u^{(s)}+\dot{v}^{(r)}v^{(s)} \qquad (r,\ s=0,\ 1,\ 2)$$

10 homogene Gleichungen, aus denen die Verhältnisse der Unbekannten bestimmt werden können. Der Verfasser führt diese Bestimmung nicht aus, sondern begnügt sich mit Aufstellung der Gleichungen und fügt noch einige Bemerkungen hinzu, die darauf hinzielen, die genannte Bestimmung zu erleichtern.

Hr.

J. Cockle. Second addendum on the relations of certain symbols. Quart. J. XXII. 270.

Hinzufügung eines dem Verfasser seitens des Herrn Rawson zugegangenen neuen Beweises des Theorems II in der citirten Arbeit (s. F. d. M. XII. 1880. 268).

Hr.

L. W. Meech. Integration of Riccati's equation. Annals of Math. III. 47-49.

Bildet zu der Arbeit des Verfassers in den Ann. of Math. I. 97-103 (F. d. M. XVI. 1884. 290) einen Nachtrag, worin die dort entwickelten Reihen in bestimmte Integrale umgeformt, und die Lösungen durch Kettenbrüche mit den bezüglichen Resultaten des Herrn Boole in seinen Differential equations verglichen werden.

Hr.

Stenberg. Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé. Acta Math. X. 339-348.

Die von Herrn Hermite in seiner Abhandlung „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" angegebene Methode zur

Integration der Lamé'schen Gleichung

$$y'' - [n(n+1)k^2\mathrm{sn}^2x + h]y = 0$$

ist nicht mehr anwendbar, wenn die daselbst als einfaches Element dienende Function $f(x)$ keinen Pol hat. Dies tritt im besonderen stets ein, wenn der Gleichung durch die speciellen doppelt-periodischen Functionen zweiter Art genügt wird, die Herr Mittag-Leffler in den C. R. XC. 177ff. (F. d. M. XII. 1880. 361) behandelt hat. Diese sind dadurch charakterisirt, dass die Multiplicatoren, die sie beim Zuwachs des Arguments um die Perioden $2K$, $2iK'$ empfangen, von der Form $e^{2\lambda K}$, $e^{2\lambda iK'}$ sind. Der Verfasser entwickelt die Bedingung dafür, dass die Lamé'sche Gleichung durch eine Function der betrachteten Art integrirt wird, und stellt den Integralausdruck dar. Als einfaches Element wendet er die Function

$$f(x) = \left(\frac{Al'(x)}{Al(x)} + iJ'\right)e^{\lambda(x-iK')}$$

an. Die fragliche Bedingung erscheint in der Form, dass λ^2 neben der von Herrn Mittag-Leffler l. c. für sie aufgestellten Bedingungsgleichung noch einer zweiten genügen muss. Die Elimination von λ^2 ergiebt die Werte von h, für welche die Lamé'sche Gleichung die specielle Art von Integralen hat. Wie die darauf folgenden Anwendungen zeigen, muss $n \geqq 3$ sein, für $n = 3$ und $n = 4$ werden die Gleichungen explicite gegeben. Ihre Anzahl ist im ersten Falle 2, im zweiten Falle 3.

Hr.

G. Pick. Ueber die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung. Wien. Ber. XCVI. 872-890.

Die Arbeit bezweckt, an der Lamé'schen Differentialgleichung die Vorteile zu zeigen, welche die Verwendung der Methoden der Invariantentheorie auch für die Integration von Differentialgleichungen mit sich bringen kann, indem dadurch ermöglicht wird, die Integrale jener Gleichung in expliciter Form aufzustellen. Der Grundgedanke ist, die Integrale von Differentialgleichungen selbst als transcendente Covarianten einer gewissen Grundform (hier einer Form vierten Grades) aufzufassen,

wobei es nötig wird, allgemeine Sätze und Regeln aufzustellen, nach denen sich die symbolische Rechnung mit homogenen Functionen, die nicht rational und ganz sind, zu richten hat. Für die hierzu nötige Uebertragung der fundamentalen Bildungen der gewöhnlichen Invariantentheorie auf solche Functionen tritt gerade bei denjenigen, die von positivem ganzzahligem Grade sind, die Schwierigkeit ein, dass wegen der Differentiationsprocesse, durch welche diese Bildungen (Polaren und Ueberschiebungen) definirt werden, die einfache Uebertragung nur bis zu einer gewissen Grenze möglich ist. Ueber die Art, wie die erwähnte Schwierigkeit überwunden wird, ist auf das Original, insbesondere auf § 2 der Arbeit zu verweisen. Auch verspricht der Verfasser demnächst auf die Formen, die sich durch gewisse Systeme von fundamentalen Relationen als transcendente Covarianten manifestiren, in allgemeiner Ausführung zurückzukommen.

Hr.

E. Goursat. Recherches sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer. Journ. de Math. (4) III. 255-305.

Die rationalen Integrale der Kummer'schen Gleichung sind der Gegenstand früherer Arbeiten des Verfassers gewesen. (C. R. XCVIII und Math. Ann. XXIV, s. F. d. M. XVI. 1884. 269.) Inzwischen hat Herr Papperitz in seiner Habilitationsschrift (F. d. M. XVIII. 1886. 434) die algebraischen Integrale der nämlichen Gleichung untersucht und ist zu einer Verallgemeinerung der Resultate des Herrn Goursat gelangt. In der vorliegenden Arbeit wird dasselbe Problem wieder aufgenommen. Jedem algebraischen Integral einer Kummer'schen Gleichung entspricht ein System von Lösungen gewisser von Herrn Papperitz aufgestellter Gleichungen und Ungleichungen in positiven ganzen Zahlen. Der Verfasser stellt sich die Frage, ob umgekehrt jedem System von Lösungen ein algebraisches Integral der Kummer'schen Gleichung entspricht, und beantwortet sie im verneinenden Sinne. Des weiteren wird gezeigt, wie man jedesmal durch eine endliche Anzahl von Versuchen für eine gegebene Lösung über die Existenz eines zugehörigen Integrals entscheiden kann. Als be-

sonders interessant wird der Fall betrachtet, wo in den beiden hypergeometrischen Differentialgleichungen, zwischen deren unabhängigen Variabeln x, y die Kummer'sche Gleichung statt hat, x und y eindeutige Functionen des Quotienten zweier Integrale der bezüglichen hypergeometrischen Gleichungen sind. x und y sind dann Fuchs'sche Functionen, und man hat hier also einen besonderen Fall des allgemeinen Problems der algebraischen Transformation zweier Fuchs'schen Functionen. Ist die Existenz der algebraischen Beziehung nach dem Vorigen erkannt, so werden für die Bestimmung der Relation selbst Methoden angegeben, falls ihr Geschlecht Null oder 1 ist. Der letzte Teil enthält den Beweis des folgenden allgemeinen Theorems. Ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit in x rationalen Coefficienten und nur regulären Integralen so beschaffen, dass jedem Werte des Quotienten zweier unabhängigen Integrale nur eine endliche Anzahl von Werten von x entspricht, so kann man die betrachtete Differentialgleichung stets durch eine rationale Substitution aus einer anderen Differentialgleichung 2ter Ordnung hervorgehen lassen, in der die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Quotienten zweier Integrale derselben ist. Von diesem Satze wird u. a. eine Anwendung gemacht auf die Reduction gewisser Abel'scher Integrale auf elliptische. Die Resultate stimmen mit denen überein, die Herr Koenigsberger im J. für Math. LXXXVI. (F. d. M. XI. 1879. 305) veröffentlicht hat. Hr.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre. C. R. CIV. 1829-1832.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles linéaires. C. R. CV. 58-61.

In der ersten Note behandelt der Verfasser die algebraische Integrirbarkeit der linearen Differentialgleichungen 3ter Ordnung mit rationalen Coefficienten. Sei

$$(1) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

eine solche, so existiren für sie zwei Invarianten, welche die Verhältnisse t, u von drei linear-unabhängigen Integralen y_1, y_2, y_3

und die Derivirten von t, u bis zur vierten Ordnung enthalten. Diese, als Function der Coefficienten a, b, c ausgedrückt, ergeben ein System von Gleichungen für t, u, dessen Integral ebenfalls algebraisch sein muss. Die Werte eines Systems (t, u) für einen gegebenen Wert von x bilden alsdann eine endliche Gruppe (α) von linearen Substitutionen, und es giebt zwei Fundamentalinvarianten dieser Gruppe $\varphi(t, u)$, $\psi(t, u)$, welche rationale Functionen von x sind, $\varphi = P(x)$, $\psi = Q(x)$. Das Gleichungssystem für t, u kann nunmehr in ein solches für P, Q transformirt werden, die ein System von rationalen Integralen zulassen. Sind diese und somit t, u bekannt, so erhält man

$$y = C(t''u' - t'u'')^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\int a dx}.$$

Damit also das Integral von (1) algebraisch sei, ist notwendig und hinreichend: 1) dass a die logarithmische Ableitung einer rationalen Function sei, 2) für eine Gruppe (α) die Gleichungen in P, Q ein System rationaler Integrale zulassen. Man kann durch eine begrenzte Zahl von Operationen erkennen, ob das Integral von (1) einer gegebenen endlichen Gruppe entspricht. Eine besondere Betrachtung erfordert der Fall, wo die Gruppen analog den Gruppen des Dieders sind. In diesem Falle lässt sich die Gleichung (1) auf Quadraturen zurückführen, wie in der zweiten Note nachgewiesen wird. Daselbst wird auch die Anwendung der vorhergehenden Methode auf lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, sowie auch auf simultane lineare partielle Differentialgleichungen gezeigt, unter der Voraussetzung, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

Hr.

L. Schlesinger. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Diss. Berlin. 43 S. 4°.

P. S. Florow. Ueber die Gleichung $\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi} \cdot \omega$. Chark. Ges. II. 81-104. (Russisch.)

Die Reihe $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$ ist convergent für alle reellen Werte von ξ und definirt eine Function $\omega_r(e^\xi)$ von ξ; diese Function genügt der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^\xi \,.\, \omega.$$

Mithin wird das allgemeine Integral von (1) dargestellt durch

$$C_0\omega_0 + C_1\omega_1 + \cdots + C_{n-1}\omega_{n-1}.$$

Die Gleichung (1) kann als die Grenze von

$$(2) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{k}} u$$

für $k = 0$ betrachtet werden. Die Integrale der Gleichung (2) und somit auch der Gleichung (1) sind auch in der Form bestimmter Integrale darstellbar. Dies geschieht, indem sich der Verfasser der Formeln Lettnikoff's bedient. Wi.

V. Jamet. Sur une certaine équation différentielle. C. R. CIV. 844-846.

Betrachtet man unter den Curven, welche durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

repräsentirt sind, diejenigen, die durch einen festen Punkt P mit den Coordinaten x, y gehen, so ist der Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte in diesem Punkte durch die Gleichung

$$f\left[x,\ y,\ -\frac{\xi-x}{\eta-y},\ \frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{(\eta-y)^3}\right] = 0$$

gegeben, wo mit ξ, η die Coordinaten der Krümmungsmittelpunkte bezeichnet sind. In dem Falle, dass die vorstehende Gleichung vom dritten Grade in Bezug auf ξ, η ist, leitet der Verfasser aus den Eigenschaften der sie darstellenden Curve einige Eigenschaften des entsprechenden durch den Punkt P gehenden Curvenbüschels ab. Hr.

E. Picard. Sur une classe d'équations différentielles. C. R. CIV. 41-43.

Der Verfasser untersucht die Differentialgleichung

$$(1) \qquad f(y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

worin die unabhängige Variable x nicht vorkommt und f ein Polynom bedeutet, unter der Voraussetzung, dass das allgemeine Integral eine eindeutige Function von x ist. Die Relation (1) ist dann durch eine eindeutige umkehrbare Substitution (substitution uniforme), die einen willkürlichen Parameter enthält, in sich transformirbar. Im Falle $m = 1$ ist diese Transformation birational, im allgemeinen Falle nicht. Die nächste Aufgabe ist daher, zu erkennen, wann die Substitution auch für $m > 1$ birational ist. Die Gleichung ist dann, wie der Verfasser bemerkt, vollständig integrirbar, und das allgemeine Integral eine in der ganzen Ebene definirte Function. Abgesehen von diesem besonderen Falle ist das allgemeine Integral nur in einem Teil der Ebene definirt, derart, dass dieser Teil von einem Integral zum andern mit den willkürlichen Constanten variirt. Ueber seine Behandlungsweise des Problems giebt der Verfasser zum Schluss eine kurze Andeutung, indem er sich auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränkt. Hr.

L. Autonne. Sur une représentation géométrique dans l'espace des intégrales de l'équation $f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0$. C. R. CV. 850-854.

L. Autonne. Sur l'application des substitutions quadratiques crémoniennes à l'intégration différentielle du premier ordre. C. R. CV. 929-932.

Die Gleichung

$$(1) \qquad f(\xi, \eta, p) = 0$$

geht durch die birationale Substitution

$$x = \frac{\xi}{\eta}, \quad y = \frac{p}{\eta - p\xi}, \quad z = \frac{2\eta - p\xi}{\eta(\eta - p\xi)}$$

oder reciprok:

$$\xi = \frac{2x}{z-xy}, \quad \eta = \frac{2}{z-xy}, \quad p = \frac{2y}{z+xy}$$

in eine Gleichung zwischen x, y, z über, die eine Fläche S darstellt, und die Gleichung $p = \frac{d\eta}{d\xi}$ in $dz+ydx-xdy = 0$, so dass die Integrale der Gleichung $f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0$ geometrisch durch Curven auf der Fläche S repräsentirt werden können. Ihre Differentialgleichung lautet, wenn man in der xy-Ebene die Polarcoordinaten einführt: $dz-r^2d\vartheta = 0$. Ist demnach S eine Rotationsfläche um die Z-Axe, $z = \varphi(r)$, dann ist die letztere Gleichung und somit auch die vorgelegte Gleichung (1) durch Quadraturen integrirbar. In der zweiten Note wird gezeigt, dass die auf (1) angewandte Cremona'sche quadratische Substitution auf eine lineare Substitution der homogenen Coordinaten der entsprechenden Punkte auf S zurückkommt, so dass die Theorie der quaternären Formen für die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung nutzbar gemacht werden kann. Als Beispiel wird die Gleichung

$$\psi\left[\frac{\xi}{\eta}, \quad \frac{p}{\eta-p\xi}, \quad \frac{2\eta-p\xi}{\eta(\eta-p\xi)}\right] = 0, \quad p = \frac{d\eta}{d\xi}$$

gewählt, wo ψ ein Polynom 2ten Grades bedeutet. Hier kann im allgemeinen die Fläche S mittels der Cremona'schen Transformation in eine Rotationsfläche verwandelt und somit die Gleichung $\psi = 0$ nach dem Obigen vollständig integrirt werden.

Hr.

H. LE PONT. Note de calcul intégral. Teixeira J. VIII. 175-182.

Eine Untersuchung über die Integration der Differentialgleichungen

$$dy_1 = (a_{11}y_1+a_{12}y_2)\,dx_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2)\,dx_2,$$
$$dy_2 = (b_{11}y_1+b_{12}y_2)\,dx_1+(b_{21}y_1+b_{22}y_2)\,dx_2,$$

wenn die Coefficienten a und b beliebige Functionen der unabhängigen Veränderlichen x_1 und x_2 sind. Tx. (Hch.)

W. Heymann. Ueber lineare simultane Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können. Schlömilch Z. XXXII. 176-182.

Das System

$$(a+bx+cx^2)\frac{dy_1}{dx}+(a_1+b_1x)y_1+(c_1+d_1x)y_2=0,$$

$$(a+bx+cx^2)\frac{dy_2}{dx}+(a_2+b_2x)y_1+(c_2+d_2x)y_2=0$$

wird auf das folgende

$$(x-E_2)\frac{dz_1}{dx}+\alpha_1 z_1+\beta_1 z_2=0,$$

$$(x-E_1)\frac{dz_2}{dx}+\alpha_2 z_1+\beta_2 z_2=0$$

zurückgeführt, worin E_1 und E_2 die Wurzeln der Gleichung $a+bx+cx^2=0$ bedeuten und $\alpha_1, \ldots, \beta_2$ bestimmte Constanten sind. Die Elimination einer der abhängigen Variabeln z_1, z_2 führt unmittelbar zu einer hypergeometrischen Differentialgleichung 2ter Ordnung. Die Fälle $E_1=E_2$, $c=0$ und $b=0$, $c=0$, auf welche die vorstehende Transformation nicht anwendbar ist, werden durch besondere Reductionen erledigt. Hr.

G. W. Hill. On differential equations with periodic integrals. Annals of Math. III. 145-153, Wash. Bull. X. 100-101.

Das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt}=x_1,\quad \frac{dx_1}{dt}=f(x)$$

hat zum Integral

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{2\int f(x)dx+C}}=\int\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

X habe die reellen Wurzeln $x=b$ und $x=c$ und sei zwischen b und c positiv, dann wird x während der ganzen Bewegung zwischen den Grenzen b und c continuirlich hin und her schwingen, falls der Anfangswert von x in diesem Intervall liegt. Es

handelt sich nun um die Darstellung von x als periodische Function von t. X wird in der Form

$$X = \frac{(b-x)(c-x)}{R^2}$$

angenommen, und durch die Substitution

$$x = a(1-e\cos u), \quad \text{wo} \quad a = \frac{b+c}{2}, \quad e = \frac{b-c}{b+c},$$

erhält man

$$t+c = \int R\,du.$$

R als periodische Function von u kann in die Reihe entwickelt werden

$$R = \frac{1}{n}(1+a_1\cos u + 2a_2\cos 2u + 3a_3\cos 3u + \cdots),$$

und so ergiebt sich

$$(1) \qquad n(t+c) = u + a_1\sin u + a_2\sin 2u + a_3\sin 3u + \cdots.$$

Die Aufgabe ist nun, diese Reihe umzukehren, allgemeiner: eine gegebene Function

$$U = F(x, x_1), \quad \left(x = a(1-e\cos u), \quad x_1 = \frac{ae\sin u}{R}\right)$$

als Function von t in einer periodischen Reihe darzustellen. Das geschieht, statt nach der Lagrange'schen Methode, mittels bestimmter Integrale nach dem Fourier'schen Theorem. Die gesuchte Reihe sei

$$U = \tfrac{1}{2}\beta_0 + \beta_1\cos\zeta + \beta_2\cos 2\zeta + \beta_3\cos 3\zeta + \cdots,$$

wo

$$\zeta = n(t+c);$$

dann ist

$$\tfrac{1}{2}\pi\beta_i = \int_0^\pi U\cos i\zeta\,d\zeta =$$

$$\int_0^\pi F\left\{a(1-e\cos u), \frac{ae\sin u}{R}\right\}[1+a_1\cos u + 2a_2\cos 2u + \cdots]\cos i\zeta\,du,$$

wo ζ durch die Reihe (1) als Function von u gegeben ist. Der Verfasser giebt noch eine andere Entwickelung mittels Anwendung von Bessel'schen Functionen. Im zweiten Teile der Arbeit

wird eine Anwendung gemacht auf die Bewegung eines Systems von Punkten unter der Einwirkung von Centralkräften, deren Potential eine Function der Summe der Quadrate der Fahrstrahlen ist. Hr.

G. Darboux. Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues. Journ. de Math. (4) III. 305-325.

Die betrachteten Differentialgleichungen haben die Form

$$(1) \qquad f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = 0,$$

worin f eine beliebige homogene Function mit constanten Coefficienten bedeutet. Das Problem ihrer Integration wird so verstanden, dass die allgemeinsten Ausdrücke für $x_1, \ldots, x_n$ als Functionen eines Parameters t gefunden werden sollen, die der Gleichung genügen, ohne dass diese Ausdrücke mit Integralzeichen behaftet sind. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ beliebige Functionen von t, der einzigen Bedingung unterworfen, der Gleichung

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, t) = 0$$

zu genügen. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ seien die Coefficienten von $a_1, \ldots, a_{n-1}$ in der Determinante

$$\Sigma \pm a_1 \frac{da_2}{dt} \cdots \frac{da_{n-1}}{dt^{n-2}},$$

U eine willkürliche Function von t. Löst man das System von $n-1$ Gleichungen

$$\frac{d^kU}{dt^k} = b_1 \frac{d^k\lambda_1}{dt^k} + \cdots + b_{n-1} \frac{d^k\lambda_{n-1}}{dt^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-2)$$

nach $b_1, \ldots, b_{n-1}$ auf, dann stellen die Ausdrücke

$$x_n = \frac{db_1}{da_1} = \frac{db_2}{da_2} = \cdots = \frac{db_n}{da_n},$$

$$x_1 = a_1 x_n - b_1, \quad x_2 = a_2 x_n - b_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = a_{n-1} x_n - b_{n-1},$$

enthaltend die willkürliche Function U und ihre $n-1$ ersten Ableitungen, die gesuchte Lösung dar. Die Bestimmung der

Grössen b setzt voraus, dass die Determinante

$$\Sigma \pm \lambda_1 \frac{d\lambda_2}{dt} \cdots \frac{d^{n-2}\lambda_{n-1}}{dt^{n-2}}$$

von Null verschieden ist. Dieselbe verschwindet jedoch nur dann, wenn zwischen den x lineare Relationen mit constanten Coefficienten bestehen. Man eliminirt in diesem Falle eine gewisse Anzahl der Grössen x und hat dann eine Gleichung der nämlichen Form wie (1) mit weniger Variabeln aufzulösen. Die allgemeine Methode wird auf die Gleichungen

$$dx^2 + dy^2 = ds^2, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

angewandt, und die Resultate werden geometrisch interpretirt.

Hr.

C. Guichard. Sur la résolution de l'équation aux différences finies $G(x+1) - G(x) = H(x)$. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 361-380.

Von der vorstehenden Gleichung ist das endliche Integral leicht zu finden, wenn $H(x)$ ein Polynom ist. Hier handelt es sich um den Fall, dass H eine beliebige transcendente ganze Function ist. Der Verfasser weist nach, dass es dann stets eine andere ganze Function G giebt, die obiger Gleichung genügt. Hierzu bildet er mit Hülfe eines bestimmten Integrals mit veränderlichem Parameter eine Function, die jener Relation genügt, aber Unstetigkeitslinien besitzt; indem dann diese Discontinuitäten zum Verschwinden gebracht werden, gelangt man zum gesuchten Resultat. Die Lösungen der Gleichungen

$$G(x+\omega) - G(x) = H(x)$$

und

$$aG(x+1) + bG(x) = H(x)$$

lassen sich unmittelbar auf den vorhergehenden Fall zurückführen. Die Gleichung

$$(1) \qquad a_0 G(x+n) + a_1 G(x+n-1) + \cdots + a_n G(x) = H(x)$$

wird mit Hülfe der n Gleichungen

$$G(x+1) - \lambda_1 G(x) = G_1(x), \quad G_1(x+1) - \lambda_2 G_1(x) = G_2(x), \ \ldots,$$
$$G_{n-1}(x+1) - \lambda_n G_{n-1}(x) = H(x)$$

aufgelöst, worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \cdots + a_0\lambda^n = 0$$

sind. Ist eine Lösung gefunden, dann erhält man alle anderen durch Hinzufügung des allgemeinen Integrals derjenigen Gleichung, die aus (1) hervorgeht, wenn man $H = 0$ setzt. Dasselbe ist bereits von den Herren Picard und Floquet bei Gelegenheit ihrer Untersuchungen der eindeutigen Integrale linearer Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten angegeben worden. Der Verfasser betrachtet alsdann das System

$$(2)\quad \begin{cases} a_0\, G(x+n\omega) + a_1\, G(x+(n-1)\omega) + \cdots + a_n G(x) = H(x), \\ b_0\, G(x+m\omega') + b_1\, G(x+(m-1)\omega') + \cdots + b_m G(x) = H_1(x). \end{cases}$$

Hier müssen H und H_1 einer gewissen Relation genügen. Ist diese erfüllt, so haben die Gleichungen im allgemeinen nur eine ganze Lösung. Hierzu sind noch die meromorphen Lösungen der Gleichungen hinzuzufügen, die aus (2) hervorgehen, wenn die rechten Seiten gleich Null gesetzt werden. Diese Gleichungen sind ebenfalls bereits von den Herren Picard und Floquet behandelt worden. Zum Schluss behandelt der Verfasser noch die Gleichung

$$\frac{G(x+1)}{G(x)} = H(x)$$

und das System

$$\frac{G(x+u)}{G(x)} = H(x), \quad \frac{G(x+u')}{G(x)} = H_1(x).$$

Hr.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

D. Besso. Di alcune equazioni alle derivate parziali del prim' ordine. Rom. Acc. L. Rend. (4) III$_2$. 158-160.

Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n particuläre Lösungen der Gleichung:

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = R,$$

wo P_ν, R Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen, so kann jede Lösung z dieser Gleichung bekanntlich die Form:

$$z = z_1 + F(z_2 - z_1, z_3 - z_1, \ldots, z_n - z_1)$$

annehmen, wo F eine willkürliche Function ist. Sind desgleichen $n+1$ bezw. $n+2$ Lösungen von:

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = Qz + R,$$

oder von:

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = Lz^2 + Qz + R$$

bekannt, und setzt man im ersten Falle:

$$t = \lg \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \qquad t_r = \lg \frac{z_{r+2} - z_1}{z_2 - z_1},$$

im zweiten Falle:

$$t = \lg \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)}, \qquad t_r = \lg \frac{(z_{r+3} - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_{r+3} - z_2)(z_3 - z_1)},$$

so ist jede andere Lösung z mit denselben durch die Relation:

$$t = F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$$

verbunden, wo F wiederum eine willkürliche Function darstellt. Ist nun das Product φ_0 von m particulären Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ von (1) oder (2) bekannt, so kann man die Coefficienten der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sind, durch φ_0, P_ν, Q, R und die Differentialquotienten dieser Functionen rational ausdrücken. Die Function φ_0 genügt der linearen partiellen Differentialgleichung der m^{ten} Ordnung:

$$\varphi_m = m!,$$

wo φ_m durch das Gleichungssystem:

$$\varphi_k = \frac{1}{R} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial x_\nu} - (m-k+1) Q \varphi_{k-1} \right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

definirt ist (für die Gleichung (1) muss man $Q = 0$ setzen).

Ist die Summe ψ von m particulären Lösungen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ der Gleichung (3) bekannt, so kann man die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sind, durch ψ, P_ν, L, Q, R und deren Differentialquotienten rational ausdrücken.

Vi.

H. LAURENT. Sur les conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle. Nouv. Ann. (3) VI. 19-24.

Die Bedingungen dafür, dass

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

ein genaues Differential sei:

$$p_{i\varkappa} \equiv \frac{\partial p_i}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial x_i} = 0$$

sind bekanntlich nicht unabhängig von einander. Der Verfasser beweist nun mit Hülfe der von Jacobi bemerkten Relation

$$\frac{\partial p_{i\lambda}}{\partial x_\varkappa} + \frac{\partial p_{\lambda\varkappa}}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{\varkappa i}}{\partial x_\lambda} = 0$$

folgendes Theorem:

Damit der fragliche Ausdruck ein genaues Differential sei, ist notwendig und hinreichend:

1) dass

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_3} = \frac{\partial p_3}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_1},$$

2) dass der Ausdruck

$$p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

ein genaues Differential ist in Bezug auf $x_2, \ldots, x_n$ für $x_1 = x_1^0$. Hiervon macht der Verfasser Anwendung auf ein einfaches Verfahren, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1, \ldots, x_n, t, p_1, \ldots, p_n)$$

zu integriren, wo u die unbekannte Function von $x_1, \ldots, x_n, t$ bedeutet und $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}$ ist.

Hr.

G. MORERA. Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine. Genova G. 81-85.

Ein Fall, in welchem das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h \quad \left(p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}\right)$$

direct, ohne Zuhülfenahme der Integration des äquivalenten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, gelöst werden kann, ist der, dass sie eine vollständige Lösung besitzt, die sich aus zwei Summanden zusammensetzt, deren jeder nur je eine der unabhängigen Veränderlichen q_1, q_2 enthält. Der Verfasser findet als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die, dass H einer Functionalgleichung von der Form

$$\varphi[\varphi_1(H, q_1, p_1), \quad \varphi_2(H, q_2, p_2)] = 0$$

genüge. Die vollständige Lösung lautet dann

$$V = \int p_1 dq_1 + \int p_2 dq_2 + \text{const.},$$

wo p_1 und p_2 aus den Gleichungen

$$\varphi_1(h, q_1, p_1) = \alpha_1, \quad \varphi_2(h, q_2, p_2) = \alpha_2$$

zu entnehmen, und die willkürlichen Constanten α_1 und α_2 durch die Gleichung $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ mit einander verbunden sind.

T.

G. Ricci. Sui sistemi di integrali independenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine. Annali di Mat. (2) XV. 127-159.

Unter gleichem Titel hat der Verfasser bereits einen Auszug aus dieser ausführlichen Arbeit in den Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 119-122, 190-194 gegeben, und es sei daher auf das Referat über denselben in diesem Jahrbuche XVIII. 1886. 318 f. verwiesen. T.

M. Hamburger. Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen. J. für Math. C. 390-404.

Bildet man mit den $p(p+n)$ Elementen

$$m_{\varrho,h} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p;\ h = 1, 2, \ldots, p+n)$$

die Determinanten

$$(1) \qquad M_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = |m_{\varrho, i_\sigma}| \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, p),$$

wo $i_1, i_2, \ldots, i_p$ p beliebige Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p+n$

bedeuten, und setzt man speciell

$$M_{1,2,\dots,p} = |m_{\varrho,\sigma}| = M,$$

$$M_{1,2,\dots,k-1,i,k+1,\dots,p} = M_{k,i} \qquad \binom{k=1,2,\dots,p}{i=1,2,\dots,p+n},$$

sodass $M_{k,k} = M$ und $M_{k,\varrho} = 0$ ist, für $\varrho = 1, 2, \dots, p$ und $\varrho \gtrless k$, dann lassen sich unter der Voraussetzung, dass $M \lessgtr 0$ ist, die Quotienten $M_{i_1, i_2, \dots, i_p} : M$, wie folgt, durch die Quotienten $M_{ki} : M$, von denen nur pn von 0 und 1 verschieden sind, ganz und rational ausdrücken:

$$(2) \qquad \frac{M_{i_1, i_2, \dots, i_p}}{M} = \left| \frac{M_{\varrho, i_\sigma}}{M} \right| \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots, p).$$

Hieraus erhält man nicht bloss die bekannten Relationen (cf. Baltzer, Th. der Det. 2. Aufl. §. 3. 11) zwischen den $\binom{n+p}{p}$ Determinanten $M_{i_1, i_2, \dots, i_p}$, sondern erkennt auch, dass zwischen ihnen nur $\binom{n+p}{p} - np - 1$ von einander unabhängige Relationen stattfinden können; alle übrigen müssen Folgen von ihnen oder identisch sein. Und umgekehrt: die Relationen (2) zwischen den $\binom{n+p}{p}$ Grössen $M_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ sind auch hinreichend dafür, dass sie sich als Determinanten von $p(p+n)$ Elementen $m_{\varrho,h}$ in der durch (1) gegebenen Weise darstellen lassen. Mit Hülfe dieser Determinantensätze nun gelangt der Herr Verfasser zu dem folgenden bemerkenswerten Resultate: Damit eine partielle Differentialgleichung zwischen p unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_p$ und beliebig vielen abhängigen $u_1, u_2, \dots, u_n$ die allgemeine Lösung $\varphi(f_1, f_2, \dots, f_p) = 0$ habe, wo die f bestimmte Functionen der Veränderlichen x und u sind und φ eine willkürliche Function bedeutet, ist notwendig und hinreichend, dass die partielle Differentialgleichung die Form

$$(3) \qquad 0 = \left| m_{\varrho,\sigma} + \sum_{h=1}^{n} m_{\varrho,p+h} \frac{\partial u_h}{\partial x_\sigma} \right| \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots, p)$$

habe, wo die $m_{\varrho,\sigma}$ Functionen der x und u bedeuten, und das

System totaler Differentialgleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{p} m_{\varrho,\sigma} dx_\sigma + \sum_{h=1}^{n} m_{\varrho,p+h} du_h = 0; \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

unbeschränkt integrabel ist. (Für den Fall einer einzigen abhängigen Veränderlichen erhält man den bekannten Zusammenhang einer linearen partiellen Differentialgleichung mit einem vollständigen System totaler Differentialgleichungen). Hieraus ergiebt sich für den Fall, dass die partielle Differentialgleichung linear sein soll, die Form

$$(4) \quad \begin{cases} A + \sum_{h,\varrho} B_{h,\varrho} \dfrac{\partial u_h}{\partial x_\varrho} = 0, \quad \text{wo} \\ B_{i1} : B_{i2} : \ldots : B_{ip} = B_{11} : B_{12} : \ldots : B_{1p}; \qquad (i = 2, \ldots, n) \end{cases}$$

und als zugehöriges System totaler Differentialgleichungen:

$$dx_i + \lambda_i dx_1 = 0 \qquad (i = 2, \ldots, p),$$
$$A dx_1 + B_{11} du_1 + B_{21} du_2 + \cdots + B_{n1} du_n = 0,$$

wo $\lambda_i = -B_{1i} : B_{11} = -B_{2i} : B_{21} = \cdots$ ist. Hat man zur Bestimmung der n Functionen u_i n lineare partielle Differentialgleichungen

$$(5) \quad A^r + \sum_{h,\varrho} B_{h,\varrho} \frac{\partial u_h}{\partial x_\varrho} = 0; \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

so kann man, durch lineare Combinationen derselben, n Gleichungen (6) herleiten, deren Coefficienten die Bedingungen (4) erfüllen; die Herstellung dieser Combinationen hängt von der Auflösung der Gleichung n^{ten} Grades

$$f(\mu) = | B^h_{g,2} - \mu B^h_{g,1} | = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, \mu)$$

ab. Sind dann die zu den Gleichungen (6) gehörigen n Systeme totaler Differentialgleichungen integrabel, und $f_1^s = c_1, \ldots, f_p^s = c_p$ die Integrale des s^{ten} Systems, so hat das System (5) die Gleichungen $\varphi_h(f_1^h, f_2^h, \ldots, f_p^h) = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ willkürliche Functionen bezeichnen, zur allgemeinen Lösung, durch deren Auflösung sich $u_1, \ldots, u_n$ als Functionen von $x_1, \ldots, x_p$ bestimmen. In dem besonderen Falle, dass $f(\mu) = 0$ lauter gleiche Wurzeln besitzt, fallen die n Systeme totaler Differentialgleichungen in ein einziges zusammen, das aus $n + p - 1$

Gleichungen besteht und stets integrabel ist, und man gelangt zu dem bereits von Jacobi abgeleiteten Resultate. T.

G. Garbieri. Sulla eliminazione delle funzioni arbitrarie. Ven. Ist. Atti. (6) V. 831-841.

Der Verfasser kommt nochmals auf die Eliminationsmethode zurück, vermittelst deren es ihm gelungen ist (Ven. Ist. Atti (6) I. 1173-1225 und II. 1201-1220; cf. F. d. M. XVI. 1884. p. 302f. und p. 657f.), im Falle auch von mehr als einer willkürlichen Function zu einer einzigen partiellen Differentialgleichung von einer der Zahl der zu eliminirenden willkürlichen Functionen gleichen Ordnung zu gelangen. Liegt z. B. das System der Gleichungen

$$f(x, y, z, c, \varphi(c), \psi(c)) = 0, \quad g(x, y, z, c, \varphi(c), \psi(c)) = 0$$

mit dem Parameter c und den willkürlichen Functionen φ und ψ zur Bestimmung der Function z der unabhängigen Veränderlichen x, y vor, so besteht eins der angewandten Verfahren darin, dass man nach x und y differentiirt, zunächst

$$\left(\frac{df}{dc}\right) = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial c} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dg}{dc}\right)$$

und aus den erhaltenen Gleichungen die linear und homogen auftretenden Grössen

$$\left(\frac{dc}{dx}\right) = \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dc}{dy}\right)$$

eliminirt; dann erhält man eine Gleichung

$$h\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, c, \varphi(c), \psi(c)\right) = 0,$$

die in Verbindung mit einer der ursprünglichen Gleichungen auf dieselbe Weise zu einer vierten Gleichung $k = 0$ führt, die ausser den ersten auch die zweiten Ableitungen von z enthält. Die Elimination von c, φ, ψ aus den vier Gleichungen $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, $k = 0$ liefert dann eine einzige partielle Differentialgleichung nur von der zweiten Ordnung. Bei dem gewöhnlichen Verfahren dagegen, bei dem die gegebenen Gleichungen ohne weiteres so lange nach x und y differentiirt werden, bis

man zu einer Anzahl von Gleichungen gelangt, welche Parameter und willkürliche Functionen zu eliminiren gestattet, muss man bis zu den dritten Ableitungen fortschreiten und erhält 20 Gleichungen mit 18 zu eliminirenden Grössen, so dass man schliesslich zu zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung in z gelangt. Dieser nochmaligen Auseinandersetzung seines Eliminationsverfahrens, durch welche der Verfasser auf dasselbe als von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen hinweisen will, werden literarische Notizen hinzugefügt, durch welche nachgewiesen werden soll, dass fast überall in den gangbaren Lehrbüchern die Ordnung der resultirenden Gleichungen zu hoch bestimmt wird, während doch schon Monge in seiner Application de l'analyse die richtige Bestimmung gegeben und Minich im Jahre 1845 (Ven. Ist. Atti) und später in den C. R. LXXXIV. 1496ff. (F. d. M. IX. 1877. 277) und LXXXVII. 161ff. (F. d. M. X. 1878. 252f.) einen Beweis dafür gegeben hat. T.

G. Darboux. Sur les équations linéaires à deux variables indépendantes. C. R. CV. 199-201.

Bildet man mit der allgemeinen Lösung z und $m+n$ beliebigen particulären Lösungen $u_1, u_2, \dots, u_{m+n}$ der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

wo a, b, c beliebige Functionen von x und y bedeuten, die Function

$$Z = \lambda \Sigma \pm z \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^m u_m}{\partial x^m} \frac{\partial u_{m+1}}{\partial y} \frac{\partial^2 u_{m+2}}{\partial y^2} \dots \frac{\partial^n u_{m+n}}{\partial y^n},$$

so ist diese das allgemeine Integral ebenfalls einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von derselben Form. Dieser Satz wird hergeleitet; er enthält als ganz speciellen Fall ($m = 1$, $n = 0$) einen von Herrn L. Lévy gegebenen (C. R. C.

98ff. und J. de l'Éc. Polyt. cah. LVI. 63ff.; cf. F. d. M. XVII. 1885. 345 und XVIII. 1886. 320). T.

E. Goursat. Sur un système d'équations aux dérivées partielles. C. R. CIV. 1361-1363.

R. Liouville. Sur un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. CIV. 1496-1497.

Painlevé. Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles. C. R. CIV. 1497-1501.

Ebenso wie man von der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu der bekannten Differentialgleichung dritter Ordnung für den Quotienten zweier particulären Integrale jener Gleichung geführt wird, gelangt Herr Goursat, von dem System von linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgehend:

$$(1)\quad r = a_1 p + a_2 q + a_3 z,\quad t = b_1 p + b_2 q + b_3 z,\quad s = c_1 p + c_2 q + c_3 z,$$

wo p, q, r, s, t die bekannte Bedeutung haben, zu der partiellen Differentialgleichung

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\pi}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial\pi}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial^2\pi}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial\pi}{\partial x}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2\pi}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial\pi}{\partial x}\dfrac{\partial\pi}{\partial y} \\ = A\left(\dfrac{\partial\pi}{\partial x}\right)^3 + B\left(\dfrac{\partial\pi}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial\pi}{\partial y} + C\dfrac{\partial\pi}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\pi}{\partial y}\right)^2 + D\left(\dfrac{\partial\pi}{\partial y}\right)^3, \end{cases}$$

(wo $A = b_1$, $B = b_2 - 2c_1$, $C = a_1 - 2c_2$, $D = a_2$ ist), welcher die Quotienten $u = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, $v = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ dreier linear unabhängigen Integrale ω_1, ω_2, ω_3 von (1) genügen, und weiter zu einem System von vier partiellen Differentialgleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A\Delta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) = B\Delta, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) = C\Delta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D\Delta, \qquad \left(\Delta = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \end{cases}$$

welches in Bezug auf jede der Functionen u und v einzeln linear ist. Von diesen Gleichungen (2) und (3) werden einige Eigenschaften angegeben. Herr Liouville weist auf die Uebereinstimmung der Gleichungen (1) und (2) mit denjenigen hin, die er in den C. R. CIII. 520ff. (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 306 f.) behandelt hat. In der dritten der obigen Arbeiten wird eine andere Herleitung der Resultate gegeben, die von der Betrachtung einer endlichen Gruppe von linearen Substitutionen mit zwei Variabeln ausgeht, und es werden Bemerkungen daran geknüpft, welche sich auf den Fall beziehen, dass das System (1) algebraische Integrale besitzt. T.

W. E. Serdobinsky. Ueber die Integrale der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mosk. math. Samml. XIII. 511-534. (Russisch.)

Es handelt sich um das Auffinden des allgemeinen Integrals der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, nach der Methode der Variation der Constanten, aus dem vollständigen Integrale mit fünf willkürlichen Constanten. Es werden specielle dabei eintretende Fälle betrachtet, und die Untersuchung wird auf die Integration der Gleichungen

$$r + te^{2s} = 0, \quad s^2 = pt$$

angewandt. Wi.

J. Larmor. On the direct application of first principles in the theory of partial differential equations. Lond. R. S. Proc. XLIII. 176-179.

Auszug aus einer Abhandlung für die Lond. Phil. Trans. Cly.

A. Schwartz. Ueber lineäre partielle Differentialgleichungen II. Ordnung. Diss. Tübingen. 36 S. 8°.

H. HARTENSTEIN. Ueber die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$ für Polar- und elliptische Coordinaten nebst Behandlung eines mit derselben zusammenhängenden physikalischen Problems. Diss. Leipzig. 43 S. 8°.

F. ENGEL. Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. Leipz. Ber. 89-99.

I. Der Sinn der Jacobi'schen Identität. Zwischen drei beliebigen infinitesimalen Punkttransformationen:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

eines n-fach ausgedehnten Raumes $x_1, \ldots, x_n$ besteht immer die Identität:

$$(1) \qquad ((X_1 X_2) X_3) + ((X_2 X_3) X_1) + ((X_3 X_1) X_2) \equiv 0,$$

wo $(X_i X_k)$ den Ausdruck:

$$(X_i X_k) = X_i X_k f - X_k X_i f$$

bedeutet. In der vorliegenden Note wird nun gezeigt, dass diese Identität, welche ein besonderer Fall der berühmten Jacobi'schen Identität ist, einen sehr einfachen begrifflichen Sinn besitzt.

Ausgegangen wird davon, dass die Identität (1) eine Identität zwischen infinitesimalen Transformationen ist, dass sie also wahrscheinlich eine Eigenschaft des Transformationsbegriffs für den besonderen Fall der infinitesimalen Transformationen ausdrückt. Auf diese Weise kommt man auf die Vermutung, dass zwischen drei beliebigen, endlichen Transformationen S, T, U eine Substitutionenidentität besteht, welche in die Identität (1) übergeht, sobald man für S, T, U bezüglich die infinitesimalen Transformationen Xf, Yf, Zf einsetzt. Diese Vermutung bestätigt sich. Es wird nachgewiesen, dass die Identität:

$$(2) \qquad (U^{-1} TU)^{-1} U^{-1} SU\, U^{-1} TU \equiv U^{-1} T^{-1} STU$$

eine derartige Substitutionenidentität ist; dieselbe sagt aus, dass der Ausdruck $T^{-1} ST$ sich als Invariante verhält, wenn man in die Transformationen S und T vermittelst der Transformation U neue Veränderliche einführt.

II. Zur Theorie der Zusammensetzung. Hr. Lie hat bei verschiedenen Gelegenheiten r-gliedrige Gruppen $X_1 f \dots X_r f$ betrachtet, welche die Zusammensetzung:

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s c_{i,i+k,s} X_s f \qquad (i = 1, \dots, r-1;\ k = 1, \dots, r-i)$$

besitzen, und hat bewiesen, dass jede r-gliedrige Gruppe von dieser Zusammensetzung r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \dots Y_r f$ enthält, die in den Beziehungen:

$$(Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^{i} {}_s \bar{c}_{i,i+k,s} Y_s f \qquad (i = 1, \dots, r-1;\ k = 1, \dots, r-i)$$

stehen, das heisst: jede r-gliedrige Gruppe G_r von dieser Zusammensetzung enthält eine invariante $G_{r-1} = Y_1 f \dots Y_{r-1} f$, eine invariante $G_{r-2} = Y_1 f \dots Y_{r-2} f$, welche in dieser G_{r-1} steckt, und so weiter.

In der vorliegenden Note wird nun bewiesen, dass die r-gliedrigen Gruppen von dieser besonderen Zusammensetzung sich auch definiren lassen als diejenigen r-gliedrigen Gruppen, welche keine Kegelschnittsgruppe enthalten; als Kegelschnittsgruppe wird dabei jede dreigliedrige Gruppe bezeichnet, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gleich zusammengesetzt ist. Die beim Beweise angewandten Ueberlegungen lassen sich nicht kurz wiedergeben. In denselben wird übrigens ein Satz als selbstverständlich angenommen, der zwar richtig ist, aber doch erst noch bewiesen werden müsste, der Satz nämlich, dass die allgemeine projective Gruppe der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu einer Gruppe, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, nicht isomorph sein kann. El.

S. Lie. Die Begriffe Gruppe und Invariante. Leipz. Ber. S. 83-88.

Diese Mitteilung ist durch einen Brief von Halphen veranlasst, welcher sich in einer Abhandlung von Sylvester (American J. IX. No. 2) befindet. In diesem Briefe behauptet Halphen, dass man bisher den allgemeinen Grund für die Existenz von

Invarianten noch nicht erkannt habe, und will diese angeblich vorhandene Lücke ausfüllen.

Halphen beginnt damit, dass er einen eigentümlichen Gruppenbegriff einführt, und will beweisen, dass Invarianten nur den Scharen von algebraischen Transformationen zukommen, welche in seinem Sinne Gruppen bilden (er sagt: les invariants sont l'apanage exclusif des substitutions formant groupe). Hr. Lie weist nun nach, dass die Halphen'sche Definition des Gruppenbegriffs jedenfalls nicht scharf gefasst ist, und zeigt an Beispielen, dass, wenn man diese Definition ihrem Wortlaute nach versteht, der Halphen'sche Satz über die Invarianten nicht richtig ist, dass vielmehr auch solche Scharen von Substitutionen, welche keine Gruppen im Halphen'schen Sinne sind, Invarianten besitzen können. Hierzu fügt Hr. Lie noch einige Andeutungen, wie man die Invarianten einer beliebigen Schar von Transformationen bestimmen kann, doch beschränkt er sich dabei auf Cremona'sche Transformationen. El.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

E. P. Culverwell. On the discrimination of maxima and minima solutions in the calculus of variations. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII. (A) 95-130.

Der Verf. bezieht sich auf die Untersuchungen Jacobi's und anderer, und er stellt als den Hauptzweck seiner Arbeit den Nachweis hin, dass eine strenge Erörterung der endgültigen Bedingungen ohne die Einführung irgend welcher analytischen Transformationen gegeben werden kann, indem die Ergebnisse durch Schlussfolgerungen aus den Grundbegriffen der Variations-Rechnung erzielt werden. Der erste Teil jedoch enthält eine analytische Methode, die zu Jacobi's Transformation führt und

hauptsächlich wegen des geschichtlichen Interesses der Aufgabe aufgenommen ist. Hr. Culverwell hatte diese Methode verallgemeinert, um die Kriterien für den Fall eines beliebigen Integrals zu erhalten, als er erst gewahr wurde, dass die Ergebnisse nicht völlig neu waren. Nachdem er die Grenzen gefunden hatte, bis zu welchen hin die Kriterien ausreichten, wurde er auf die allgemeine Methode geführt, welche im zweiten Teile gegeben wird, der in sich abgeschlossen ist.

Die betrachtete Form ist die eines mehrfachen Integrals U, dessen Integrand eine beliebige Anzahl unabhängiger und abhängiger Variabeln nebst den Ableitungen der abhängigen bis zu einer beliebigen Ordnung enthält. In Anlehnung an geometrische Begriffe wird das Integral synklastisch oder antiklastisch genannt, je nachdem die zweite Variation $\delta^2 U$ dasselbe Zeichen behält, was für eine Function von x auch δy ist, oder das Zeichen für verschiedene Werte von δy wechselt. Das Kriterium für ein Maximum oder ein Minimum der Function wird zuerst in dem Falle aufgesucht, wenn der Integrationsbereich klein ist, und hieraus leitet der Verf. durch Betrachtungen, die auf der Continuität der Integrale beruhen, die Kriterien für den Fall her, wenn der Integrationsbereich eine beliebige endliche Grösse hat. Der folgende von ihm aufgestellte Satz (obschon nicht völlig verständlich ausserhalb des Zusammenhanges) zeigt den allgemeinen Charakter seiner Ergebnisse.

„Wenn es möglich ist, um jeden Punkt P in einem Bereiche B von endlicher Grösse einen kleineren Bereich (b) ohne Rücksicht auf die Kleinheit so anzunehmen, dass das Integral U für jenen Bereich synklastisch ist, so ist auch das Integral für den ganzen Bereich B synklastisch, falls die fernere Bedingung erfüllt ist, dass es unmöglich ist, innerhalb des Bereiches B eine zweite synklastische Fläche b' anzunehmen, die in allen Punkten ihres begrenzenden Schnittes mit der ersten dieselben Werte für die abhängigen Variabeln und für alle ihre Ableitungen mit Ausnahme der höchsten hat. Wenn es möglich ist, eine solche Fläche zu finden, so ist das Integral U antiklastisch für den Bereich B.“

Cly. (Lp.)

N. J. Sonine. Ueber die Bestimmung der Maximum- und Minimumeigenschaften der ebenen Curven. Warsch. Nachr. 1886. (Russisch.)

Es sei $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ die Differentialgleichung einer Familie von ebenen Curven. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Maximum- und Minimumeigenschaften der Curven zu bestimmen, welche sich durch das Maximum und Minimum eines Integrals von der Form ausdrücken:

$$\int_a^b f(x, y, p)dx \ \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Es handelt sich also um die Bestimmung der Function $f(x, y, p)$ für die gegebene Function $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$. Eingehender behandelt der Verfasser den Fall, in welchem die Familie der Curven aus homothetischen Curven besteht und die Differentialgleichung die Form

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \Theta\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

hat. Dann bekommt man das Theorem: „Es besteht für jede Curve ein Integral von der Form

$$\int_{x_0}^{x_1} y^n \chi(p)dx,$$

welches auf dieser Curve das Maximum oder das Minimum erreicht."

Die ausführliche Untersuchung der Frage in dem Falle, in welchem man die Kettenlinie erhält, die durch zwei gegebene Punkte gehen muss, führt zu einer notwendigen und hinreichenden Bedingung der Möglichkeit der Lösung dieser Frage. Man erhält auch die notwendige Bedingung, die im Moigno-Lindelöf'schen Lehrbuche der Variationsrechnung gegeben ist.

Am Ende wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, die die Eigenschaft hat, dass für alle ihr genügenden Curven die bekannte Jacobi'sche Bedingung der Existenz des

Maximums oder des Minimums genau in derselben Weise geometrisch interpretirt werden kann, wie dies bei der Frage von der kleinsten Rotationsfläche geschieht. Wi.

H. A. Schwarz. Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten, von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke. Gött. Abh. XXXIV. 48 S.

Siehe Abschnitt IX. 3 A.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

O. Biermann. Theorie der analytischen Functionen. Leipzig. Teubner. X u. 452 S.

Die Theorie der analytischen Functionen, wie sie von Herrn Weierstrass begründet ist, hat bisher in der Literatur keine zusammenhängende Darstellung gefunden. Das vorliegende Werk soll diese Lücke ausfüllen und namentlich den Studirenden in den Stand setzen, in die genannte Theorie einzudringen. An ein derartiges Werk muss man die Anforderung stellen, dass es die zum Teil recht schwierigen Begriffe der Theorie in klarer Weise auseinandersetzt, und dass es in den Beweisen und Resultaten durchaus zuverlässig ist. Leider genügt das vorliegende Werk dieser Anforderung nicht. Dasselbe enthält fast in jedem Capitel Unklarheiten oder unrichtige Sätze, so dass es in seiner jetzigen Form als Lehrbuch für den Anfänger nicht zu empfehlen ist. Hoffen wir, dass der Verfasser sein Werk bei einer neuen Auflage einer gründlichen Durchsicht unterzieht und es so zu einem in jeder Hinsicht brauchbaren Buche gestaltet. Schon jetzt ist dasselbe für denjenigen, welcher sich die Theorie bereits angeeignet hat, von grossem Werte, insofern es eine übersichtliche Zusammenstellung des umfangreichen Stoffes giebt.

Das Werk ist in acht Capitel eingeteilt. Das erste Capitel, betitelt „die Elemente der Arithmetik", enthält die Entwickelung des Zahlbegriffs und die Untersuchung der Summen und Producte von unendlich vielen Zahlen. Die irrationalen Zahlen werden auf zwei Weisen erklärt: einerseits, nach Weierstrass, durch Summen unendlich vieler rationaler Zahlen; andererseits, nach G. Cantor, durch die mit rationalen Zahlen gebildeten Fundamentalreihen. Nachdem die complexen Zahlen eingeführt und die Gesetze, nach welchen man mit ihnen rechnet, ausführlich begründet sind, wird der Grund, warum man sich auf Zahlen mit zwei Einheiten beschränkt, in Kürze angegeben. Die nun folgende Behandlung der unendlichen Producte leidet an Unklarheiten, welche kürzlich Herr Pringsheim in einer vorzüglichen Abhandlung (Math. Ann. XXXIV.) hervorgehoben hat.

Das zweite Capitel beginnt mit Betrachtungen über veränderliche Grössen und Grössenmengen. Es handelt sich hier namentlich um den Begriff der Stetigkeit, Häufungsstellen von Punktmengen (wobei G. Cantor's Arbeiten Berücksichtigung finden), obere und untere Grenze, Maximum und Minimum. Der Verfasser sagt in diesem Abschnitt (pag. 80, dritter Absatz von unten), dass eine Grösse y den Maximal- resp. Minimalwert nicht notwendig annimmt, während er kurz vorher hervorhebt, dass man vom Maximum resp. Minimum nur dann spricht, wenn die obere resp. untere Grenze erreicht wird. Es folgt, als zweiter Abschnitt dieses Capitels, die Theorie der rationalen Functionen einer und mehrerer Veränderlichen. Hier sollte es auf pag. 93, vorletzter Absatz, heissen: die ganze Function ist in jedem endlichen Bereiche (statt „in dem ganzen endlichen Bereich") stetig. Auch ist der diesem Absatze vorhergehende Satz nicht klar stilisirt. Doch würde es zu weit führen, wenn ich alle derartigen stilistischen Unebenheiten, welche mir bei der Lectüre des Buches aufgefallen sind, angeben wollte. Auf pag. 100 oben wird ein unzulänglicher Grund dafür angegeben, dass das Verschwinden der Resultante eine hinreichende Bedingung für eine gemeinsame Wurzel zweier Gleichungen ist. Ferner ist der Satz auf pag. 104: „das Product zweier Functionen f_n und k, von denen keine

durch g_m teilbar ist, kann kein Vielfaches von g_m sein", offenbar unrichtig.

Das dritte Capitel enthält zunächst einige Betrachtungen über Potenzreihen einer und mehrerer Veränderlichen, wobei die gleichmässige Convergenz erklärt wird. (Absatz 2, pag. 131 greift unberechtigter Weise vor). Auf pag. 168 unten findet sich der unrichtige Satz, dass die Werte zweier Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in dem gemeinsamen Convergenzbereich A zusammenfallen, wenn dies für unendlich viele Stellen, welche sich an einer Stelle von A häufen, der Fall ist. Nachdem die Haupteigenschaften der Potenzreihen abgeleitet sind, wird nun der Begriff der monogenen analytischen Function auf Grund der Systeme von in einander fortsetzbaren Potenzreihen entwickelt, und sodann werden die eindeutigen und endlich vieldeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen näher betrachtet. Hier sind die Erörterungen auf pag. 174 über die singulären Stellen durchaus unklar.

Das vierte Capitel trägt den Titel: „Ueber den Umfang des Begriffes der analytischen Function". Dasselbe ist dem Nachweise gewidmet, dass durch gewöhnliche algebraische Gleichungen und durch totale und partielle algebraische Differentialgleichungen nur wieder analytische Functionen definirt werden. Die algebraischen Gleichungen $G(y, x) = 0$ werden zunächst ausführlich behandelt. Dabei ist der Ausspruch des abschliessenden Satzes pag. 221: „die Umgebung jeder endlichen Stelle (a, b) eines algebraischen Gebildes ist durch ein oder mehrere Functionenpaare darzustellen, je nachdem an dieser Stelle $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ nicht beide verschwinden, oder beide Null sind", nicht correct. Es wird der Nachweis der Monogenität des irreducibeln algebraischen Gebildes geführt; sodann werden entsprechende Betrachtungen für den Fall von mehr als zwei Variabeln angestellt.

Das fünfte Capitel wendet die allgemeine Theorie auf die elementaren transcendenten Functionen, auf die Exponentialfunction, den Sinus, den Cosinus, den Logarithmus, die allgemeine Potenz an. In einem Anhange wird die hypergeometrische Reihe

betrachtet Die Exponentialfunction, der Logarithmus und die allgemeine Potenz werden durch ihre Functionaltheoreme eingeführt. So wird z. B. die Exponentialfunction als Lösung der Aufgabe gefunden: eine analytische Function zu bestimmen, welche der Gleichung $f(z_1).f(z_2) = f(z_1+z_2)$ genügt. Hier ist zu bemerken, dass der Ansatz des Verfassers

$$f(z) = \sum_0^\infty c_\nu (z-a)^\nu, \quad \sum_0^\infty c_\nu (z_1-a)^\nu . \sum_0^\infty c_\nu (z_2-a)^\nu = \sum_0^\infty c_\nu (z_1+z_2-a)^\nu$$

unzulässig ist, da die Existenz eines Functionenelementes, in dessen Convergenzbezirk mit z_1 und z_2 zugleich z_1+z_2 liegt, erst nachzuweisen ist.

Das sechste Capitel handelt von der Darstellung der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen durch Producte von Primfunctionen und durch Summen rationaler Functionen (Mittag-Leffler'sches Theorem). Die voraufgeschickten allgemeinen Sätze über Producte aus unendlich vielen analytischen Functionen (pag. 304 u. 305) sind nicht gehörig durchgearbeitet. Die Darstellung der transcendenten ganzen Functionen durch Producte von Primfunctionen findet Anwendung auf die trigonometrischen Functionen und die Weierstrass'sche σ-Function. Im Anschluss an die letztere werden auch einige Eigenschaften der elliptischen Function $\wp(u)$ abgeleitet. Dieses Capitel enthält endlich noch den Nachweis, dass eine Summe von unendlich vielen rationalen Functionen in verschiedenen Gebieten verschiedene analytische Functionen darstellen kann.

Das siebente Capitel giebt eine gedrängte Darstellung der Theorie der doppelt periodischen Functionen und der Functionen mit linearen Substitutionen in sich. Auf pag. 410 findet sich hier die Definition: „Man nennt x äquivalent oder congruent zu $x^{(i)}$, wenn es vier Grössen a_i, b_i, c_i, d_i giebt, welche den Bedingungen $x^{(i)} = \dfrac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i}$, $a_i d_i - b_i c_i = 1$ genügen.“ Diese Definition ist aber sinnlos, da bei beliebig gegebenen x und $x^{(i)}$ auf unendlich viele Weisen vier derartige Grössen a_i, b_i, c_i, d_i gefunden werden können. Sie gewinnt erst dann eine Bedeutung,

wenn die Substitution $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ einer gegebenen Gruppe angehören soll. Die Bereiche der Ebene, welche einer solchen Gruppe entsprechen, brauchen ferner nicht, wie pag. 423 irrtümlich angegeben wird, durch Kreisbogen begrenzt zu werden. Auf Grund der Theorie der Modulfunctionen wird am Schlusse dieses Capitels der Satz von Picard bewiesen, dass eine transcendente ganze Function höchstens einen endlichen Wert im Endlichen nicht annehmen kann (siehe F. d. M. XII. 1880. 327).

Das achte Capitel enthält einige Sätze aus der bislang noch wenig entwickelten Theorie der analytischen Functionen mehrerer Variabeln. Es werden die von Weierstrass herrührenden Sätze bewiesen, welche das Verhalten dieser Functionen in der Umgebung einer ausserwesentlich singulären Stelle erkennen lassen. Ferner wird der Nachweis geführt, dass eine Function mit nur ausserwesentlich singulären Stellen eine rationale Function ist, und endlich das algebraische Gebilde bei mehreren Variabeln einer kurzen Betrachtung unterzogen. Hz.

M. Pasch. Ueber einige Punkte der Functionentheorie. Math. Ann. XXX. 132-154.

Die vorliegende inhaltreiche Abhandlung enthält in gedrängter Darstellung die Grundlehren der Theorie der Functionen einer reellen Veränderlichen. Der Verfasser ist der Ansicht, dass in dieser Theorie der von Herrn P. Du Bois-Reymond eingeführte Begriff der Unbestimmtheits-Grenzen eine möglichst frühe Stellung und eine möglichst ausgedehnte Anwendung finden muss. Durch Einführung dieses Begriffes gelingt es von vornherein, die fundamentalen Begriffe der Theorie (Grenzwert einer Function, Differentialquotient, Integral), welche nur bedingungsweise anwendbar sind, durch andere zu ersetzen, welche jene umfassen, ohne ähnlichen Einschränkungen zu unterliegen. Um den Umfang zu kennzeichnen, in welchem der Verfasser den Gegenstand behandelt, setze ich hier die Ueberschriften der einzelnen Abschnitte der Abhandlung her. Dieselben lauten:

I. Schranken und Grenzen. II. Die derivirten Functionen. III. Sprünge und Schwingungen einer Function. IV. Inhalt einer Punktmenge. V. Das bestimmte Integral.

Die glücklich gewählte Terminologie rührt zum Teil vom Verfasser her. Die einschlägige Literatur findet in ausgedehntester Weise Berücksichtigung. Hz.

R. DEDEKIND. Erläuterung zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Grössen. Gött. N. 1-7.

Die vorliegende Note hat den Zweck, an einigen Beispielen die Auffassung zu erläutern, welche Herr Dedekind in einer früheren Arbeit von dem bekannten Gauss'schen Ausspruch, dass „die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen (wie die zweigliedrigen complexen Grössen) liefern können", entwickelt und begründet hat. Es wird namentlich hervorgehoben, dass diese Auffassung sich wesentlich von der Auffassung des Herrn Weierstrass unterscheidet. Schon vor längerer Zeit hatte Herr Dedekind die Freundlichkeit, den Referenten gelegentlich hierauf aufmerksam zu machen, und letzterer ist infolge dessen bemüht gewesen, bei der Besprechung der erwähnten Arbeit [F. d. M. XVII. 1885. 365] den Standpunkt des Herrn Dedekind möglichst deutlich hervortreten zu lassen. Hz.

J. PETERSEN. Ueber n-dimensionale complexe Zahlen. Gött. Nachr. 489-502.

Nach einer kurzen Uebersicht der von Herrn Weierstrass (Gött. Nachr. 1884. 395ff., F. d. M. XVI. 330) aufgestellten Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen giebt der Verfasser einen neuen einfachen Beweis eines von Herrn Dedekind (Gött. N. 1885. 141ff., F. d. M. XVII. 365) im Anschluss an die Mitteilung des Herrn Weierstrass veröffentlichten Satzes. Das Ergebnis der Untersuchung wird in folgen-

stitution $\binom{a_i \; b_i}{c_i \; d_i}$ einer gegebenen Gruppe ange-
Bereiche der Ebene, welche einer solchen Gruppe
rauchen ferner nicht, wie pag. 423 irrtümlich an-
durch Kreisbogen begrenzt zu werden. Auf Grund
Modulfunctionen wird am Schlusse dieses Capitels
Picard bewiesen, dass eine transcendente ganze
tens einen endlichen Wert im Endlichen nicht
n (siehe F. d. M. XII. 1880. 327).
Capitel enthält einige Sätze aus der bislang noch
lten Theorie der analytischen Functionen mehrerer
werden die von Weierstrass herrührenden Sätze
he das Verhalten dieser Functionen in der Um-
usserwesentlich singulärer Stelle erkennen lassen.
er Nachweis geführt, dass eine Function mit nur
h singulären Stellen eine rationale Function ist,
as algebraische Gebilde bei mehreren Variabeln
Betrachtung unterzogen. Hz.

Ueber einige Punkte der Functionentheorie.
XXX. 132-154.

liegende inhaltreiche Abhandlung enthält in ge-
stellung die Grundlehren der Theorie der Functionen
n Veränderlichen. Der Verfasser ist der Ansicht,
r Theorie der von Herrn P. Du Bois-Reymond einge-
ff der Unbestimmtheits-Grenzen eine möglichst frühe
d eine möglichst ausgedehnte Anwendung finden
ch Einführung dieses Begriffes gelingt es von vorn-
fundamentalen Begriffe der Theorie (Grenzwert einer
Differentialquotient, Integral), welche nur bedingungs-
ndbar sind, durch andere zu ersetzen, welche jene
ohne ähnlichen Einschränkungen zu unterliegen. Um
g zu kennzeichnen, in welchem der Verfasser den
d behandelt, setze ich hier die Ueberschriften der ein-
bschnitte der Abhandlung her. Dieselben lauten:

unterliegen, dass die Multiplication eine associative Operation wird.

Bezeichnet nun x eine bestimmte complexe Grösse, so ist die Aufgabe zu entscheiden, wann die unendliche Summe

$$(1) \qquad \sum_1^\infty{}_\nu \alpha_\nu x^\nu$$

eine complexe Grösse definirt. Man bilde zu dem Zwecke die Gleichungen

$$x = \sum \xi_j e_j, \; x^2 = \sum \xi_j' e_j, \; \dots$$

und eliminire aus ihnen die Einheiten, wodurch man eine Gleichung der Gestalt

$$(2) \qquad x^{m+1} + \gamma_1 x^m + \cdots + \gamma_m x = 0 \qquad (m \leqq n)$$

erhält. Damit nun die Summe (1) eine complexe Grösse definirt, ist notwendig und hinreichend, dass die Wurzeln der Gleichung (2), wenn man in dieser Gleichung x als eine gewöhnliche complexe Zahl ansieht, dem Convergenzbezirke der Potenzreihe $\sum_1^\infty \alpha_\nu \zeta^\nu$ angehören. Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich die durch die Summe (1) definirte Grösse mit Hülfe der Lagrange'schen Interpolationsformel explicite hinschreiben. Aehnliche Resultate ergeben sich, falls man an Stelle der Summe (1) eine Summe der Gestalt $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_\nu x^\nu$ betrachtet, wobei dann freilich wegen der Potenzen mit negativen Exponenten noch besondere Annahmen über das zu Grunde liegende System complexer Grössen einzuführen sind. Hz.

A. Saporetti. Analisi nuova per dimostrare giusto l'usato metodo pratico degl' immaginari e teoria, più generale dell'usata sulle relazioni fra i coefficienti delle funzioni algebrico intere ad una variabile ed i fattori lineari, siano funzionali, siano propri delle equazioni. Bologna Mem. VIII. 555-571.

Der Verfasser setzt an Stelle der imaginären Einheit eine unbestimmt bleibende reelle Grösse i, so dass seine Formeln in die gewöhnlichen übergehen, wenn man Multipla von i^2+1 ver-

nachlässigt. Diese (übrigens bekannte) Art, die Rechnung mit imaginären Zahlen zu vermeiden, wird in ermüdender Breite an dem Beispiel der Gleichungen zweiten und dritten Grades auseinandergesetzt. Hz.

J. Brill. A new method for the graphical representation of complex quantities. Mess. (2) XVII. 80-93.

In diesem Aufsatze wendet der Verfasser den Begriff der Dualität auf tangentiale Coordinaten an, d. h. so, dass er eine Zeichnung herstellt, in welcher complexe Grössen durch Linien statt durch Punkte dargestellt werden. Es ergiebt sich, dass die Theorie nicht ein genaues Analogon derjenigen ist, bei welcher complexe Grössen durch Punkte dargestellt werden. Dies verhält sich so, wie man es erwarten durfte; denn es ist sehr wohl bekannt, dass eine vollständige Dualität in der Planimetrie des homaloidalen Raumes nicht besteht. Nach der Entwickelung der Methode wendet der Verf. sie auf geometrische Deutung mannigfacher algebraischer Identitäten an. Glr. (Lp.)

E. Strauss. Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung. Acta Math. XI. 13-18.

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ eine unendliche Reihe positiver ganzer Zahlen, welche sämtlich grösser als 1 sind. Ferner sei

$$c_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad c_2 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}, \dots, c_\nu = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}, \dots$$

Dann lässt sich jede positive Grösse ω, welche kleiner ist als 1, in eine convergente Reihe der Gestalt

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_\nu c_\nu + \dots$$

entwickeln, wo $a_1, a_2, \dots$ positive ganze Zahlen bedeuten, die den Ungleichungen $a_1 < \alpha_1$, $a_2 < \alpha_2, \dots$ genügen. Wenn von einem Index k ab jede Grösse a den höchsten Wert hat, so lässt sich statt dieser Entwickelung von ω eine andere endliche geben. Abgesehen von diesem Falle giebt es für jede Grösse ω

nur eine Entwickelung in der gewünschten Form. Man wähle nun irgend eine ganze positive nicht quadratische Zahl k und irgend eine positive Grösse $\omega < \frac{1}{\sqrt{k}}$. Ferner nehme man

$$\alpha_1 = k,\ \alpha_2 = 2k,\ \ldots,\ \alpha_\nu = \nu k,\ \ldots,$$

und also

$$c_1 = \frac{1}{k},\quad c_2 = \frac{1}{k^2.\,2!},\ \ldots,\ c_\nu = \frac{1}{k^\nu.\,\nu!},\ \ldots$$

Bei diesen Annahmen mögen sich die Entwickelungen

$$\omega = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots,$$
$$\omega\sqrt{k} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \cdots$$

ergeben, wo $a_\nu < \nu k$, $b_\nu < \nu k$ ist. Bildet man jetzt die Potenzreihe

$$H(x) = \Sigma^\nu \frac{a_\nu x^{2\nu}}{\nu!} - \Sigma^\nu \frac{b_\nu x^{2\nu+1}}{\nu!},$$

so ist dieselbe beständig convergent, und es wird offenbar

$$H\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 0,\quad H\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = 2\omega.$$

Damit ist gezeigt, dass eine ganze transcendente Function ($H(x)$) für eine Wurzel einer irreducibeln algebraischen Gleichung ($kx^2-1 = 0$) verschwinden kann, ohne zugleich für jede andere Wurzel derselben Gleichung zu verschwinden. Hz.

A. Gutzmer. Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe. Teixeira J. VIII. 147-156.

Der Verfasser stellt folgenden Satz auf:

Das arithmetische Mittel der Quadrate der Moduln aller Werte, die die Reihe $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ längs eines Kreises $|x| = r$, der innerhalb des Convergenzbereichs liegt, haben kann, ist gleich der Summe der Quadrate der Moduln der Glieder der Reihe.

Er giebt für diesen Satz zwei verschiedene Beweise; der eine stützt sich auf die Theorie der Reihen, der andere auf eine

Integralformel, die von A. Harnack aufgestellt ist und aus der einige Folgerungen gezogen werden.

Der Aufsatz schliesst mit einem neuen Beweise des von Herrn Rouché aufgestellten Satzes, dass das arithmetische Mittel aller Werte von $\frac{f(x)}{x^n}$, welche zu einem bestimmten Werte des Moduls der Veränderlichen x gehören, gleich dem Coefficienten a_n ist. Tx. (Hch.)

A. Köpcke. Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen. Math. Ann. XXIX. 123-140.

Wenn man die Werte einer Function $y = f(x)$ in der üblichen Weise geometrisch darstellt, so erhält man als Bild der Function ein unendliches System von Punkten. Die Frage, wann dieses Punktsystem eine anschauliche Curve bildet, setzt natürlich voraus, dass der Begriff einer „anschaulichen Curve" genau festgelegt wird. Die Festlegung dieses Begriffes hält indessen der Verfasser ebenso wie P. du Bois-Reymond für unmöglich, da „die Bestimmung Anschaulichkeit nicht deutlich formulirbar" sei. Bei diesem Standpunkt kann man eine befriedigende Beantwortung jener Frage nicht verlangen. Die Betrachtungen des Verfassers beruhen darauf, dass gewisse Bedingungen als notwendig erfüllt angesehen werden, falls $y = f(x)$ durch eine „anschauliche" Curve dargestellt wird. Zu diesen Bedingungen gehören 1) die Stetigkeit von $f(x)$; 2) die Differentiirbarkeit von $f(x)$; 3) der Umstand, dass $f(x)$ in keinem Intervalle unendlich viele Maxima und Minima besitzt.

Es erhebt sich die Frage, ob diese Bedingungen von einander abhängig sind oder nicht. Herr Weierstrass hat bekanntlich durch Beispiele gezeigt, dass die Bedingung 1) erfüllt sein kann, ohne dass die Bedingung 2) erfüllt ist. Unter diesen Beispielen finden sich Functionen, welche der Bedingung 3) genügen und solche, welche derselben nicht genügen.

Ob es Functionen giebt, welche die ersten beiden Bedingungen erfüllen, die dritte jedoch nicht, war bislang nicht be-

kannt. Der Verfasser erledigt diese Frage in bejahendem Sinne, indem er eine solche Function wirklich bildet. Das geometrische Bild dieser Function entsteht als Grenze eines gebrochenen Linienzuges, dessen Bildungsgesetz jedoch so verwickelt ist, dass ich es hier nicht in wenigen Worten auseinandersetzen kann.

Der Verfasser giebt schliesslich noch eine Reihe von Erörterungen über „Anschaulichkeit“ der Curven, welche in dem Satze gipfeln:

„Alle anschaulichen Curven besitzen auch anschauliche Differential- und anschauliche Integral-Curven“. Hz.

E. Schröder. Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. Math. Ann. XXIX. 299-317.

Eine vollständige Uebersicht der Gattungen, Arten und Formen (vgl. in Bezug auf diese Begriffe J. für Math. XC. 189ff.; F. d. M. 1881. XIII. 325f.) von Functionen zweier Variabeln, welche als zugleich mit ihren beiderlei Umkehrungen vollkommen eindeutige in einem Zahlengebiete von 1, 2, 3 und 4 Elementen existiren können. T.

E. Schröder. Ueber Algorithmen und Calculn. Hoppe Arch. (2) V. 225-278.

Unter Calcul wird eine Gruppe von Functionalgleichungen zusammen mit allen denen sich mit logischer Notwendigkeit aus ihnen ergebenden verstanden, welche sich mindestens auf zwei Functionen zweier Argumente nebst deren (sämtlichen) Umkehrungen beziehen; specieller Fall dieses Begriffs ist z. B. der Calcul der vier Species und der der sieben algebraischen Operationen. Jeder auf nur eine solche Function nebst ihren Umkehrungen sich beziehende Teil eines Calculs heisst ein Algorithmus, wofür der Algorithmus der Addition und der der Multiplication ein Beispiel ist, während diese beiden Algorithmen zusammen mit den („gemischten“) Formeln, die sich aus dem Distributionsgesetze ergeben, den Calcul der vier Species bilden. Der Herr Verfasser

hat sich nun die Aufgabe gestellt, alle möglichen Calculn aufzusuchen, welche zwischen den aus zwei Functionen je zweier Argumente und ihren Umkehrungen hervorgehenden sechs Operationen bestehen können, und zwar innerhalb solcher Grenzen, die lediglich bestimmt sind durch die Anforderung, dass die fundamentalen Gesetze des Calculs einen gewissen Grad von Complicirtheit nicht überschreiten dürfen. Um diese weitergehende Aufgabe in Angriff zu nehmen, werden zunächst solche Gesichtspunkte aufgestellt, unter welchen dieselbe naturgemäss einzuschränken ist, z. B. vollkommene Eindeutigkeit der Functionen und ihrer Umkehrungen, Beschränkung der auftretenden Elemente bei den Calculn auf höchstens sieben und bei den Algorithmen auf höchstens sechs Zahlen, u. s. w. Da es dem Referenten nicht thunlich erscheint, die Ergebnisse der Untersuchungen in Kürze wiederzugeben, so muss er auf die Abhandlung, die mit dem Studium der Algorithmen beginnt, selbst hinweisen. Bemerkt sei nur noch, dass die entwickelte Theorie auch einen Eingang in das Studium der überall unstetigen Functionen (beliebig vieler Variabeln) eröffnet, welche nicht minder, wie die im allgemeinen stetigen, einen grossen Reichtum formaler Eigenschaften besitzen, und Berührungspunkte mit der Theorie der trilinearen Functionen, mit der Theorie der Substitutionen und endlich mit den Dyck'schen Untersuchungen über Riemann'sche Flächen darbietet.

T.

H. Schapira. Ueber ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen. Vortrag. Heidelberg. (24 S.).

T.

H. Schapira. Bemerkungen zu der Grenzfunction algebraischer Iterationen. Schlömilch. Z. XXXII. 310-314.

Ist

$$u^n - \binom{n}{1}{}^{(q+1)}\varphi_1 . u^{n-1} + \binom{n}{2}{}^{(q+1)}\varphi_2^2 . u^{n-2} - \cdots + (-1)^n {}^{(q+1)}\varphi_n^n = 0$$

diejenige Gleichung, welche die n Grössen ${}^{(q)}\varphi_1, \ldots, {}^{(q)}\varphi_n$ zu

Wurzeln hat, also $\binom{n}{\lambda}{}^{(q+1)}\varphi_\lambda^\lambda = \Sigma\, {}^{(q)}\varphi_{i_1}\, {}^{(q)}\varphi_{i_2} \dots {}^{(q)}\varphi_{i_\lambda}$, und giebt man q alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird hierdurch eine Grenzfunction definirt, welcher sich die einander gleich werdenden Wurzeln der zu $q = \infty$ gehörigen Gleichung nähern; von dieser ist das Gauss'sche arithmetisch-geometrische Mittel offenbar ein specieller Fall ($n = 2$). Der Verfasser giebt für diese Functionen diejenigen Entwickelungen, welche den im Art. 9 der Pars II von Gauss' Nachlass (Gauss W. III. 372-374) mitgeteilten entsprechen. T.

Oltramare. Mémoire sur les principes généraux du calcul, généralisation. Ass. Franç. (Toulouse.) 285-305.

K. Heun. Zur Theorie der mehrwertigen mehrfach linear verknüpften Functionen. Acta Math. XI. 97-118.

Eine mehrdeutige Function einer unabhängigen Veränderlichen x mit i endlichen Verzweigungspunkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i$ und dem Unendlichkeitspunkte ξ_{i+1} und von der Eigenschaft, dass zwischen je $p+1$ Zweigen derselben eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, heisst eine p-fach linear verknüpfte Function. Bedeuten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{i+1}$ die homogenen linearen Substitutionen, welche das Verhalten der zu den Punkten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i+1}$ gehörigen Zweiggruppen

$$(y_{1,1} \dots y_{p,1}),\ (y_{1,2} \dots y_{p,2}),\ \dots,\ (y_{1,i+1} \dots y_{p,i+1})$$

bei einmaliger positiver Umkreisung dieser Punkte ausdrücken, so werden alle Systeme (y) von p Functionen, deren Periodicität in Bezug auf dieselben Verzweigungspunkte durch dieselben erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{i+1}$ definirt sind ($\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_{i+1} = 1$), als „zurselben Art gehörig" bezeichnet. Zwischen je $p+1$ Systemen derselben Art $(y^0), (y^{(1)}), \dots, (y^{(p)})$ besteht, wie Riemann (Werke p. 360) bewiesen, eine homogene lineare Relation mit ganzen Functionen von x als Coefficienten:

$$H_0(x)\, y^0_{\mathfrak{p}t} + H_1(x)\, y^{(1)}_{\mathfrak{p}t} + \dots + H_p(x)\, y^{(p)}_{\mathfrak{p}t} = 0 \qquad \left({t = 1, 2, \dots, i+1 \atop \mathfrak{p} = 1, 2, \dots, p}\right).$$

Diese von Riemann nur der Form nach gegebene Fundamentalgleichung bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen, welche die Bestimmung der Coefficienten H zum Ziel haben. Als $p+1$ Functionen derselben Art werden, in Rücksicht darauf, dass die Derivirten einer Function offenbar mit der primitiven von derselben Art sind, folgende gewählt:

$$y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}}, \quad z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}},$$

und die Grade der Coefficienten in der erwähnten Relation bestimmt. Die Voraussetzung ist, dass es zu jedem Verzweigungspunkte ξ_i eine Gruppe (y) giebt, deren Elemente dargestellt sind durch

$$y_{mi} = (x-\xi_i)^{\lambda_{mi}}\,\mathfrak{P}(x-\xi_i) \qquad (m = 1, 2, \ldots, p),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine im Punkte ξ_i eindeutige, stetige und nicht verschwindende Function bedeutet, und die Exponenten $\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{pi}$ von einander nicht bloss um ganze Zahlen verschieden sind. Die entsprechende Gruppe (z) hat dann die Form:

$$z_{mi} = (x-\xi_i)^{\lambda_{mi}+\delta_{mi}}\,\mathfrak{P}(x-\xi_i) \qquad (m = 1, 2, \ldots, p),$$

worin $\delta_{1i}, \ldots, \delta_{pi}$ ganze Zahlen sind.

Zwei Fälle sind für den nächsten Gegenstand der Untersuchung, nämlich die Darstellung eines allgemeinen Systems (z) durch ein gewisses sogleich zu charakterisirendes Hauptsystem (y), von Wichtigkeit: die Fälle $\pi = 1$ und $\pi = 0$. Der erste führt auf die Darstellung von z als lineare, homogene Function von $y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ mit rationalen Coefficienten, der letztere auf die Differentialgleichung p^{ter} Ordnung, der y genügt, in der Form

$$F_0[h+p(i-1)]y + \psi F_1[h+(p-1)(i-1)]\frac{dy}{dx} + \cdots$$
$$+ \psi^{p-1}F_{p-1}[h+i-1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \psi^p F_p[h]\frac{d^p y}{dx^p} = 0,$$

wo in den beigefügten Klammern die Grade der ganzen Functionen F angegeben sind, und

$$\psi = (x-\xi_1)\ldots(x-\xi_i), \quad h = \tfrac{1}{2}p(p-1)(i-1) - \sum_{t=1}^{t=i+1}\lambda_{pt}$$

gesetzt ist. Wenn $h = 0$, so ergiebt sich die bekannte Fuchs'-

zuerteilen, wenn die Differentialgleichung von höherer als zweiter Ordnung ist. Hr.

O. Hölder. Ueber eine Function, welche keiner algebraischen Functionalgleichung genügt. Gött. N. 662-676.

Bedeuten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige Veränderliche,

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_r$$

bestimmte algebraische Functionen derselben, so sagt man, falls eine Relation der Gestalt

$$(1) \qquad G(f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_r), x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

besteht, dass die Function $f(x)$ einer algebraischen Functionalgleichung genügt. Dabei bezeichnet G eine rationale ganze Function der eingeschlossenen Argumente, und es wird selbstverständlich vorausgesetzt, dass jene Relation (1) nicht identisch erfüllt ist, d. h. dass dieselbe nicht besteht, wenn man für $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_r)$ von einander und von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige Argumente einsetzt.

In der vorliegenden Note zeigt Hr. Hölder, dass die ganze transcendente Function

$$J(x) = x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^4}{4.4!} + \cdots$$

keiner algebraischen Functionalgleichung genügt. Da man $n-1$ der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constante Werte beilegen kann, so ist es hinreichend, die Unmöglichkeit einer Relation (1) zu beweisen für den Fall, dass man nur eine unabhängige Veränderliche in die Betrachtung einführt. Die Function $J(x)$ befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{dJ(x)}{dx} = \frac{e^x - 1}{x},$$

und dieser Umstand lässt es zweckmässig erscheinen, sogleich zu beweisen, dass selbst eine nicht-identische Relation der Gestalt

$$(2) \qquad G(J(y_1), J(y_2), \ldots, J(y_r), e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_r}, x) = 0$$

unmöglich ist, wo $y_1, y_2, \ldots, y_r, z_1, z_2, \ldots, z_r$ bestimmte algebraische Functionen von x bedeuten. Die zu diesem Beweise führenden Ueberlegungen sind denjenigen ähnlich, welche der Verfasser angestellt hat, um zu zeigen, dass die Function $\Gamma(x)$

keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Nimmt man die Existenz einer Relation der Gestalt (2) an, so darf man offenbar voraussetzen, dass die Grössen e^{z_1}, e^{z_2}, ..., e^{z_s} nur linear in dieselbe eingehen, und dass keine der Differenzen $z_i - z_k$ eine Constante ist. Bezeichnet man sodann mit m die Ordnung der Function G in Bezug auf die Grössen $J(y_1)$, $J(y_2)$, ..., $J(y_r)$, so ergiebt sich, dass die mehrmalige Differentiation der Gleichung (2) zu einer nicht-identischen Gleichung derselben Gestalt führt, für welche die Ordnung m einen um eine Einheit kleineren Wert besitzt als für die Gleichung (2). Hieraus folgt dann die Existenz einer die Grössen $J(y_1)$, $J(y_2)$, ..., $J(y_r)$ nicht mehr enthaltenden Relation, deren Unmöglichkeit leicht erwiesen wird. Hz.

S. Pincherle. Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni. Bologna Mem. (4) VIII. 125-144.

Die Transformation von Laplace ist eine bestimmte Functionaloperation, d. h. eine Operation, vermöge welcher man aus einer gegebenen analytischen Function $\varphi(y)$ eine andere Function $f(x)$ ableitet. Man setzt nämlich

$$(1) \qquad f(x) = \int e^{xy} \varphi(y) dy,$$

wobei die Integration durch eine beliebig, aber fest angenommene Curve zu erstrecken ist. Der Verfasser betrachtet zunächst allgemein diejenigen Functionaloperationen E, welche die folgenden Gleichungen befriedigen:

$$E(\varphi+\varphi_1) = E(\varphi)+E(\varphi_1),$$
$$\frac{d}{dx} E(\varphi) = E(y\varphi),$$
$$E\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = -xE(\varphi).$$

Die inverse Operation genügt dann ähnlichen Gleichungen.

Die Transformation von Laplace ist nun eine derartige Operation E; und da die Eigenschaften der inversen Operation durch den Ansatz

$$(2) \qquad \varphi(y) = \int e^{-xy} f(x) dx$$

bei passender Wahl des Integrationsweges erfüllt werden, so wird die Umkehrung der Gleichung (1) im allgemeinen durch eine Gleichung der Gestalt (2) vermittelt.

Diese allgemeinen Betrachtungen werden zunächst an einigen Beispielen erläutert. Besonders ausführlich wird der Fall untersucht, in welchem $\varphi(y)$ eine algebraische Function von y, insbesondere eine algebraische Function vom Geschlechte 0 ist. Der specielle Fall $\varphi = \sqrt{1+y^2}$ ergiebt die Hauptsätze aus der Theorie der Cylinder-Functionen $J_\nu(x)$ und $K_\nu(x)$. Der Fall

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}$$

führt zu der Formel

$$\int e^{-ix \sin \operatorname{am} u} du = \sum_0^\infty {}_n (-1)^n P_n\left(1-\frac{2}{k^2}\right) J_{2n+1}(x),$$

wo die Integration durch eine geeignet gewählte Linie zu erstrecken ist, und P_n die n^{te} Kugelfunction bedeutet. Die durch das Integral dargestellte Function von x genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche sich ohne weiteres aus den allgemeinen Sätzen des Verfassers ergiebt. Hz.

T. J. Stieltjes. Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle. Darboux Bull. (2). XI. 46-51.

Man beschreibe um den Nullpunkt der z-Ebene einen Kreis C mit dem Radius 1 und nehme auf der Peripherie dieses Kreises eine unendliche Zahl von Punkten

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

an. Indem man ferner jede complexe Grösse mit demselben Buchstaben bezeichnet, wie den Punkt, welcher dieselbe geometrisch repräsentirt, bilde man die Reihe

$$f(z) = \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^2}\cdot\frac{z}{a_n - z}.$$

Es ergiebt sich nun durch elementare Betrachtungen, dass diese Reihe in eine convergirende Potenzreihe $\sum_1^\infty {}_n c_n z^n$ umgeformt

werden kann, falls der Punkt z im Innern des Kreises C liegt. Werden jetzt insbesondere die Punkte a_1, a_2, a_3, ... so gewählt, dass a_1, a_2, ..., a_{2^r} für jeden Wert von r die Ecken eines regulären 2^r-Ecks bilden, so lässt sich weiter ohne Schwierigkeit beweisen, dass der Wert der obigen Reihe über alle Grenzen wächst, wenn sich der Punkt z vom Nullpunkt aus auf geradlinigem Wege in den Punkt a_n hineinbegiebt. Die Function $f(z)$ hat daher in jedem noch so kleinen Stücke der Peripherie des Kreises C unendlich viele Unstetigkeitspunkte und kann folglich über diesen Kreis hinaus nicht fortgesetzt werden. Hz.

H. Fürle. Ueber die Darstellung von Functionen, welche durch eine gewisse Klasse von Functionalgleichungen definirt sind. Diss. Halle. 63 S. 8°.

David. Équations des contours tracés autour de points donnés. Toulouse Mém. (8) IX. 179-186.

Bezeichnet (x_1, y_1) eine nicht singuläre Stelle des algebraischen Gebildes $f(x, y) = 0$, so entspricht einer genügend kleinen um den Punkt $x = x_1$ abgegrenzten Contour eine den Punkt $y = y_1$ einschliessende Contour. Der Verfasser giebt die Gleichungen für besondere einander derart entsprechende Contouren an. Hz.

B. Bukrejeff. Ueber die Partialbruchzerlegung der transcendenten Functionen. Kiewskija Univers. Iswestija 1886. NNo. 10-12. (Russisch.)

Die ganze Arbeit zerfällt in drei verschiedene Capitel: 1) historisch-kritische Einleitung, 2) Theorie, 3) Anwendungen. Im ersten Capitel erwähnt der Verfasser alle früheren mehr oder weniger bemerkenswerten Untersuchungen im Gebiete der zu Grunde liegenden Frage, indem er sowohl manche Vorteile als auch Mängel verschiedener Methoden kritisch hervorzuheben

sucht. So z. B. bezeichnet er als Grundmangel der „méthode des résidus“ von Cauchy die Abwesenheit allgemeiner leitender Hinweisungen auf die Convergenz der Residuen-Reihen, welche sich nach dieser Methode ergeben. Ausser den Arbeiten von Cauchy werden die von Euler, Gauss, Cayley, Betti, Eisenstein ausführlich betrachtet. Nachher geht der Verfasser zu den neusten Untersuchungen über die Partialbruchzerlegung der transcendenten Functionen und vor allem zu den epochemachenden Arbeiten des Herrn Weierstrass in der Theorie der eindeutigen Functionen über. Nachdem er sie in grossen Zügen skizzirt hat, erwähnt er auch fast die ganze umfangreiche Literatur, welche nicht nur in deutscher, sondern auch in französischer, italienischer und schwedischer Sprache von 1876 bis 1886 unter dem Einflusse der Weierstrass'schen Untersuchungen entstanden ist. Hier findet der Leser die Namen Schering, Hermite, Appell, Picard, Guichard, Dini, Casorati, Mittag-Leffler u. v. a. citirt. Als einfachste und bequemste für die praktischen Anwendungen erachtet der Verfasser die Methode von Mittag-Leffler, da sie nicht nur fast alle Mängel früherer Methoden beseitigt, sondern auch der grössten Verallgemeinerungen fähig ist, wie schon die Herren Appell, Guichard u. a. gezeigt hatten.

In dem zweiten Capitel beweist der Verfasser das Theorem von Mittag-Leffler (mit einigen Modificationen, nach dem Vorgange von Herrn Weierstrass) und als specielles Beispiel das Theorem von Herrn Weierstrass betreffs der Zerlegung der ganzen transcendenten Functionen in unendliche Producte. Indem er die Kriterien sucht, welche zur Bestimmung des Convergenzexponenten l (in den Fällen, wo er constant bleibt) dienen sollen, beweist er folgenden Satz: „Wenn die allgemeine Form der Functionen $f_x(z)$ $(x = 1, 2, \ldots, \infty)$, welche in der Fassung des Theorems vorkommen,

$$f_x(z) = \frac{c_x}{(z-\alpha_x)^2},$$

wobei:

$$\lim_{z=\alpha_x}\left[(z-\alpha_x)\left\{F(z) - \frac{c_x}{(z-\alpha_x)^2}\right\}\right] = 0$$

ist ($F(z)$ bezeichnet die zu zerlegende Function), so ist der betreffende Convergenzexponent l (die Mittag-Leffler'sche Zahl, wie ihn der Verfasser nennt) die kleinste derjenigen Zahlen λ, für welche die Reihe:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{c_\varkappa}{a_\varkappa^{\lambda+2}}$$

convergent ist". In diesem Capitel giebt der Verfasser auch die Bedingungen an, unter welchen sich der Grenzwert des Integrals:

$$\int_s \frac{F(u)}{u-z}\left(\frac{z}{u}\right)^l du,$$

welches in der von Mittag-Leffler gegebenen Formel (C. R. 1882, I. Semestre p. 511) vorkommt, bei der unendlichen Vergrösserung der Contour s auf Null reducirt.

Was die Bestimmung der ganzen Function $G(x)$ in der Formel:

$$F(z) = G(z) + \sum_\nu F_\nu(z)$$

anbetrifft, welche Bestimmung die grösste Schwierigkeit bei der Anwendung des Theorems von Mittag-Leffler darstellt, so bedient sich dabei der Verfasser für den Fall der doppelt-periodischen und Thetafunctionen des bekannten Satzes von Liouville, nach welchem eine ganze Function, falls sie sich als doppelt-periodisch erweist, notwendig eine Constante sein muss.

Das dritte Capitel ist Anwendungen gewidmet, aus welchen die folgenden citirt werden mögen:

$$-\operatorname{tg} z = \sum_\varkappa \left\{\frac{1}{z-(2\varkappa+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2\varkappa+1)\frac{\pi}{2}}\right\},$$

$$\sec z = 1 + \sum_\varkappa (-1)^{\varkappa+1}\left\{\frac{1}{z-(2\varkappa+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{(2\varkappa+1)\frac{\pi}{2}}\right\},$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum_\varkappa (-1)^\varkappa \left\{\frac{1}{z-\varkappa\pi} + \frac{1}{\varkappa\pi}\right\},$$

$$\lambda(z) = \lambda'(0).z + \frac{1}{g\varkappa}\sum_{m,m'} (-1)^m \left\{\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2}\right\},$$

$$\mu(z) = \mu(0) + \frac{1}{gi\varkappa}\sum_{m,m'} (-1)^{m+m'} \left\{\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2}\right\},$$

$$\nu(z) = \nu(0) + \frac{1}{gi} \sum_{m,m'} (-1)^{m'} \left\{ \frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha^2} \right\},$$

$$\frac{1}{\lambda^2(z)} = c + \frac{1}{g^2} \left[\frac{1}{z^2} + \sum_{m,m'}' \left\{ \frac{1}{(z-\beta)^2} - \frac{1}{\beta^2} \right\} \right],$$

$$\frac{1}{\mu^2(z)} = 1 + \frac{1}{g^2 \varkappa'^2} \sum_{m,m'} \left\{ \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right\},$$

$$\frac{1}{\nu^2(z)} = 1 - \frac{1}{g^2 \varkappa'^2} \sum_{m,m'} \left\{ \frac{1}{(z-\delta)^2} - \frac{1}{\delta^2} \right\},$$

wo:

$$\alpha = \frac{\omega'}{2} + m\omega + m'\omega', \quad \beta = m\omega + m'\omega',$$

$$\gamma = \frac{\omega}{2} + m\omega + m'\omega', \quad \delta = \frac{\omega + \omega'}{2} + m\omega + m'\omega'$$

und C eine gewisse Constante bezeichnen (Alle Bezeichnungen sind die der Herren Briot und Bouquet).

In den letzten Paragraphen giebt der Verfasser die Zerlegungen der Functionen von der Form:

$$\frac{F'(z)}{F(z)}, \quad \frac{1}{F(z)}$$

(wo $F(z)$ eine der Thetafunctionen $\theta(z)$, $\theta_2(z)$, $\theta_3(z)$ bezeichnet) und zuletzt die Zerlegungen der Thetafunctionen in unendliche Producte nach dem Theorem des Hrn. Weierstrass, welche alle wegen ihrer zusammengesetzten Natur hier nicht angegeben werden können. D. Verf.

David. Développement des fonctions implicites. Journ. de l'Éc. Pol. cah. LVII. 147-170.

Es handelt sich in dieser Abhandlung um die Auflösung einer algebraischen Gleichung $f(y, x) = 0$ durch die Lagrange'sche Reihe. Bezeichnen A und B zwei Gebiete in der x- und y-Ebene, welche sich vermöge der Gleichung $f(y, x) = 0$ eindeutig umkehrbar entsprechen und keine singuläre Stelle der Gleichung enthalten, so besteht nach dem Satze von Cauchy die Gleichung

$$\varphi(y', x') = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(y, x') \cdot \frac{\frac{\partial f(y, x')}{\partial y}}{f(y, x')} dy,$$

wo $\varphi(y, x)$ eine Function bedeutet, welche für alle den Gebieten A und B angehörigen Werte von x und y stetig ist, wo ferner x', y' entsprechende Punkte der Gebiete A und B bezeichnen und die Integration durch die Berandung von B zu erstrecken ist. Aus dieser Gleichung wird die Entwickelung von $\varphi(y, x)$ in die Lagrange'sche Reihe hergeleitet. Sodann folgen Sätze über die Convergenz dieser Entwickelung, sowie die Herleitung mehrfacher Summen für $\varphi(y, x)$, welche an die Stelle der Lagrange'schen Reihe treten können. Hz.

A. Harnack. Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen. Leipz. Ber. 191-214.

Es mögen $g(x)$, $\Theta(\lambda, x)$, $\tilde{\omega}(\lambda)$ bestimmte Functionen der Argumente x, λ, ferner X eine Constante bedeuten; die Wurzeln der Gleichung $\tilde{\omega}(\lambda) = 0$ seien mit λ_1, λ_2, ... bezeichnet. Eine willkürliche Function $f(x)$ ist dann nach Heine durch die Reihe

$$(1) \qquad \sum a_\lambda \, \Theta(\lambda, x) \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

darstellbar, wobei a_λ aus der Gleichung

$$a_\lambda \int_0^X [\Theta(\lambda, x)]^2 g(x) dx = \int_0^X f(x)\, \Theta(\lambda, x)\, g(x) dx$$

zu bestimmen ist, wenn die eingeführten Functionen und Grössen gewisse Bedingungen erfüllen [F. d. M. XII. 1880. 392]. Eine dieser Bedingungen besagt, dass die Reihe (1) im allgemeinen gleichmässig convergirt, so dass ihr Integral durch gliedweise Integration gebildet werden kann, selbst wenn man die Reihe zuvor mit einer Function multiplicirt hat, die nicht unendlich wird und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Bei der Anwendung, welche Heine von seinem allgemeinen Satze auf die nach Fourier-Bessel'schen Functionen fortschreitenden Reihen gemacht hat, hat er unterlassen, den Nachweis zu führen, dass die soeben besonders hervorgehobene Bedingung in dem betrachteten speciellen Falle erfüllt ist. Die vorliegende Arbeit von Harnack ist nun bestimmt, diese Lücke auszufüllen. Die Natur der hierzu dienenden Betrachtungen, welche einen grossen Auf-

wand von Formeln erfordern, verbietet es indessen, näher auf das Detail der Untersuchung einzugehen. Eine besondere Erwähnung verdienen die literarisch-historischen Notizen, welche der Verfasser seiner Untersuchung beigefügt hat. Hz.

A. Bassani. Generalizzazione della formola di Lagrange. Ven. Ist. Atti. V. 1163-1170.

In Erweiterung der Lagrange'schen Formel hat Teixeira (Lisb. J. 1880. No. XXVIII) die Entwickelung einer beliebigen Function von z, entsprechend der Gleichung

$$z = a+x\varphi_1(z)+x^2\varphi_2(z)+\cdots,$$

nach Potenzen von x durch die Formel gegeben:

$$S(z) = S(a)+\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{x^\mu}{(\nu+1)!}D^\nu[S'(a)\varphi_{\nu-1,\mu}(a)],$$

wo $\varphi_{\nu\mu}$ aus $\varphi_{1\mu} = \varphi_\mu$ durch die Beziehung

$$\varphi_{\nu+1,\mu} = \varphi_{10}\varphi_{\nu\mu}+\varphi_{11}\varphi_{\nu,\mu+1}+\cdots+\varphi_{1\mu}\varphi_{\nu\mu}$$

hervorgeht. Analog dem Verfahren, nach welchem Hermite (Cours professé pendant le 2e semestre 1881-1882) die Lagrange'sche Reihe erschöpfend behandelt hat, beweist jetzt der Verfasser, dass die erweiterte Reihe gültig ist und in einem Umfange convergirt, innerhalb dessen $\frac{y}{z-a}<1$ ist, wo

$$y = \varphi_{10}(z)+x\varphi_{11}(z)+x^2\varphi_{12}(z)+\cdots$$ H.

S. Pincherle. Sull' inversione degli integrali definiti. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 376-379.

Als Umkehrung des bestimmten Integrals wird die Aufgabe bezeichnet, eine analytische Function $\varphi(y)$ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$\int_{(l)} A(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

genügt, worin $A(x, y)$ eine gegebene eindeutige Function, „die charakteristische Function“, von x, y ist, l eine gegebene Linie in

der Ebene der y und $f(x)$ eine für ein gewisses Flächenstück gegebene analytische Function bedeutet. Dies Problem reducirt sich auf die Bestimmung einer Function $\mathrm{A}(y, z)$, die „Reciproke der charakteristischen Function", welche der Gleichung genügt:

$$\int_{(l)} A(x, y)\,\mathrm{A}(y, z)\,dy = \frac{1}{z-x};$$

dann ergiebt der Cauchy'sche Satz unmittelbar

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} \mathrm{A}(y, z)\,f(z)\,dz,$$

wo λ eine geschlossene Linie in der Ebene der z ist. Die kurze Mitteilung, welche der Herr Verfasser über das Problem macht, behandelt namentlich den wichtigen Fall, dass die singulären Stellen der charakteristischen Function einer algebraischen Gleichung genügen. T.

S. Pincherle. Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies. Acta Math. X. 153-182.

Der Ausdruck

$$f(x) = \int_l A(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

wo die Integration längs einer Linie l vollzogen werden soll, definirt einen auf beliebige Functionen $\varphi(y)$ anwendbaren Algorithmus, dessen Charakteristik $A(x, y)$ heisst, und der hier bezeichnet wird durch

$$f(x) = A(\varphi).$$

Die gegenwärtige Arbeit behandelt das Problem der Inversion der gegebenen Operation, ausgedrückt durch

$$\varphi(y) = B(f),$$

wobei der Weg l in dem Felde T_x derselbe bleiben soll. Hierzu wird die Functionsklasse $\omega_i(y)$ von der Eigenschaft

$$\int_l \omega_i(y)\,dy = 0$$

in Betracht gezogen. Die Operation A ist distributiv und asso-

ciativ, aber nicht commutativ. Die Eigenschaft, dass $f(x)$ durch Differentiation von $\varphi(y)$ differentiirt wird, definirt eine specielle Art. Ist $A(\varphi)$ eine solche, so heisst $A(y^n)$ ein Appell'sches Polynom. Haben A und B diese Eigenschaft, so hat sie auch AB. Da Hr. Appell die Möglichkeit der Inversion jener Polynome bewiesen hat, so folgt auch die Möglichkeit der Inversion der genannten Art von $A(\varphi)$. Bedingung jener Eigenschaft ist, dass $A(x, y)$ von der Form $\Phi(x-y)$ sei. Kann man eine Function $B(y, t)$ so bestimmen, dass die Operation AB die genannte Eigenschaft, Conservation der Derivation, besitzt, so lässt sich die Function $C(x, y)$ als Reciproke der Charakteristik der Operation AB finden, und BC ist die inverse Operation zu A. Damit B die Eigenschaft besitze, hat es nur die lineare Gleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial A}{\partial x} B + \frac{\partial B}{\partial t} A = \Sigma \lambda_i(x, t)\, \omega_i(y)$$

zu erfüllen, wo die Coefficienten λ so bestimmt werden müssen, dass das resultirende B nicht x enthält. Nimmt man beispielsweise für die rechte Seite den Wert 0, so ergiebt sich als Bedingung, dass A von der Form $X(y)e^{xf(y)}$ sei, und die Lösung ist:

$$B(y, t) = \tau(y) e^{-tf(y)}.$$

Im zweiten Teile der Abhandlung werden die Eigenschaften der durch Inversion der Operation erhaltenen Function für den Fall untersucht, wo der Integrationsweg ein geschlossener Kreis ist.

H.

F. G. Teixeira. Sobre o desenvolvimento em serie das funcções de variaveis imaginarias. Teixeira J. VIII. 17-24.

Der Zweck dieser Arbeit ist, eine vom Verfasser in den Nouv. Ann. (3) V. (siehe F. d. M. XVIII. 1886. 206) gegebene Formel auf imaginäre Werte der Variabeln auszudehnen.

Tx. (Hch.)

E. Sadun. Sulla teoria delle funzioni implicite. Annali delle R. Sc. Norm. Sup. di Pisa. IV. 1-52.

Siehe F. d. M. XVII. 1885. 398-402.

Escary. Sur la représentation d'une fonction arbitraire au moyen d'une série convergente ordonnée suivant des polynômes dépendants des coordonnées elliptiques dans le plan. Ass. Franç (Toulouse.) 63-74.

— — - — —

G. Humbert. Sur les intégrales algébriques de différentielles algébriques. Acta Math. X. 281-289.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe:

Man soll entscheiden, ob das Integral $\int \varphi(x,y)dx$, wo y mit x durch eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ verbunden ist, eine algebraische Function von x (also eine rationale Function von x und y) darstellt. Die Redaction der Acta bemerkt in einer Fussnote zu dieser Arbeit, dass dieselbe Aufgabe von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen erledigt wird, und dass die Lösung, welche der Verfasser findet, nicht wesentlich von derjenigen des Herrn Weierstrass verschieden ist. Die in der Aufgabe verlangte Entscheidung wird durch folgenden Satz gegeben:

Damit $\int \varphi(x,y)dx$ sich auf eine rationale Function von x und y reducire, ist notwendig und hinreichend:

1) dass dieses Integral keine polare (logarithmische) Periode besitzt;

2) dass die Summe der polaren Perioden für jedes der Integrale

$$\int \varphi(x, y)\, G_i(x)dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

verschwindet;

3) dass die Summe der polaren Perioden für jedes der Integrale

$$\int \varphi(x, y)\, H_i(x)\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

ebenfalls verschwindet.

Dabei bedeuten $G_1, G_2, \ldots, G_p, H_1, H_2, \ldots, H_p$ $2p$ Normal-Integrale erster und zweiter Gattung des Gebildes $f(x, y) = 0$.

Man bemerkt leicht, dass dieser Satz sich unmittelbar aus der Betrachtnng der unter 2) und 3) genannten Integrale ergiebt, falls dieselben durch die Begrenzung der zu $f(x, y) = 0$ gehörenden, in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschnittenen Riemann'schen Fläche erstreckt werden. Auf eben diese Betrachtung kommt auch der Beweis des Verfassers hinaus. Nur erhält dieser Beweis dadurch ein anderes Ansehen, dass x und y als eindeutige Fuchs'sche (linear-periodische) Functionen eines Parameters t dargestellt werden, wodurch die genannten Begrenzungs-Integrale in solche übergehen, welche über den Rand des Fundamentalpolygons in der t-Ebene zu erstrecken sind.

Hz.

F. Hofmann. Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen. Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Functionentheorie. Halle. Nebert. VI u. 50 S. 8°.

Der Herr Verfasser bezeichnet selbst als den Zweck der vorliegenden Arbeit, einfache Methoden anzugeben, nach welchen eine Riemann'sche Fläche durch stetige Verzerrung identisch gemacht werden kann mit anderen, besonders charakteristisch gestalteten „Normalflächen" von einer solchen Beschaffenheit, dass sich auf ihnen die Untersuchung von topologischen Fragen besonders übersichtlich gestaltet; für welche insbesondere jener den Riemann'schen Flächen anhaftende missliche Umstand wegfällt, dass die geometrische Vorstellung durch das Auftreten von Selbstdurchdringungscurven gehindert wird; und dann weiter umgekehrt Methoden anzugeben, welche eine directe Umwandlung einer beliebig vorgegebenen geschlossenen Fläche in eine Riemann'sche (doppeltblättrige) Fläche gestatten. Kr.

H. M. Figueiredo. Superficies de Riemann. Coimbra.

Dieses Buch enthält eine Untersuchung der Methode Riemann's betreffs der vieldeutigen Functionen. In dem ersten

Capitel setzt der Verfasser die allgemeinen Principien der Theorie der vieldeutigen Functionen auseinander. Im zweiten folgt die Theorie der Flächen, die Riemann anwendet, um diese Functionen darzustellen. Im dritten und vierten Capitel werden die Integrale der Functionen complexer Variabeln, insbesondere die elliptischen Integrale, untersucht. Tx. (Hch.)

JENSEN. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. C. R. CIV. 1156-1159.

Setzt man

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty {}_n\, n^{-s},$$

so ist durch diese Gleichung $\zeta(s)$ als analytische Function von s definirt, so lange der reelle Bestandteil $\Re(s)$ von s grösser ist als 1. Wie Riemann gezeigt hat, lässt sich $\zeta(s)$ über das Gebiet $\Re(s) < 1$ hinaus fortsetzen und ergiebt sich dabei als eine in der ganzen Ebene eindeutige Function, welche nur für $s = 1$ unstetig wird wie $\frac{1}{s-1}$. In der vorliegenden Note wird zunächst dieser Satz auf elementarem Wege bewiesen. Wenn $\Re(s) > 1$ ist, so gilt die Identität

$$-1 = \sum_1^\infty {}_n\, [(n+1)^{1-s} - n^{1-s}],$$

mit deren Hülfe sich die Gleichung ergiebt:

$$(1)\qquad (s-1)\,\zeta(s)-1 = \sum_1^\infty {}_n\, n^{1-s}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-s} -1-\frac{1-s}{n}\right]$$
$$= \sum_1^\infty {}_n\, n^{1-s}\left[\frac{(s-1)s}{1.2.n^2} - \frac{(s-1)s\,(s+1)}{1.2.3.n^3} + - \cdots\right].$$

Diese Gleichung erklärt nun die Function $\zeta(s)$ für alle Werte von s, deren reeller Bestandteil $\Re(s)$ grösser ist als Null. Denn die Reihe auf der rechten Seite von (1) convergirt gleichmässig in jedem endlichen Bereiche des Gebietes $\Re(s) > 0$. Aus der Gleichung (1) folgt ferner für $\Re(s) > 0$ die Entwickelung:

$$(2)\qquad 2^{1-s} = (s-1)[\zeta(s)-1] - \frac{(s-1)s}{1.2}[\zeta(1+s)-1] + \frac{(s-1)s(s+1)}{1.2.3}[\zeta(2+s)-1] - + \cdots$$

Lässt man hier rechter Hand die ersten n Glieder fort, so bleibt eine Reihe übrig, welche gleichmässig convergirt, sobald $\Re(s) > -n$ ist. Es ergiebt sich daher aus (2) nach und nach die Erklärung von $\zeta(s)$ für alle endlichen Werte von s, indem man successive $n = 1, 2, 3, \ldots$ setzt. Die Gleichung (1) kann zur Entwickelung von $(s-1)\zeta(s)$ in eine beständig convergirende Potenzreihe der Gestalt

$$(s-1)\zeta(s) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu (s-1)^\nu$$

dienen. Der Verfasser giebt die numerischen Werte der ersten neun Coefficienten dieser Reihe bis auf neun Decimalstellen. Der Coefficient C_1 ist gleich der Mascheroni'schen Constante. Bildet man mit Riemann die Function

$$\xi(t) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s), \quad s = \tfrac{1}{2} + ti,$$

so hat die Gleichung $\xi(t) = 0$ nur reelle Wurzeln. Werden diese Wurzeln mit α bezeichnet, so findet der Verfasser die Gleichung

$$\Sigma \frac{1}{\alpha^2 + \frac{1}{4}} = 1 + \tfrac{1}{2}C_1 - \log(2\sqrt{\pi}),$$

und hieraus für die kleinste Wurzel α die Ungleichung $\alpha_1 > 6,56$. Eine weitere Annäherung ergiebt $\alpha_1 > 8,4$. Hz.

F. Casorati. Sopra le coupures del sig. Hermite, i Querschnitte e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa. Annali di Mat. (2) XV. 223-234.

Briot und Bouquet stellten in der Vorrede zur zweiten Auflage ihrer Théorie des fonctions elliptiques die Behauptung auf, dass der Begriff der mehrblätterigen Riemann'schen Flächen einige Schwierigkeiten biete, und dass dieselben trotz der

schönen Resultate, zu denen Riemann durch sie gelangt sei, für ihre Zwecke nicht von Vorteil seien. Diese Behauptungen sucht Hr. Casorati in der vorliegenden Mitteilung zu entkräften, indem er nur ein genaues Vertrautsein mit dem Begriffe der Riemann'schen Fläche für notwendig hält, um ihre Verwendbarkeit einzusehen.

Es wird nun zunächst der Unterschied zwischen den von Hrn. Hermite (J. für Math. XCI., siehe F. d. M. XIII. 1881. 307) mit dem Namen „coupures" belegten Discontinuitätslinien der Functionen und den Riemann'schen Querschnitten auseinandergesetzt, wobei der Verfasser jedoch den Ursprung des Hermite'schen Querschnittes nicht in der Betrachtung des Integrals

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt,$$

sondern bereits in den elementaren Functionen

$$z^a, \log_a z$$

suchen zu müssen glaubt, indem auch diese schon, wie das Integral $\Phi(z)$, längs des Querschnittes von Punkt zu Punkt eine veränderliche Discontinuität aufweisen.

Mit der Bemerkung, dass auch die von Cauchy (Mémoire sur les fonctions irrationnelles) eingeführten lignes d'arrêt solche Hermite'schen Querschnitte sind, geht der Verfasser näher auf den Begriff der mehrblätterigen Riemann'schen Flächen ein. Jedes Blatt ist ihm ein Netz von unendlich kleinen Maschen, deren Knoten die analytischen Punkte der Schicht (des Blattes) darstellen, d. h. die Träger der Werte der Veränderlichen sind, während jedes unendlich kleine Fadenstück, das zwei Knoten verbindet, die Continuität der Veränderung der Werte von einem Knoten zum andern zeigt. Diese Netze gehen dann längs der Verzweigungsschnitte, die übrigens eine beliebige geometrische Form haben können, auf bekannte Weise in einander über.

Bm.

Painlevé. Thèse d'Analyse. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. Paris. 136 S. 4°.

E. Goursat. Sur les fonctions à espaces lacunaires.
Darb. Bull. (2) XI. 109-114.

In den C. R. XCIV. 716 (F. d. M. XIV. 1882. 336) hat der Verfasser ein sehr allgemeines Theorem aufgestellt, welches erlaubt, eindeutige monogene Functionen zu bilden, die nur im Innern oder ausserhalb gewisser beliebig begrenzter Gebiete der Ebene existiren. Da der Beweis dieses Satzes von Herrn Lerch (Prag. Ber. 1886, F. d. M. XVIII. 1886. 330) angegriffen wurde, wird derselbe hier mit allen Details wiederholt und aufrecht erhalten. Zum Schlusse werden aus dem Theorem einige Beispiele abgeleitet. Bm.

G. Teixeira. Exemples de fonctions à espaces lacunaires.
Nouv. Ann. (3) VI. 43-45.

Ist
$$f(z) = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$
und
$$U_\mu = F_\mu(z) - \frac{1}{z-a_\mu} + (z-a_\mu-1)\left(\frac{1}{(z-a_\mu)^2} + \frac{1}{(z-a_\mu)^3} + \cdots\right),$$
und bedeuten $F_\mu(z)$ continuirliche Functionen, so ist diese Summe
$$f(z) = F_1(z) + \cdots + F_n(z),$$
wenn die Moduln von $z-a_\mu > 1$ sind, wird aber ∞, wenn sie < 1 sind; also ist $f(z)$ eine continuirliche Function in dem ganzen Bereiche der Ebene mit Ausnahme der Kreise, die um die Punkte $a_1, \ldots, a_n$ mit dem Radius 1 beschrieben sind. Die Zahl dieser Lücken wird unendlich, wenn die Reihe $f(z)$ eine convergente unendliche Reihe ist. Bm.

G. Vivanti. Ricerche sulle funzioni uniformi d'un punto analitico. Batt. G. XXV. 54-72, 232-256.

Die Arbeit knüpft an eine Abhandlung von Hrn. Appell in Acta Math. I. 109 an: Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (cf. F d. M. XV. 1883. 333), woselbst unter eindeutigen Functionen eines analytischen Punktes eindeutige Functionen zweier Veränderlichen verstanden sind, welche letzteren durch eine alge-

braische Gleichung mit einander verbunden werden. Ihre Theorie gründet sich auf die der algebraischen Functionen und der Abel'schen Integrale.

Vorzüglich zwei specielle Fälle finden hier ihre Erledigung: 1) wird vorausgesetzt, dass sämtliche Wurzeln w der erwähnten algebraischen Gleichung $F(\overset{m}{w}, \overset{n}{z}) = 0$ ganze Functionen der unabhängigen Veränderlichen z sind, oder dass endlichen Werten von z nur wieder endliche Werte von w entsprechen; 2) werden die Coefficienten der algebraischen Gleichung als reell angenommen. Zur Behandlung dieser Fragen dienen dem Verfasser hauptsächlich die Riemann'schen Anschauungen.

Nach einer eingehenden Erörterung der zur Function $F(\overset{m}{w}, \overset{n}{z}) = 0$ gehörigen Riemann'schen Fläche R und der zugehörigen Abel'schen Integrale werden die Reihen- und Productentwickelungen solcher Functionen und Eigenschaften derselben aufgestellt. Hierauf werden die unter 1) angegebenen Voraussetzungen wieder aufgenommen, wodurch sich für $F = 0$ die Form

$$f_0(z)\,w^m + f_1(z)\,w^{m-1} + \cdots + f_{m-1}(z)\,w + f_m(z) = 0$$

ergiebt, in welcher $f_\alpha(z) = 0$ Polynome vom Grade $\overline{\gtrless}\, n$ bedeuten. Macht man dann noch die Voraussetzung, dass unendlich grossen Werten von z nur wieder unendlich grosse von w entsprechen, so ergiebt sich, dass die grösste Anzahl von Verzweigungspunkten nur $(2n-m)(m-1)$ beträgt, und in Folge dessen das Geschlecht

$$p \leqq (n-1)(m-1) - \frac{m(m-1)}{2}$$

sein muss; ferner folgt unter anderem, dass, wenn man eine Function $f(z)$, die für keinen endlichen Wert von z unendlich wird, eine ganze Function nennt, jede ganze Function auf R in die Gestalt einer ganzen rationalen Function von w, z gebracht werden kann, und umgekehrt. Hat dagegen $f(z)$ auf R einen einzigen wesentlich singulären Punkt im Unendlichen, so wird sie durch eine Reihenentwickelung dargestellt, die nach Integralen zweiter Gattung fortschreitet, welche diesen Unendlichkeitspunkt zum Unstetigkeitspunkt haben. Eine solche ganze,

auf R eindeutige Function $f(z)$, die in keinem ihrer Verzweigungspunkte verschwindet, bestimmt auf R vier Systeme von Curvenzügen m_1, M_1, m_2, M_2. m_1 und M_1 treffen sich abwechselnd im Unendlichen oder in Punkten, in welchen die Tangente parallel zur x-Axe verläuft; die Curven m_2, M_2 dagegen treffen sich abwechselnd im Unendlichen oder in Punkten, deren Tangente parallel zur y-Axe ist; m_1, M_1 und m_2, M_2 bilden ein Orthogonalsystem und die Schnittpunkte $(M_1 M_2)$, $(M_1 m_2)$, $(m_1 M_2)$ sind Nullpunkte von $f'(z)$, die Punkte $(m_1 m_2)$ aber Nullpunkte von $f'(z)$ oder $f(z)$; ferner liegt auf jedem Zuge m_1 oder m_2 zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $f(z)$ eine ungerade Anzahl Nullstellen von $f'(z)$. Hieraus folgt als specieller Fall eine Erweiterung des Theorems von Rolle für die vorliegenden Functionen in der Form: Wenn eine reelle eindeutige ganze Function $f(z)$ auf R, die einen einzigen wesentlich singulären Punkt und keinen Pol besitzt, auf der x-Axe mehrere Nullpunkte hat, so hat ihre Abgeleitete zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Function eine ungerade Anzahl von Nullpunkten.

Macht man ferner die unter Nummer (2) angeführte Voraussetzung, und sind die sämtlichen reellen Verzweigungspunkte alle getrennt, so folgt zunächst, dass w in den conjugirten Punkten von R selbst conjugirte Werte besitzt, und dass die Discontinuitätspunkte eines reellen Abel'schen Integrales auf der x-Axe liegen oder zu zwei und zwei conjugirt sind.

Zum Schlusse der Abhandlung wird mit Benutzung der Eingangs aufgestellten Reihenentwickelung unter anderem der Satz bewiesen, „dass die Derivirte einer reellen eindeutigen Function auf R wieder eine eindeutige reelle Function auf R ist, wobei die singulären Punkte einer reellen eindeutigen Function auf R sich auf der x-Axe befinden oder zu zwei und zwei conjugirt sind.“ Bm.

A. Hurwitz. Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Gött. Nachr. 85-107.

Der Verfasser beschäftigt sich damit, alle irreducibeln Gleichungen $f(s, z) = 0$ zu bestimmen, welche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Transformation

$$s' = \varphi(s, z),$$
$$z' = \psi(s, z)$$

in sich übergeführt werden können, oder alle diejenigen Riemann'schen Flächen anzugeben, auf welchen eine eindeutige algebraische Correspondenz $(s, z; s', z')$ existirt. Es ergeben sich hierbei hauptsächlich folgende Resultate:

1) Jedes algebraische Gebilde, welches eine ein-eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzt, lässt sich durch eine Gleichung $F(s^n, z)$ definiren, und zwar so, dass die eindeutige Transformation durch die Gleichungen $s' = e^{\frac{2i\pi}{n}}.s$ $z' = z$ gegeben sind.

2) Die Periode n ist $\leqq 10(p-1)$.

3) Besitzt eine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p eine eindeutige Transformation in sich, deren Periode $n > 2(p-1)$ ist, so lässt sie sich durch

$$s = \sqrt[n]{z^a(z-1)^b(z-k)^c}$$

definiren, und ist $n > 4(p-1)$, so kann sie durch

$$s = \sqrt[n]{z^a(z-1)^b}$$

dargestellt werden; a, b, c sind positiv und $< n$.

4) Jede eindeutige Transformation eines algebraischen Gebildes in sich ist periodisch.

An die Beweise dieser Sätze schliesst sich die Aufstellung eines allgemeinen Satzes über Correspondenzen an, der für die zur Riemann'schen Fläche gehörigen ϑ-Functionen wichtig ist, sowie die Behandlung der Aufgabe: alle Riemann'schen Flächen eines gegebenen Geschlechtes p zu bestimmen, welche eine eindeutige Transformation in sich zulassen. Zum Schlusse wird noch das gewissermassen umgekehrte Problem behandelt: wenn eine endliche Gruppe von N Operationen gegeben ist, diejenigen algebraischen Gebilde aufzustellen, welche eine Gruppe ein-

deutiger Operationen in sich besitzen, die mit jener Gruppe von N Operationen holoëdrisch isomorph ist.

An den Aufsatz schliesst sich ein Nachtrag polemischer Natur an, in welchem der Verfasser einen von ihm an Herrn Fuchs gerichteten Brief zum Abdruck bringt. Bm.

L. Fuchs. Bemerkungen zu einer Note des Herrn Hurwitz. Gött. Nachr. 502-504.

Der Verfasser giebt hier eine Erwiderung auf den Nachtrag zu der vorstehend besprochenen Abhandlung des Herrn Hurwitz.

Red.

L. Fuchs. Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen, und über eine Anwendung desselben auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Berl. Ber. 159-166.

Die vorliegende Note enthält einige Berichtigungen der in den Berl. Ber. 1886 p. 797 f. (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 362) aufgestellten Sätze, indem angegeben wird, dass dort stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden sei, dass zwischen den Perioden πi und $a_{k,l}$ der Normalintegrale erster Gattung keine Relation mit ganzzahligen Coefficienten stattfinde, was sich daraus ergiebt, dass in einem gewissen (unter (K) angegebenen) Gleichungssystem für sämtliche Gleichungen gleichzeitig entweder das positive oder das negative Zeichen gelten muss. Dabei wird auf eine Arbeit von Hurwitz in den Ber. d. K. sächs. G. d. W. vom 11. Januar 1886 (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 626) hingewiesen und bemerkt, dass die Involution unter obiger Voraussetzung eine Wertigkeitscorrespondenz sei. Ferner wird, anschliessend an die in der erwähnten Note enthaltenen Sätze über die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, nachgewiesen, dass sich die Riemann'sche Fläche (s, z), in welcher die Coefficienten der Differentialgleichung

rational bestimmt sind, durch eine rational eindeutig umkehrbare Substitution in eine andere (t, u) von der Beschaffenheit transformiren lässt, dass t^2, u^2 eindeutige Functionen des Quotienten ζ eines Fundamentalsystemes von Integralen werden, und dass zwei algebraische Gleichungen daselbst identisch zu befriedigen sind. Diese Resultate bleiben auch für den Fall bestehen, dass zwischen den Perioden πi und $a_{k,l}$ Relationen mit ganzzahligen Coefficienten stattfinden (der Fall der singulären Flächen von Hurwitz).

Bezüglich dieser Arbeit vergleiche man die Arbeit von Hurwitz: Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen (s. oben S. 396ff.) Bm.

F. Klein. Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. Math. Ann. XXVII. 106-142.

Siehe Abschn. IX. Capitel 3D.

M. Noether. Ueber die totalen algebraischen Differentiale. Math. Ann. XXIX. 339-381.

Siehe Abschn. IX. Capitel 3B.

Stickelberger. Ueber einen Satz des Herrn Noether. Math. Ann. XXX. 401-409.

M. Noether. Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. XXX. 410-417.

Bezeichnen f, φ, ψ gegebene ganze rationale Functionen von x und y, so giebt der Noether'sche Satz ein Kriterium dafür, dass eine Gleichung der Gestalt

$$f = A\varphi + B\psi$$

besteht, wo A und B ebenfalls ganze rationale Functionen von

x und y bedeuten. Der Noether'sche Satz besagt, dass eine solche Gleichung statt hat, wenn sich für jede Schnittstelle $x = x_0$, $y = y_0$ der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die Function f in die Form

$$f = A'\varphi + B'\psi$$

bringen lässt, unter A', B' Potenzreihen von $x-x_0$, $y-y_0$ verstanden.

Herr Stickelberger beweist diesen Satz auf functionentheoretischem Wege. Die Hülfssätze, welche dabei zur Anwendung kommen und welche in sehr einfacher Weise begründet werden, schliessen sich an Sätze von Weierstrass und Hermite an.

Herr Noether giebt zwei neue Beweise seines Satzes. Der erste beruht auf der Zurückführung des allgemeinen Falles auf den in einer Note des Herrn Voss (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 348) erledigten einfachen Fall, wo die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sich an jeder Stelle, wo $\varphi = 0$ einen k-fachen, $\psi = 0$ einen l-fachen Punkt besitzt, genau in $k.l$ Punkten schneiden. Der zweite Beweis führt das für den allgemeinen Fall von Herrn Voss gegebene Kriterium auf das Kriterium des Noether'schen Satzes zurück. Hz.

O. Stolz. Bemerkungen zur Theorie der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.
Innsbr. Ber. 5 S.

Der Verfasser bemerkt zuerst, dass sich die Bedingung, unter welcher eine eindeutige Function $f(x, y)$ einen bestimmten Grenzwert c erhält, während x und y unabhängig von einander zu den endlichen Grenzwerten a und b convergiren, folgendermassen formuliren lässt: Es muss $f(a+r\cos\varphi, b+r\sin\varphi)$ bei $\lim r = 0$ gleichmässig für alle Werte von φ im Intervalle $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ zum Grenzwert c convergiren. Hieran knüpft sich ein Beweis des folgenden von Peano aufgestellten Satzes: Sind F und Φ ganze Functionen von x und y, welche für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden, und bilden die Glieder niedrigster Dimension von Φ eine definite Form, deren Ordnung kleiner ist als die Ordnung der Glieder niedrigster Dimension von F, so ist

$\lim\limits_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{F}{\Phi} = 0$. Es folgt die Begründung eines bei dem Beweise des letzten Satzes benutzten Hülfssatzes, nach welchem die Werte einer definiten Form von $x_1, x_2, \ldots, x_r$, absolut genommen, nicht unter einer positiven Zahl λ liegen, wenn die Variabeln der Bedingung $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2=1$ unterworfen werden. Der Schluss der Mitteilung bezieht sich auf folgende Bemerkung des Herrn Thomae: Wenn eine eindeutige stetige Function $f(x, y)$ an der Stelle $x=a$, $y=b$ endliche partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$ besitzt, so folgt hieraus nicht die Existenz eines vollständigen Differentials an jener Stelle. D. h., wenn man

$$f(a+h, b+k)-f(a, b) = h\frac{\partial f}{\partial a}+k\frac{\partial f}{\partial b}+h\varrho+k\sigma$$

setzt, so ist nicht notwendig $\lim\limits_{h=0,k=0}\varrho = \lim\limits_{h=0,k=0}\sigma = 0$. Nach Herrn Thomae ist zur Existenz eines vollständigen Differentials notwendig, dass $\frac{f(a+r\cos\varphi, b+r\sin\varphi)-f(a, b)}{r}$ bei $\lim r=0$ gleichmässig für alle Werte von φ im Intervalle $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ zum Grenzwert $\frac{\partial f}{\partial a}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial b}\sin\varphi$ convergire. Herr Stolz zeigt, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Hz.

O. Biermann. Ueber das algebraische Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $(n+1)$ Grössen. Wien. Ber. XCV. 802-824.

Der Verfasser versucht die Grundlagen der Theorie der algebraischen Functionen von n unabhängigen Veränderlichen zu entwickeln. Dieser Versuch ist indessen nicht gelungen. Wird y als Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Gleichung $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ definirt, so bezeichnet man die Gesamtheit der Wertsysteme $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche dieser Gleichung genügen, als algebraisches Gebilde, jedes einzelne Wertsystem als eine Stelle des Gebildes. Es handelt sich nun zuerst darum, die in der Umgebung einer fest angenommenen Stelle liegenden

Stellen durch Potenzreihen von n unabhängigen Parametern darzustellen. Die Betrachtungen des Verfassers, welche diese Aufgabe erledigen sollen, haben indessen nur Kraft für den Fall, dass für die betreffende Stelle die Glieder niedrigster Dimension in der Entwickelung von F in Linearfactoren zerlegbar sind. Die Note enthält des weiteren einige Bemerkungen über die in Bezug auf die Gleichung $F=0$ betrachteten rationalen Functionen von $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hz.

F. Meyer. Zur Theorie der reduciblen ganzen Functionen von n Variablen. Math. Ann. XXX. 30-74.

Der Untersuchung liegt die folgende Fragestellung zu Grunde: Sind $f_0, f_1, \ldots, f_d$ gegebene ganze Functionen von dem m^{ten} Grade in der Variabeln λ, so soll man alle ganzen Functionen $u_0, u_1, \ldots, u_d$ der Parameter $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ bestimmen, für welche der Ausdruck

$$u_0 f_0 + u_1 f_1 + \cdots + u_d f_d$$

einen in λ linearen Teiler besitzt (§ I). Dieses Problem wird schrittweise auf das einfachere zurückgeführt: alle solchen Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d$ der einen Variabeln μ zu finden, für welche der Ausdruck

$$\varphi_0(\mu)f_0(\lambda) + \varphi_1(\mu)f_1(\lambda) + \cdots + \varphi_d(\mu)f_d(\lambda)$$

den speciellen Teiler $\lambda-\mu$ zulässt (§ II). Die letztere Aufgabe ist offenbar gelöst, sobald man alle ganzen Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d$ der Variabeln λ kennt, welche der Identität

$$\varphi_0(\lambda)f_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda)f_1(\lambda) + \cdots + \varphi_d(\lambda)f_d(\lambda) = 0$$

genügen. Der Verfasser postulirt nunmehr die Existenz eines Systems von d fundamentalen Identitäten

$$F^{(1)} \equiv \varphi_0^{(1)}(\lambda)f_0(\lambda) + \varphi_1^{(1)}(\lambda)f_1(\lambda) + \cdots + \varphi_d^{(1)}(\lambda)f_d(\lambda) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(d)} \equiv \varphi_0^{(d)}(\lambda)f_0(\lambda) + \varphi_1^{(d)}(\lambda)f_1(\lambda) + \cdots + \varphi_d^{(d)}(\lambda)f_d(\lambda) = 0,$$

welches die Eigenschaft besitzt, dass zwischen den linken Seiten keine Relation von der Gestalt

$$\alpha^{(1)}F^{(1)} + \alpha^{(2)}F^{(2)} + \cdots + \alpha^{(d)}F^{(d)} = 0$$

stattfindet, wo $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(d)}$ ganze Functionen von λ sind, und dass ferner

$$\nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \cdots + \nu^{(d)} = m$$

wird, wo allgemein $\nu^{(i)}$ den gemeinsamen Grad der Functionen $\varphi_0^{(i)}, \varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_d^{(i)}$ bezeichnet. Mit Hülfe dieses Postulates ergiebt sich leicht, dass ein jedes System von gesuchten Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sich in die Gestalt

$$\varphi_i = \alpha^{(1)}\varphi_i^{(1)} + \alpha^{(2)}\varphi_i^{(2)} + \cdots + \alpha^{(d)}\varphi_i^{(d)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, d)$$

bringen lässt, wo $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(d)}$ ganze Functionen von λ sind. In Folge dieser Thatsache ist insbesondere eine genaue Abzählung der Mannigfaltigkeit der Lösungen obiger Identität möglich (§ III). Die weiteren Entwickelungen greifen auf das ursprüngliche Problem zurück und ziehen auch den Fall in Betracht, in welchem zwischen den Parametern $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ beliebige algebraische Relationen stattfinden (§ IV - § V). Zur Erläuterung dient der Fall zweier Variabeln, wo sich die Mannigfaltigkeitszahl der Lösungen in zwei unter gewissen Bedingungen zusammenfallende Grenzen einschliessen lässt (§ VI). Zum Schlusse dieses Abschnittes grenzt der Verfasser den Gültigkeitsbereich der angegebenen Methoden ab und erörtert zugleich die Schwierigkeiten, welche eintreten, wenn man verlangt, dass der Ausdruck

$$u_0 f_0 + u_1 f_1 + \cdots + u_n f_n$$

einen Teiler von höherem Grade in λ besitzt (§ VII).

Ein zweiter Abschnitt behandelt speciell den dreigliedrigen Ausdruck

$$u_0 f_0(\lambda) + u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda).$$

Der Verfasser discutirt der Reihe nach die Fälle $m = 2, 3, \ldots, 9$ und findet für dieselben in der That das obige Postulat zutreffend. Zur wirklichen Aufstellung der fundamentalen Identitäten dient ein Verfahren, welches zugleich zeigt, dass der eigentliche Kern des behandelten Problems der Theorie der Combinanten mit mehreren binären cogredienten Variabelnreihen angehört. Zum Schlusse finden die gewonnenen Resultate eine geometrische Deutung. Ht.

L. KÖNIGSBERGER. Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. (Festschrift zum 500jährigen Jubiläum der Universität Heidelberg.) J. für Math. C. 121-136, CI. 1-72, Münch. Ber. 1885. 462-468.

Diese umfangreiche Abhandlung ist der Erledigung folgender Frage gewidmet: „Giebt es ausser den Integralen algebraischer Functionen und deren Umkehrungen noch andere Functionen, deren Werte für n von einander unabhängige Argumente in algebraischem Zusammenhange mit weniger als n Werten eben dieser Functionen für algebraisch von jenen n Variabeln abhängige Argumente und jenen Argumenten selbst stehen?"

Es handelt sich also um die Bestimmung aller Functionen $f(x)$, für welche eine algebraische Gleichung der Gestalt

$$(1)\quad F(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_p), x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

besteht, wobei $x_1, x_2, \dots, x_n$ unabhängige Argumente, $y_1, y_2, \dots, y_p$ algebraische Functionen dieser Argumente bedeuten und $p < n$ ist. Wie leicht zu erkennen ist, darf man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Zahl n gleich $p+1$ annehmen.

Der Verfasser betrachtet nun zuerst den Fall $p = 1$, $n = 2$. Es ergeben sich hier aus der Voraussetzung, dass eine Gleichung der Form (1) statthat, nach und nach die Sätze:

„Die Function $f(x)$ muss das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten ist."

„Diese Differentialgleichung muss sich durch eine in der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraische Substitution aus der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = m \cdot \sqrt{\frac{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}$$

ableiten lassen; einen Ausnahmefall bilden allein die Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)\,\chi(z)$$

für die beiden Fälle, dass $\int \frac{dz}{\chi(z)}$ eine algebraische Function und $\int \omega(x)dx$ ein nur algebraisch unstetig werdendes elliptisches Integral ist, oder $\int \frac{dz}{\chi(z)}$ den Logarithmus einer algebraischen Function darstellt, während $\int \omega(x)dx$ ein elliptisches Integral mit nur logarithmischen Unstetigkeiten bedeutet."

In allen Fällen dürfen die Functionen, welche einem Functionaltheorem unterliegen, als algebraische Verbindungen algebraischer, logarithmischer und elliptischer Functionen bezeichnet werden.

Es folgt nun die Untersuchung des Falles $p = 2$, $n = 3$. Hier zeigt sich zunächst, dass die Function $f(x)$ Lösung einer algebraischen Differentialgleichung erster oder zweiter Ordnung sein muss. Der Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung führt zu Functionen $f(x)$, welche im wesentlichen auf die Abel'schen Integrale des Geschlechtes $p = 2$ zurückkommen. Dagegen ergiebt die Discussion der Annahme, $f(x)$ genüge einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, das Resultat, dass die Lösung einer solchen Differentialgleichung nie ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen kann.

Für einen beliebigen Wert von p lassen sich nun ganz ähnliche Schlüsse anwenden, wie sie ausführlich für $p = 1$ und $p = 2$ entwickelt wurden. Und so gelangt der Verfasser zu dem allgemeinen Satze, welcher die von ihm aufgeworfene Frage beantwortet:

„Die einzigen Functionen einer Variabeln, deren Werte für n von einander unabhängige beliebige Variable in algebraischem Zusammenhange mit weniger als n Werten eben dieser Function für algebraisch von jenen n Variabeln abhängige Argumente stehen, sind im wesentlichen die Integrale algebraischer Functionen, für welche das Abel'sche Theorem jenen Zusammenhang feststellt."

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass sich im Verlaufe der Untersuchung eine Reihe von Sätzen ergiebt, die an sich

von Interesse sind. Als Beispiel möge hier der folgende Satz eine Stelle finden: „Alle Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulären Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten ist, lassen sich durch (in der abhängigen und unabhängigen Variabeln) algebraische Substitutionen aus linearen Differentialgleichungen ableiten."

Der Verfasser beschäftigt sich endlich auf den letzten Seiten der Abhandlung mit der Ausdehnung der erhaltenen Resultate auf Functionen mehrerer Veränderlichen. Es werden hier die beiden Fälle untersucht, in welchen es sich nur um eine Function mehrerer Variabeln, resp. um Systeme von Functionen mehrerer Variabeln handelt. Die Betrachtung des letzteren Falles wird durch die Form des Additionstheorems der Abel'schen Functionen nahe gelegt. In beiden genannten Fällen gelangt der Verfasser wiederum zu dem Resultate, dass es im wesentlichen nur die Abel'schen Integrale und ihre Umkehrungsfunctionen sind, welche Functionaltheoreme der betrachteten Art besitzen.

Hz.

Dixon. On Abel's theorem. Quart. J. XXII. 200-204.

Wenn auf einer algebraischen Curve ein α-fach unendliches System von Punktgruppen durch eine lineare Curvenschar ausgeschnitten wird, so kann man von den μ Punkten einer Gruppe $\mu-\alpha$ vermöge algebraischer Gleichungen durch die übrigen α Punkte bestimmen. Es wird nun durch Constantenabzählungen untersucht, wann sich diese algebraischen Gleichungen durch die Gleichungen des Abel'schen Theorems ersetzen lassen. Die Resultate sind, wenn auch in etwas anderer Form, bekannt. Auf Seite 201 der Note ist in der sechsten Zeile „greater" in „less" zu verbessern.

Hz.

S. Pincherle. Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari. Rom. Acc. L. Rend (4) III. 370-375.

Es werden analytische Ausdrücke construirt zur Darstellung eindeutiger Functionen mit unendlich vielen singulären Stellen, die als Wurzeln der Gleichungen

$$f(x, \alpha_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

gegeben sind, wo $f(x, y)$ eine ganze Function von x und y,

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \ldots$$

und $\lim\limits_{\nu=\infty} \alpha_\nu = \infty$ ist. Hr.

S. PINCHERLE. Sul confronto delle singolarità di due funzioni analitiche. Rom. Acc. L. Rend. (4) III₂. 310-315.

Zwei ganze Functionen $G(x)$, $G_1(x)$ heissen „ähnlich", wenn man zwei Functionen $a(x)$, $b(x)$ finden kann, welche rationalen Charakter in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ besitzen und die folgende Gleichung befriedigen:

$$G_1(x) = a(x)G(x) + b(x).$$

Diese Relation ist umkehrbar, denn es ist:

$$G(x) = \frac{1}{a(x)}\, G_1(x) - \frac{b(x)}{a(x)}.$$

Will man erkennen, ob zwei vorgegebene ganze Functionen $G(x)$, $G_1(x)$ ähnlich sind, und bejahendenfalls die Function $a(x)$ auffinden (wonach sich die Function $b(x)$ von selbst bestimmt), so nehme man eine unendliche Reihe von Zahlen s_1, s_2, ..., die sämtlich grösser als eine willkürliche Grösse R sind und der Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{G_1(s_n)}{s_n^p} = \infty$$

für jede positive Zahl p genügen. Setzt man dann:

$$\lim_{n=\infty} \frac{G_1(s_n)}{s_n^m G(s_n)} = a_0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^r \left[G_1(s_n) - s_n^m \left(a_0 + \frac{a_1}{s_n} + \frac{a_2}{s_n^2} + \cdots + \frac{a_{r-1}}{s_n^{r-1}}\right) G(s_n)\right]}{s_n^m G(s_n)} = a_r,$$

$$(r = 1, 2, \ldots)$$

und existiren die Grenzwerte $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ so ist $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{m+r}$ die gesuchte Function $a(x)$, wenn eine solche Function überhaupt existirt.

Zwei analytische Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, welche in einem Gebiete A rationalen Charakter haben, heissen „ähnlich", wenn es zwei Functionen $a(x)$, $b(x)$ giebt, die rationalen Charakter ausserhalb A und auf dessen Begrenzung besitzen und die Gleichung:

$$f_1(x) = a(x)f(x) + b(x)$$

befriedigen. Auch diese Relation ist umkehrbar. Vi.

V. Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) III$_2$. 97-105, 141-146, 153-158.

Ist eine Function $\varphi(x)$ in einem Intervalle $A \ldots B$ bekannt, und hängt y von sämtlichen Werten von $\varphi(x)$ ab, so heisst y eine „Functionsfunction", und wird durch

$$y = y \,|[\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}})]|$$

bezeichnet. Hängt allgemeiner y von den sämtlichen Werten der im Intervalle $A_1 \ldots B_1$ gegebenen Function $\varphi_1(x)$, der im Intervalle $A_2 \ldots B_2$ gegebenen Function $\varphi_2(x), \ldots,$ sowie von den Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots$ ab, so schreibt man

$$y = y\,|[\varphi_1(\overset{B_1}{\underset{A_1}{x}}),\ \varphi_2(\overset{B_2}{\underset{A_2}{x}}),\ \ldots,\ t_1,\ t_2,\ \ldots]|.$$

Die Functionen φ können, statt in je einem Intervalle gegebene Functionen einer Variabeln, in je einem n-dimensionalen Gebiete gegebene Functionen von n Variabeln sein. Jedenfalls werden diese Functionen als stetig vorausgesetzt.

Erteilt man der Function $\varphi(x)$ eine Variation $\psi(x)$, und kann man die obere Grenze des absoluten Wertes von $\psi(x)$ im Intervalle $A \ldots B$ so klein annehmen, dass die entsprechende Veränderung von y kleiner als eine willkürlich gegebene Grösse ausfällt, so sagt man, y sei „stetig".

Die Begriffe der Ableitung und des Differentiales finden ihre Analoga in der Theorie der Functionsfunctionen, wie aus Folgendem erhellt.

Giebt man erstens der Function $\varphi(x)$ auf einem innerhalb $A \dots B$ liegenden Intervalle h eine stetige Variation $\theta(x)$, welche ihr Vorzeichen längs dieses Intervalles nicht ändert und absolut kleiner ist als eine Grösse ε, und setzt voraus:

a) dass $\frac{\delta y}{\varepsilon h}$ (wo δy die Veränderung von y bezeichnet) stets kleiner als eine endliche Grösse M ist;

b) dass bei unbeschränkter Verkleinerung von ε, h, wobei jedoch h einen gewissen Punkt t stets enthalten muss, $\frac{\delta y}{\sigma}$ [wo $\sigma = \int_m^n \theta(x)dx$] nach einer bestimmten endlichen Grenze convergirt, und zwar gleichmässig für alle möglichen Functionen φ und Punkte t; dann hängt $\lim \frac{\delta y}{\sigma}$ von $\varphi(x)$ und t ab, und kann als die „erste Ableitung“ von y:

$$y' \,|\, [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}}),\ t] \,|$$

bezeichnet werden. Wir nehmen an, sie sei stetig in Bezug auf $\varphi(x)$ und t.

Giebt man zweitens der Function $\varphi(x)$ auf dem ganzen Intervalle $A \dots B$ eine stetige Variation $\delta\varphi(x) = \varepsilon \,.\, \psi(x)$, und ist Δy die entsprechende Veränderung von y, so heisst

$$\delta y = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

die „erste Variation“ von y, und es ist:

$$(1) \qquad \delta y \,|\, [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}})] \,| = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x),\ t] \,|\, \delta\varphi(t)\,dt.$$

Wendet man den Ableitungs- bezw. Variationsprocess wiederholt an, so erhält man die n^{te} Ableitung bezw. Variation;

$$y^{(n)} = y^{(n)} \Big| [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}}), t_1, t_2, \ldots, t_n] \Big|,$$

$$\delta^n y = \varepsilon^n \left(\frac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}$$

$$= \varepsilon^n \left(\int_A^B\right)^{(n)} \prod_{i=1}^{n} \psi(t_i) y^n \Big| [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}}), t_1, t_2, \ldots, t_n] \Big| dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

Man beweist, dass $y^{(n)}$ in Bezug auf die Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_n$ symmetrisch ist; darauf wird die Taylor'sche Formel auf unsere Functionen ausgedehnt, wobei aber nicht die Ableitungen, sondern die Variationen erscheinen.

Ist die Bedingung a) nicht erfüllt, so ist die Formel (1) nicht mehr unbedingt gültig. Unter der Voraussetzung, dass dieses nur in der Umgebung eines einzigen Punktes x_1 (oder einer endlichen Anzahl von Punkten) geschieht, untersucht der Verfasser folgende drei Fälle:

1. Bezeichnet h eine Umgebung von x_1, und genügt die Veränderung $\varDelta y$ von y für eine Veränderung von $\varphi(x)$, welche absolut kleiner als ε ist, der Bedingung:

$$\lim_{h=0,\,\varepsilon=0} \frac{\varDelta y}{\varepsilon} = 0,$$

dann behält die Formel (1) ihre Gültigkeit bei.

2. Ist ϱ der Wert der Veränderung im Punkte x_1, und findet die Relation:

$$\lim_{h=0,\,\varepsilon=0} \frac{\varDelta y}{\varepsilon} = a_1 \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varrho}{\varepsilon}$$

statt, wo a_1 eine bestimmte endliche Grösse ist, so geht (1) in:

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi(t)\, dt + a_1 \delta\varphi(x_1)$$

über; man kann auch $y'_{\varphi(x_1)} \Big| [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}})] \Big|$ statt a_1 schreiben, um anzudeuten, dass a_1 von $\varphi(x)$ und von x_1 abhängt. Wir sagen, dass y in diesem Falle, ausser von den Werten von $\varphi(x)$ im ganzen Intervalle $A \ldots B$, auch noch „besonders" von $\varphi(x_1)$ abhängt, was durch die Schreibweise:

$$y = y \Big| [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}})] \Big| = y \Big| [\varphi(\overset{B}{\underset{A}{x}})] \Big| (\varphi(x_1))$$

ausgedrückt werden mag.

3. (Dieser Fall schliesst 2. als besonderen Fall ein.) Man erteile der Function $\varphi(x)$ eine Veränderung, welche samt ihren Differentialquotienten der 1ten, 2ten, ..., m_1^{ten} Ordnung absolut kleiner als ε in der Umgebung h von x_1 ist, und bezeichne durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{m_1}$ die Werte dieser Functionen im Punkte x_1. Ist dann:

$$\lim_{h=0, \varepsilon=0} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = \sum_{p=0}^{m_1} a_p k_p,$$

wo $k_p = \lim\limits_{\varepsilon=0} \frac{\varrho_p}{\varepsilon}$, und die a_p bestimmte endliche Grössen sind, die auch durch $y'_{\varphi^{(p)}(x_1)} | [\varphi^{(p)}(x)] |$ bezeichnet werden können, so ist:

$$\delta y = \int_A^B y' | [\varphi(x), t] | \, \delta\varphi(t) dt + \sum_{p=0}^{m_1} a_p \, \delta\varphi^{(p)}(x_1).$$

Auf die im letzten Paragraphen behandelten interessanten Beispiele können wir nicht eingehen. Vi.

V. Volterra. Sopra le funzioni dipendenti da linee. Rom. Acc. L. Rend. (4) III_2. 225-230, 274-281.

Die „Linienfunctionen" bilden gewissermassen eine geometrische Veranschaulichung der vom Verfasser untersuchten Functionsfunctionen (s. den vorangehenden Bericht). Ordnet man jeder möglichen geschlossenen Linie L eines ebenen oder räumlichen Gebietes einen Wert zu, wobei jeder Linie eine bestimmte Richtung zukommt, so bildet der Inbegriff dieser Werte eine Linienfunction, welche durch die Bezeichnung:

$$\varphi = \varphi | [L] |$$

dargestellt wird.

Führt man ein Stück $l = AB$ der Linie L_1, welcher der Wert φ_1 von φ entspricht, durch eine zu x parallele Verschiebung, deren Grösse ε sei, in CD über, und verwandelt sich φ_1 zufolge der Ersetzung von AB durch $ACDB$ in $\varphi_1 + \Delta_x\varphi$, so heisst:

$$\lim_{\varepsilon=0, l=0} \frac{\Delta_x\varphi}{\varepsilon l} = X,$$

wenn dieser Grenzwert überhaupt existirt, die „Ableitung" von φ in Bezug auf x, und wird durch $X\,|\,[L, s]\,|$ bezeichnet, wo s die (von einem willkürlichen Ursprung aus gemessene) Bogenlänge eines festen Punktes von L bedeutet, der bei jeder Verkleinerung von l innerhalb dieses Bogens liegen muss. Desgleichen werden die Ableitungen $Y\,|\,[L, s]\,|$, $Z\,|\,[L, s]\,|$ definirt.

Sind die Punkte (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) zweier Curven L, L_1, denen die Functionswerte φ, φ_1 entsprechen, eindeutig auf einander bezogen, und ist:

$$x_1 - x = \delta x = \varepsilon\xi, \quad y_1 - y = \delta y = \varepsilon\eta, \quad z_1 - z = \delta z = \varepsilon\zeta,$$
$$\varphi_1 - \varphi = \Delta\varphi,$$

so heisst:

$$\delta\varphi = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta\varphi}{\varepsilon}$$

die „Variation" von φ. Man findet:

$$\delta\varphi = \int_L \{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\}\, ds.$$

Zwischen den Ableitungen X, Y, Z besteht die Relation

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

wo α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente zu L sind; woraus folgt, dass man immer setzen kann:

$$X = \gamma B - \beta C, \quad Y = \alpha C - \gamma A, \quad Z = \beta A - \alpha B.$$

Diese Gleichungen bestimmen sogar nicht eindeutig A, B, C, denn sie werden ebenfalls durch $A + k\alpha$, $B + k\beta$, $C + k\gamma$ für willkürliches k befriedigt.

Setzen wir voraus, zwei Linien L_1, L_2 haben ein gemeinschaftliches Stück, welches entgegengesetzte Richtungen besitzt, jenachdem es als zu der ersten oder der zweiten Linie gehörend angesehen wird. Die übrig bleibenden Teile von L_1, L_2 bilden zusammengenommen eine einzige Linie, welche durch $L_1 + L_2$ bezeichnet werden kann. Ist nun φ eine solche Linienfunction, dass:

$$\varphi\,|\,[L_1 + L_2]\,| = \varphi\,|\,[L_1]\,| + \varphi\,|\,[L_2]\,|,$$

so heisst φ eine „einfache" Linienfunction.

Ist φ eine einfache Linienfunction in einem räumlichen Gebiete, so entsprechen jedem Punkte dieses Gebietes drei Werte

M, N, P, welche für sämtliche durch jenen Punkt gehende Linien statt A, B, C gesetzt werden können.

Bezeichnet Σ eine einfach zusammenhängende Fläche, deren Begrenzung L ist, M einen Punkt von Σ und n die Normale zu Σ in diesem Punkte, und verkleinert man Σ und L unbeschränkt, jedoch derart, dass Σ den Punkt M durchgängig enthält, so kann man setzen:

$$\lim \frac{\varphi\,|\,[L]\,|}{\Sigma} = P\cos nx + Q\cos ny + R\cos nz;$$

die Grössen P, Q, R werden bezw. durch $\frac{\partial\varphi}{\partial(yz)}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial(zx)}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial(xy)}$ bezeichnet und genügen der Gleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Man kann demnach zwei Functionen λ, μ bestimmen, die den Gleichungen:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y} = P,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z} = Q,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x} = R$$

genügen; μ ist eine Lösung von:

$$P\frac{\partial\mu}{\partial x} + Q\frac{\partial\mu}{\partial y} + R\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0,$$

und λ wird durch:

$$\lambda = \int \frac{1}{\frac{\partial\mu}{\partial z}}(P\,dy - Q\,dx) + f(\mu)$$

gegeben. Setzt man:

$$\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x} = a, \quad \lambda\frac{\partial\mu}{\partial y} = b, \quad \lambda\frac{\partial\mu}{\partial z} = c,$$

so ist:

$$\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = R,$$

$$\varphi\,|\,[L]\,| = \int_L (a\,dx + b\,dy + c\,dz) = \int_L \lambda\,d\mu.$$

Vi.

V. Volterra. Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse. Nota I. Rom. Acc. L. Rend. (4) III₂. 281-287.

Eine glückliche Anwendung der „Theorie der Linienfunctionen" (s. den vorangehenden Bericht) ist folgende. Seien F, Φ zwei „einfache Linienfunctionen" in einem räumlichen Gebiete, L eine Linie, welcher die Werte F, Φ dieser Functionen zukommen mögen, ΔF, $\Delta\Phi$ die Veränderungen von F, Φ für eine Deformation eines einen bestimmten Punkt M enthaltenden Linienstückes. Ist bei unbeschränkter Verkleinerung der Deformation und der Länge des deformirten Bogens der Grenzwert von $\frac{\Delta\Phi}{\Delta F}$ bestimmt und nur von der Lage des Punktes M abhängig, so sagt man, die Functionen F, Φ seien „im Riemann'schen Sinne mit einander verbunden."

Setzt man:

$$F = F_1 + iF_2, \quad \Phi = \Phi_1 + i\Phi_2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F_t}{\partial(yz)} = p_t, \quad \dfrac{\partial F_t}{\partial(zx)} = q_t, \quad \dfrac{\partial F_t}{\partial(xy)} = r_t, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_t}{\partial(yz)} = \varpi_t, \quad \dfrac{\partial \Phi_t}{\partial(zx)} = \chi_t, \quad \dfrac{\partial \Phi_t}{\partial(xy)} = \varrho_t\end{array}\right\} \quad (t = 1,\ 2)$$

$$p_1^2 + p_2^2 = E_{11}, \quad q_1^2 + q_2^2 = E_{22}, \quad r_1^2 + r_2^2 = E_{33},$$

$$q_1 r_1 + q_2 r_2 = E_{23} = E_{32}, \quad r_1 p_1 + r_2 p_2 = E_{31} = E_{13}, \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = E_{12} = E_{21},$$

$$q_2 r_1 - q_1 r_2 = D_1, \quad r_2 p_1 - r_1 p_2 = D_2, \quad p_2 q_1 - p_1 q_2 = D_3,$$

so finden die folgenden Gleichungen statt:

$$\varpi_2 = \frac{E_{12}\varrho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{13}\varpi_1 - E_{11}\varrho_1}{D_2} = \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\varpi_1}{D_3},$$

$$\chi_2 = \frac{E_{22}\varrho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{23}\varpi_1 - E_{21}\varrho_1}{D_2} = \frac{E_{21}\chi_1 - E_{22}\varpi_1}{D_3},$$

$$\varrho_2 = \frac{E_{32}\varrho_1 - E_{33}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{33}\varpi_1 - E_{31}\varrho_1}{D_2} = \frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\varpi_1}{D_3}.$$

Die Grösse:

$$\Theta = \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{\Delta_2}{D_2} = \frac{\Delta_3}{D_3},$$

wo:

$$\Delta_1 = \chi_2\varrho_1 - \chi_1\varrho_2, \quad \Delta_2 = \varrho_2\varpi_1 - \varrho_1\varpi_2, \quad \Delta_3 = \varpi_2\chi_1 - \varpi_1\chi_2$$

ist, kann der „Differentialparameter erster Ordnung" genannt werden; sie ist immer positiv und invariant für jede Veränderung der Variabeln.

Der reelle und der imaginäre Bestandteil von Φ genügen dem Gleichungssystem:

$$D_1\frac{\partial\psi}{\partial(yz)}+D_2\frac{\partial\psi}{\partial(zx)}+D_3\frac{\partial\psi}{\partial(xy)}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E_{12}\frac{\partial\psi}{\partial(xy)}-E_{13}\frac{\partial\psi}{\partial(zx)}}{D_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{E_{23}\frac{\partial\psi}{\partial(yz)}-E_{21}\frac{\partial\psi}{\partial(xy)}}{D_2}\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{E_{31}\frac{\partial\psi}{\partial(zx)}-E_{32}\frac{\partial\psi}{\partial(yz)}}{D_3}\right\}=0.$$

Genügt umgekehrt eine reelle einfache Linienfunction diesen Gleichungen, so kann sie als der reelle oder als der (durch i dividirte) imaginäre Bestandteil einer zu F verbundenen Function angenommen werden. Vi.

E. Cesaro. Sur une distribution de zéros. Nouv. Ann. (3) VI. 36-43.

Der Verfasser hat bemerkt, dass eine von Hrn. d'Ocagne behandelte Gleichung in die Form

$$\text{(A)}\quad \frac{d^\nu \log u}{dz^\nu}$$
$$=(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\left[\frac{1}{(z-c_1)^\nu}+\frac{1}{(z-c_2)^\nu}+\cdots+\frac{1}{(z-c_n)^\nu}\right]=0$$

gesetzt werden kann, wo u eine ganze Function von z bedeutet, deren Nullstellen mit $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bezeichnet sind. Es wird vorausgesetzt, dass diese Nullstellen von einander verschieden sind und reelle Werte besitzen. Aus der Form der Gleichung (A) folgen unmittelbar die nachstehenden Sätze. Wenn ν eine gerade Zahl ist, so sind die Wurzeln der Gleichung (A) paarweise conjugirt; wenn dagegen ν eine ungerade Zahl ist, so sind $(n-1)(\nu-1)$ der Wurzeln paarweise conjugirt, die übrigen $(n-1)$ Wurzeln sind reell und verteilen sich auf die Intervalle

$(c_r \dots c_{r+1})$. Für die Wurzel λ, welche zwischen c_r und c_{r+1} liegt, ergiebt sich die Ungleichung

$$c_r + \frac{c_{r+1}-c_r}{1+(n-1)^{\frac{1}{\nu}}} < \lambda < c_{r+1} - \frac{c_{r+1}-c_r}{1+(n-1)^{\frac{1}{\nu}}},$$

aus welcher z. B. der folgende Satz erschlossen wird: **Wenn man das Intervall $c_r \dots c_{r+1}$ in n unter sich gleiche Teil-Intervalle zerlegt, so fällt die Wurzel λ nicht in die äussersten Teil-Intervalle.** Diese Sätze modificiren sich nur unwesentlich, wenn man annimmt, dass die Nullstellen $c_1, c_2, \dots, c_n$ statt auf der Axe der reellen Zahlen, auf einer beliebigen Geraden liegen.

Der besondere Fall $\nu = 2$ wird auf den ersten Seiten der Note ausführlich für sich behandelt, wobei die Betrachtungen in die Terminologie, welche in der Theorie der Trägheitsmomente üblich ist, eingekleidet werden. Hz.

E. Beltrami. Sulle funzioni complesse. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 624-635.

Als das Analogon in der Ebene zum Newton'schen Potentiale wird gewöhnlich die logarithmische Potentialfunction betrachtet. Der Verfasser schlägt dafür eine andere Function vor, nämlich:

$$U(x, y) = \int \frac{h d\sigma}{c - z},$$

wo $c = a + bi$, $z = x + yi$, a, b die laufenden Coordinaten, x, y die eines festen Punktes bezeichnen, h eine eindeutige, endliche und, mit Ausnahme einiger Linien, stetige Function von a, b ist, die als „Dichtigkeit“ bezeichnet werden möchte, und die Integration über ein endliches Gebiet σ erstreckt ist. Die Function $U(x, y)$ ist eindeutig, endlich und stetig in der ganzen Ebene, und es ist:

$$\lim_{z=\infty} (z U) = -\int h d\sigma.$$

Die Differentialquotienten von U sind überall endlich, verschwinden für $z = \infty$, ändern sich stetig, ausgenommen beim

Hindurchgehen durch die Begrenzung von σ und durch die Unstetigkeitslinien von h, und erfüllen die Gleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=-2\pi h,$$

oder

$$\frac{\partial U}{\partial s}+i\frac{\partial U}{\partial n}=-2\pi h\frac{\partial(x-iy)}{\partial s},$$

wo s, n irgend zwei rechtwinklige Richtungen sind und das Strahlenpaar sn dem Strahlenpaare xy congruent ist. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass U eine Function von z im Cauchy'schen Sinne ist in jedem Gebiete, wo $h=0$. Sind h, h' die Werte von h zu beiden Seiten einer Unstetigkeitslinie s und n, n' die entsprechenden Richtungen der Normale zu s, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial n'}=2\pi i(h-h')\frac{\partial(x-iy)}{\partial s}.$$

Endlich findet man die Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s'}\frac{Udz}{z-\zeta}=\varepsilon U(\xi,\eta)-\int_{\sigma'}\frac{h\,d\sigma'}{c-\zeta};$$

σ' ist ein willkürliches Gebiet, dessen Begrenzung s' ist; $\zeta=\xi+i\eta$, und $\varepsilon=1$ oder $=0$, je nachdem der Punkt ζ innerhalb oder ausserhalb σ liegt.

Die Analogie dieser Formeln mit denjenigen der Potentialtheorie ist von selbst ersichtlich. Vi.

P. Appell. Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes. Math. Ann. XXX. 155-156.

Die Functionen F dreier reellen Variabeln x, y, z, welche der Differentialgleichung $\Delta F=0$ genügen, lassen sich als die Verallgemeinerungen der reellen Bestandteile analytischer Functionen einer Variabeln $x+iy$ auffassen. Herr Appell giebt folgendes Beispiel einer Function F, welche dem reellen Bestandteile einer zweiwertigen algebraischen Function von $x+iy$ analog ist. Es seien α, β, γ imaginäre Constanten, ferner sei

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = S+Pi,$$

so ist F durch den Ausdruck

$$F = \frac{\lambda+\mu i}{\sqrt{S+Pi}} + \frac{\lambda-\mu i}{\sqrt{S-Pi}}$$

definirt, wo λ, μ reelle Constanten bedeuten. Diese Function F besitzt den Kreis, in welchem sich die Kugel $S=0$ und die Ebene $P=0$ schneiden, zur Unstetigkeitslinie. Geht man von irgend einem Punkte (x, y, z) aus und kehrt auf einem geschlossenen Wege zu demselben zurück, so hat F den ursprünglichen Wert wieder angenommen oder ist in $-F$ übergegangen. Ob das eine oder das andere eintritt, hängt von der Lage des geschlossenen Weges gegen die Unstetigkeitslinie ab. Es wird noch bemerkt, dass die Function $F = \Phi+\Phi_1$ der Gleichung $\Delta F = 0$ genügt, wenn $\Delta\Phi = 0$ ist. Dabei bedeutet Φ_1 die Function, welche aus Φ hervorgeht, wenn alle in Φ enthaltenen Constanten durch ihre conjugirt imaginären Werte ersetzt werden.

Hz.

P. Appell. Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions périodiques vérifiant l'équation $\Delta F = 0$. Journ. de Math. (4). III. 5-52.

Der Verf. hat sich mehrfach (C. R. XCVI. 368-371, F. d. M. XV. 1883. 310f.; Acta Math. IV. 313-374, F. d. M. XVI. 1884. 373 f.) mit denjenigen eindeutigen Functionen $F(x, y, z)$ beschäftigt, welche der Differentialgleichung $\Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$ genügen und im Endlichen nur polare Unstetigkeiten in von einander durch endliche Entfernungen getrennten Punkten besitzen, und ihre Eigenschaften, die denen der Functionen einer complexen Variabeln analog sind, studirt. In der vorliegenden Abhandlung, deren Hauptresultate sich in den C. R. CII. 1439-1442 (F. d. M. XVIII. 1886. 352) finden, wird eine ausführliche Darlegung derjenigen Methoden gegeben, welche zur Entwickelung der einfachsten periodischen Functionen der genannten Art in trigonometrische Reihen führen; diese Reihenentwickelungen bieten eine interessante Uebereinstimmung mit den entsprechen-

den Entwickelungen der einfach- und doppelt-periodischen Functionen einer complexen Veränderlichen dar und sind für die numerische Berechnung nützlich. Zunächst wird als einfachste derartige Function

$$\Theta_1(x, y, z; a) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \sum_m{}' \left(\frac{1}{\sqrt{(x-ma)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{m^2a^2}} \right)$$

$$(m = -\infty, \ldots, -1, +1, +2, \ldots, +\infty),$$

welche in Bezug auf x die Periode a besitzt und sich im Endlichen regulär verhält, ausgenommen die Punkte $x = ma$, $y = 0$, $z = 0$ $(m = -\infty, \ldots, +\infty)$, in denen sie polar unstetig ist, in die Reihe $A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi x}{a} + \cdots + A_\nu \cos \frac{2\nu\pi x}{a} + \cdots$ entwickelt. Zur Bestimmung der A wird $\frac{d\Theta_1}{du}$ $(u = y^2 + z^2)$ nach einer Methode von Riemann (Schwere, El. u. Magn. p. 88) in das Integral $-\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-tu} \vartheta_3(x) dt$ transformirt, wenn $q = e^{-\frac{\pi^2}{a^2 t}}$ der Modul von ϑ_3 ist; dann liefert die trigonometrische Entwickelung von $\vartheta_3(x)$ die Coefficienten A bis auf je eine additive Constante, welche mit Hülfe der Differentialgleichung $\Delta\Theta_1 = 0$ ermittelt wird; das Integral, durch welches sich A_ν auf diese Weise ausdrückt, ist dasjenige, welches von Riemann in seiner Abhandlung: Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe (Ges. Werke p. 54) behandelt worden ist. Dieselbe Methode wird dann angewandt zur Entwickelung der in Bezug auf x und y periodischen Function

$$\Theta_2(x, y, z; a, b) = \frac{1}{r_{0,0}} + \sum{}' \left(\frac{1}{r_{m,n}} - \frac{1}{\varrho_{m,n}} - \frac{amx + bny}{\varrho_{m,n}^3} \right),$$

wo die Summe über alle ganzzahligen Werte von m und n mit Ausnahme des Wertepaares 0, 0 zu erstrecken und

$$r_{m,n} = \sqrt{(x-ma)^2+(y-nb)^2+z^2}, \quad \varrho_{m,n} = \sqrt{m^2a^2+n^2b^2}$$

ist. Zu demselben Ziele führt aber noch eine zweite Methode, analog derjenigen, deren sich Hermite zur Entwickelung der doppelt-periodischen Functionen in eine trigonometrische Reihe bedient; sie beruht im wesentlichen auf der Anwendung des Green'schen Satzes. Dieselbe Methode dient dann weiter zur

Bestimmung der Coefficienten der trigonometrischen Reihenentwickelung einer Function $Z(x, y, z)$, welche zwar selbst nicht periodisch ist, aus der sich aber alle eindeutigen Functionen $F(x, y, z)$ dreier reellen Variablen, welche der Gleichung $\Delta F = 0$ genügen, in Bezug auf alle drei Veränderlichen periodisch sind und nur polare Unstetigkeiten besitzen, linear zusammensetzen lassen (cf. Acta Math. l c. p. 347 ff.). Setzt man

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varrho = \sqrt{4m^2\alpha^2+4n^2\beta^2+4p^2\gamma^2},$$
$$r\varrho\cos\varphi = 2m\alpha x+2n\beta y+2p\gamma z, \quad R = \sqrt{r^2-2r\varrho\cos\varphi+\varrho^2},$$

so ist diese Function durch die Gleichung definirt:

$$Z(x,\ y,\ z;\ 2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma)$$
$$= \frac{1}{r}+\sum_{m,n,p}'\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho}-\frac{r}{\varrho^2}\cos\varphi-\tfrac{3}{2}\frac{r^2}{\varrho^3}(\cos^2\varphi-\tfrac{1}{3})\right],$$

die Summe über alle ganzzahligen Wertecombinationen von m, n, p mit Ausnahme von $m = n = p = 0$ erstreckt; sie genügt der Gleichung $\Delta Z = 0$, ist im Endlichen regulär ausser in den Punkten $x = 2m\alpha$, $y = 2n\beta$, $z = 2p\gamma$, in denen sie polar unstetig ist, und reproducirt sich bei einer Vermehrung von x, y, z um resp. 2α, 2β, 2γ bis auf eine lineare Function von x resp. y, z. Zu einer nochmaligen Verification der erhaltenen Formeln dient die Bemerkung, dass Z für $\gamma = \infty$ sich von $\Theta_2(x, y, z;\ 2\alpha,\ 2\beta)$ nur um eine Function $Ax^2+By^2-(A+B)z^2$ unterscheidet. Die behandelten Functionen spielen bei verschiedenen physikalischen Problemen eine Rolle, und es seien hier die verschiedenen Arbeiten zusammengestellt, auf welche der Verfasser in Bezug hierauf verweist: Riemann, Schwere, El. u. Magn. bearbeitet von Hattendorf § 23; Boussinesq, C. R. LXX. 33-36, 177-181, 1279-1283 (F. d. M. II. 1870. 738 ff.); de Saint-Venant, C. R. XCIV. 904-909, 1004-1008, 1139-1144 (F. d. M. XIV. 1882. 779 ff.); de Saint-Venant et Flamant, C. R. XCVII. 1027-1031, 1105-1111 (F. d. M. XV. 1883. 839 f.); Appell, C. R. XCVIII. 214-216, Appell et Chervet ibid. 358-360, Chervet ibid. 795-797 und IC. 78-79 (F. d. M. XVI. 1884. 982 f.), Appell, Acta Math. VIII. T.

G. GIULIANI. Sulle funzioni di n variabili reali che soddisfano alla $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0$. Batt. G. XXV. 109-114.

Es wird bemerkt, dass die Sätze, welche Herr Appell in seiner Abhandlung in den Acta Math. IV. 313ff. (F. d. M. XVI. 1884. 373f.) für Functionen dreier reellen Veränderlichen abgeleitet hat, leicht auf den Fall einer beliebigen Anzahl von reellen Veränderlichen ausgedehnt werden können; dies wird an einem derselben näher ausgeführt. T.

A. HARNACK. Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunction in der Ebene. Leipzig. Teubner.

Siehe Abschnitt X, Capitel V.

L. FUCHS. Ueber die Umkehrung von Functionen zweier Veränderlichen. Berl. Ber. 99-108.

In den Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{y_1}+\dfrac{dz_2}{y_2}=du_1, \\ \dfrac{dz_1}{w_1}+\dfrac{dz_2}{w_2}=du_2 \end{cases}$$

seien z_1 und z_2 gegebene Functionen von u_1 und u_2, wie sind dieselben zu wählen, damit y_1, w_1 blosse Functionen der Variabeln z_1 und y_2, w_2 blosse Functionen von z_2 werden? Als die allgemeinste Lösung dieses Problems ergiebt sich, dass $z_1=\psi_1(\zeta_1)$, $z_2=\psi_2(\zeta_2)$ willkürliche Functionen bezüglich von ζ_1 und ζ_2 sein müssen, während ζ_1 und ζ_2 als Functionen von u_1, u_2 den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial u_1}+\zeta_2\frac{\partial\zeta_1}{\partial u_2}=0,$$
$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial u_1}+\zeta_1\frac{\partial\zeta_2}{\partial u_2}=0$$

genügen. Unterwirft man ferner die Functionen z_1 und z_2 von u_1 und u_2 noch der Bedingung, dass z_1+z_2 und $z_1 z_2$ innerhalb bestimmter Gebiete Σ_1, Σ_2 der Variabeln u_1, u_2 eindeutige Functionen der letzteren sind, so ergiebt sich in Uebereinstimmung mit einem schon in den Göttinger Abh. vom 8. Januar 1881 mitgeteilten Theorem (s. F. d. M. XIII. 321), dass z sich derart als zweiwertige Function einer Veränderlichen ζ darstellen lässt, dass hierdurch die Gleichungen (1) in die Form:

$$\sqrt{\Psi(\zeta_1)}d\zeta_1 + \sqrt{\Psi(\zeta_2)}d\zeta_2 = du_1,$$
$$\zeta_1\sqrt{\Psi(\zeta_1)}d\zeta_1 + \zeta_2\sqrt{\Psi(\zeta_2)}d\zeta_2 = du_2$$

übergehen, wo $\Psi(\zeta)$ eine eindeutige Function der Veränderlichen ζ bezeichnet. Bm.

L. Fuchs. Ueber Relationen zwischen den Integralen von Differentialgleichungen. Berl. Ber. 1077-1094.

Ist eine Differentialgleichung zwischen z, y, $\frac{dy}{dz} = y'$ gegeben, so nennt der Verfasser das System zusammengehöriger veränderlicher Werte (z, y, y'), welches der Differentialgleichung genügt, ein Integral derselben. Dieses Integral ist in seinem Verlauf durch seine Anfangswerte $z = \alpha$, $y = \beta$, $y' = \gamma$ vollständig bestimmt. Der Vorzug dieser Definition besteht hauptsächlich darin, dass der unabhängigen und abhängigen Variabeln eine gleichwertige Stelle angewiesen ist.

Die Mitteilung knüpft an eine frühere Note des Verfassers: Berl. Ber. 1884. p. 699 (cf. F. d. M. XVI. 248) an und hat den Zweck, die Einwirkung der Anfangswerte eines Integrales nicht linearer Differentialgleichungen auf die Wertbestimmung desselben an jeder beliebigen Stelle zu untersuchen.

Ist die Differentialgleichung von der Form:

$$F(z)dz + F(y)dy = 0,$$

so beantwortet der Verfasser zuerst die Frage nach dem dem Euler'schen Theorem analogen Satze, wenn $F(z)$ der Differentialquotient eines Abel'schen Integrales erster Gattung vom Range $p = 2$ ist, dahin, „dass die Elemente eines mit beliebig vorge-

schriebenen Anfangswerten behafteten Integrales dieser Differentialgleichung algebraische Functionen der Elemente eines einzelnen durch seine Anfangswerte bestimmten Integrales derselben Differentialgleichung sind." „Dieselben algebraischen Functionen bestimmen die Elemente eines beliebigen Integrals (z_1, y_1, y'_1) der Gleichung

$$F_1(z)dz + F_1(y)dy = 0$$

durch diejenigen eines bestimmten Integrales (z, y, y') derselben Gleichung, wenn $F_1(z)$ einen zu derselben Riemann'schen Fläche gehörigen, von $F(z)$ linear unabhängigen Differentialquotienten eines Integrals erster Gattung bedeutet."

Ein ganz analoger Satz ergiebt sich für den allgemeinen Fall der Differentialgleichung $f(z, y, y') = 0$, wo f eine rationale Function der Argumente ist. Aus den weitern Resultaten der Abhandlung greifen wir noch folgende heraus: „Ist (z, y, y') ein Integral der Gleichung $y' = \varphi(z, y)$, wo φ eine algebraische Function von z und y bedeutet, so ist (z_1, y_1, y'_1) ein Integral derselben Gleichung, wenn z_1, y_1 mit z, y durch die algebraischen Beziehungen

$$\gamma = G(z, y, z_1, y_1),$$
$$\gamma_1 = G_1(z, y, z_1, y_1)$$

verbunden sind." „Sind ferner (z, y, y') und (z_1, y_1, y'_1) Integrale derselben Differentialgleichung, so ist auch (z_2, y_2, y'_2) ein Integral derselben, wenn z_2, y_2, y'_2 mit den Elementen der beiden ersten Integrale durch ähnliche Beziehungen, wie oben, zusammenhängen."

Wird endlich die Untersuchung auf ein System von zwei Differentialgleichungen:

$$y' = \varphi(z, y, v),$$
$$v' = \psi(z, y, v)$$

ausgedehnt, so folgt der Satz: „Wenn (z, y, v, y', v') ein Integral dieses Systems ist, so ist auch $(z_1, y_1, v_1, y'_1, v'_1)$ ein solches unter der Bedingung, dass die sechs Veränderlichen durch die Gleichungen

$$\gamma_\varkappa = G_\varkappa(z, y, v, z_1, y_1, v_1) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

verbunden werden, worin $\gamma_\varkappa$ feste Werte besitzen, und die $G_\varkappa$ gewissen partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten.

Bm.

E. Picard. Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique. Acta Math. XI. 1-12.

Der Satz, welchen der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung beweist, lautet: „Wenn zwischen zwei eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen eine algebraische Gleichung besteht, deren Geschlecht grösser als Eins ist, so können diese Functionen keine isolirt liegende wesentlich singuläre Stelle besitzen.“ Der Verfasser giebt zwei Beweise, von welchen der erste im wesentlichen schon vor längerer Zeit in Darb. Bull. (2) VII. 107 (F. d. M. XV. 1883. 335) veröffentlicht wur' Dieser erste Beweis stützt sich auf die Theorie der linear periodischen (Fuchs'schen) Functionen. Der zweite Beweis ist elementarerer Natur. Nach directer Erledigung des Falles, in welchem die im Satze erwähnte Gleichung als hyperelliptisch vorausgesetzt wird, gelingt es, den allgemeinen Fall auf diesen speciellen zurückzuführen.

Hz.

F. Schottky. Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt. J. für Math. CI. 227-272.

Die in der vorliegenden Abhandlung untersuchten Functionen sind Verallgemeinerungen derjenigen, welche der Verfasser in einer früheren Arbeit „Ueber conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen“ (J. für Math. LXXXIII.) betrachtet hat. In den bekannten Aufsätzen von Poincaré bilden sie die dritte Familie der „Klein'schen Functionen“. Die Gruppe dieser Functionen entsteht durch Zusammensetzung von 2ϱ Substitutionen $f_\alpha(x)$, $f_{\alpha'}(x)$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho$), welche man auf folgende Weise erhält. Man nehme in der Ebene, deren Punkte die Werte der complexen Variabeln darstellen, 2ϱ Kreise K_α, $K_{\alpha'}$

an, von welchen jeder alle übrigen ausschliesst. Die linear gebrochenen Functionen $f_a(x)$, $f_{a'}(x)$ sind dann so zu bestimmen, dass erstens die Gleichungen

$$y = f_a(x), \quad x = f_{a'}(y)$$

neben einander bestehen, und dass zweitens vermöge dieser Gleichungen jedem ausserhalb des Kreises $K_{a'}$ gelegenen Punkte x ein im Innern des Kreises K_a liegender Punkt y zugeordnet wird. Die durch Zusammensetzung der $f_a(x)$, $f_{a'}(x)$ entstehenden Substitutionen, deren Gesamtheit die Gruppe der zu untersuchenden Functionen bildet, werden in folgender Weise bezeichnet. Es wird gesetzt:

$$f_a(f_\beta(x)) = f_{a\beta}(x), \quad f_{a\beta}(f_\gamma(x)) = f_{a\beta\gamma}(x), \ldots;$$

allgemein entspricht jeder Combination m aus den 2ϱ Indices $1, 2, \ldots, \varrho, 1', 2', \ldots, \varrho'$ eine Substitution $f_m(x)$; und es besteht die Identität

$$f_m(f_n(x)) = f_{mn}(x).$$

Zu jedem Index m giebt es einen entgegengesetzten m', so beschaffen, dass

$$f_{mm'}(x) = x$$

ist. Zur Abkürzung wird für $f_m(x)$ auch das Zeichen x_m gebraucht. Die Gesamtheit der Werte x_m bildet das System der zu x „congruenten" Werte. Beschreibt die Variable x das Gebiet, welches von den 2ϱ Kreisen K_a, $K_{a'}$ begrenzt und als „Nullfläche" bezeichnet wird, so beschreibt x_m ein Gebiet (m), welches ebenfalls von 2ϱ Kreisen begrenzt wird. Die ganze Ebene wird durch die Gebiete (m) einfach und lückenlos überdeckt. Dabei sind indessen gewisse Punkte der Ebene auszuscheiden, welche wesentlich singuläre Stellen der weiterhin zu betrachtenden Functionen sein werden. Eine jede nicht abbrechende Reihe von Indices, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, von denen keine zwei aufeinanderfolgenden entgegengesetzt sind, definirt einen solchen singulären Punkt als Grenzstelle der Reihe $x_\alpha, x_{\alpha\beta}, x_{\alpha\beta\gamma}, \ldots$, welche Grenzstelle von der Wahl von x unabhängig ist. Zu diesen singulären Punkten gehören insbesondere auch die Wurzelpunkte $\overset{(n)}{A}$ und $\overset{(n)}{B}$ der quadratischen Gleichung

$$f_n(x) = x.$$

Im Innern eines Gebietes (m) liegt offenbar niemals ein singulärer Punkt.

Bedeuten nun x, y, ξ, η vier Variable, welche alle Werte mit Ausnahme der singulären annehmen sollen, so erweist sich das Product

$$(1) \qquad (x,\, y;\, \xi,\, \eta) = \prod_m \frac{(x-\xi_m)(y-\eta_m)}{(x-\eta_m)(y-\xi_m)}$$

als convergent, falls die Summe der Radien aller Kreise, welche die Gebiete (m) begrenzen, endlich ist. Die Endlichkeit dieser Summe wird unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Nullfläche durch Hülfskreise, welche einander und die 2ϱ Kreise K_a, $K_{a'}$ nicht treffen, in lauter dreifach zusammenhängende Teile zerlegbar ist. Ob diese Voraussetzung, welche gewisse Ungleichungen zwischen den Constanten der Kreise K_a, $K_{a'}$ bedingt, eine notwendige ist, bleibt dahingestellt. Der weiteren Untersuchung wird nur die Annahme zu Grunde gelegt, dass das Product (1) convergirt. Dieses Product stellt eine Function der vier Variabeln x, y, ξ, η vor, aus welcher alle übrigen zu betrachtenden Functionen entspringen. Zunächst zeigt es sich, dass diese Function durch eine andere nur von zwei Variabeln x, ξ abhängende Function $E(x, \xi)$ in der Form

$$(2) \qquad (x,\, y;\, \xi,\, \eta) = \frac{E(x, \xi) \,.\, E(y, \eta)}{E(x, \eta) \,.\, E(y, \xi)}$$

darstellbar ist. Die Function $E(x, \xi)$ wird durch das Product

$$(3) \qquad E(x, \xi) = (x-\xi) \prod_n \frac{(x-\xi_n)(\xi-x_n)}{(x-x_n)(\xi-\xi_n)}$$

definirt. Die Indices n, über welche sich das Product erstreckt, sind dabei so zu bestimmen, dass sie im Verein mit ihren entgegengesetzten Indices n' die Gesamtheit aller Indices ausmachen. Aus der Gleichung (3) geht hervor, dass $E(x, \xi)$ nur für $x = \xi$ und für die zu ξ congruenten Werte von der ersten Ordnung Null wird, und dass $E(x, \xi)$ nur für $x = \infty$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Die Betrachtung des Quotienten $\dfrac{E(x, \xi_n)}{E(x, \xi)}$ welcher für keinen Wert von x Null oder unendlich wird, for-

dert zur Einführung einer neuen Function

$$(4)\qquad E_n(x) = \prod_p \frac{x - f_p(\overset{(n)}{A})}{x - f_p(\overset{(n)}{B})}$$

auf. Hier sind die Indices p so zu bestimmen, dass in der Form

$$pn^h \qquad (h = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

jeder Index und jeder nur einmal enthalten ist.

Das Verhalten der Functionen $E_n(x)$ und $E(x, \xi)$ bei Ersetzung der Argumente durch congruente Werte spricht sich in folgenden Gleichungen aus:

$$(5)\qquad \begin{cases} E_n(x_m) = E_{n,m} E_n(x), \\ \dfrac{E(x_n, \xi_m)}{E(x, \xi)} = \dfrac{E_n(\xi)\, E_m(x)}{E_n(x)\, E_m(\xi)} \cdot \dfrac{E_{n,m}}{L_n(x) \,.\, L_m(\xi)}. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten $E_{n,m}$ Constante, welche der Gleichung $E_{n,m} = E_{m,n}$ genügen, und es ist $L_n(x)$ eine lineare Function von x, deren Quadrat gleich $E_{n,n} \dfrac{dx}{dx_n}$ ist.

Die Functionen $E_n(x)$ befriedigen ferner die Gleichungen

$$(6)\qquad E_{nm}(x) = E_n(x) \,.\, E_m(x), \quad E_n(x) \,.\, E_{n'}(x) = 1,$$

vermöge welcher alle diese Functionen als Producte von Potenzen der ϱ Functionen $E_1(x), E_2(x), \ldots, E_\varrho(x)$ ausgedrückt werden können. Endlich ist noch bemerkenswert, dass die $\dfrac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Grössen $E_{\varkappa,\lambda}$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, \varrho$) sich in Form von unendlichen Producten darstellen lassen, aus welchen hervorgeht, dass diese Grössen nur von $3\varrho - 3$ wesentlichen Constanten abhängen.

Nunmehr wird der Begriff der „Integralfunction" eingeführt. Hierunter ist jede der Gleichung

$$J'(x_n) dx_n = J'(x) dx$$

genügende Function $J(x)$ zu verstehen, deren Ableitung $J'(x)$ überall, ausgenommen an den singulären Stellen, den Charakter einer rationalen Function besitzt. Um die allgemeinste Integralfunction aufstellen zu können, entwickele man $\log(\xi + t, \eta; x, y)$ nach Potenzen von t, wo ξ, η, x, y irgend welche nicht singulären und incongruenten Werte bezeichnen, und wo, falls $\xi = \infty$

ist, $\frac{1}{t}$ an Stelle von $\xi+t$ zu setzen ist. Der Coefficient t^λ findet sich, wie eine leichte Rechnung zeigt, gleich

$$F_\lambda(x) = \sum_m \left(\frac{1}{(x_m-\xi)^\lambda} - \frac{1}{(y_m-\xi)^\lambda}\right) \text{ oder } \sum_m (x_m^\lambda - y_m^\lambda),$$

je nachdem ξ endlich oder unendlich ist. Besondere Integralfunctionen sind nun

1. die ϱ Functionen $\log E_1(x)$, $\log E_2(x)$, ..., $\log E_\varrho(x)$,
2. jede Function $F_\lambda(x)$,
3. jede Function $\log(x, y; \xi, \eta)$, wenn y, ξ, η irgend welche incongruenten, nicht singulären Werte bedeuten.

Aus diesen Functionen, welche der Reihe nach von der ersten, zweiten, dritten Gattung genannt werden, setzt sich die allgemeinste Integralfunction linear mit constanten Coefficienten zusammen. Die Coefficienten eines in $\varrho+1$ Integralfunctionen linearen und ganzen Ausdrucks können stets so bestimmt werden, dass dieser Ausdruck ungeändert bleibt, wenn das Argument durch einen congruenten Wert ersetzt wird. Derartige Ausdrücke stellen sogenannte „invariante" Functionen vor. Unter diesen invarianten Functionen lassen sich auf mannigfaltige Weise zwei p und q auswählen, zwischen welchen eine algebraische Gleichung vom Range oder Geschlechte ϱ besteht. Die Integralfunctionen decken sich mit den Integralen der rationalen Functionen von p und q. (Beiläufig möge hier bemerkt werden, dass die Bezeichnung „Geschlecht" nicht, wie der Verfasser annimmt, von Riemann, sondern von Clebsch herrührt.)

Fasst man x und $E(x, \xi)$ als Functionen von p auf, so befriedigen diese Functionen gewisse Differentialgleichungen, welche der Verfasser im letzten Paragraphen der Abhandlung aufstellt. Insbesondere ergiebt sich, dass x der Quotient zweier Particular-Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dp^2} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dp}\cdot\frac{dz}{dp} + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{H}\frac{dH}{dp}\right)^2 - \frac{1}{2H}\frac{d^2H}{dp^2} - 3R_1 + 3R\right)z = 0$$

ist, wo H, R, R_1 rationale Functionen von p und q bezeichnen.

Es wird gezeigt, wie die Functionen H und R zu bestimmen sind, falls die Gleichung zwischen p und q gegeben ist. Dagegen bildet die Bestimmung der Function R_1 ein noch ungelöstes Problem. Mit der Bestimmung dieser Function würde es möglich werden, den vom Verfasser eingeschlagenen Weg umzukehren, nämlich, ausgehend von einer algebraischen Gleichung vom Range ϱ, zu den von ihm betrachteten Functionen zu gelangen. — Auf pag. 260 der Abhandlung sind in der 12ten Zeile von oben die Worte „notwendig und" zu streichen. Hz.

E. Picard. Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables.
S. M. F. Bull. XV. 148-152.

Die Integrale

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

wo g und h zwei der Grössen 0, 1, x, y, ∞ bedeuten, genügen einem System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen, welche drei gemeinsame linear unabhängige Lösungen besitzen. Sind diese w_1, w_2, w_3, so geben die Gleichungen

$$\frac{w_1}{w_3} = u(x, y) = z, \qquad \frac{w_2}{w_3} = v(x, y) = t$$

für x und y eindeutige Functionen von z und t, wenn $\lambda+b_1-1$ und $2-\lambda-b_1-b_2$ und die analogen Ausdrücke die reciproken Werte ganzer Zahlen sind. (Picard, Ann. de l'Éc. Norm. 1885, s. F. d. M. XVII. 412). Für dieses allgemeine Theorem werden einige specielle Beispiele angegeben und auch der bereits C. R. CIV. 896 erwähnte Fall eingehend behandelt, wobei sich ergiebt, dass die Umkehrung der Functionen $u(x, y) = z$, $v(x, y) = t$, entgegen der Bemerkung von Goursat (C. R. CIV. 893-896), durch θ-Functionen einer Variabeln geleistet wird. Bm.

H. Poincaré. Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique.
Journ. de Math. (4) III. 405-464.

In dieser Arbeit werden die „Fuchs'schen Gruppen und Functionen“ mit den ternären quadratischen Formen in einen engen Zusammenhang gebracht.

Als Hauptresultat ergiebt sich die Lösung der Frage, ob und wann für die Fuchs'schen Functionen ein Additionstheorem, analog dem für die elliptischen Transcendenten geltenden, bestehen kann.

Unter den linearen Substitutionen (von der Determinante Eins), welche die quadratische Form

$$\varphi = y^2 - xz$$

in sich überführen, ragen besonders hervor die durch

$$S = \begin{vmatrix} \delta^2 & -\delta\gamma & \gamma^2 \\ -2\delta\beta & \alpha\gamma+\beta\gamma & -2\alpha\gamma \\ \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

dargestellten, wo die α, β, γ, δ reelle Grössen bedeuten, welche der Beschränkung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

unterliegen.

Offenbar lässt sich jeder solchen Substitution S eine „Fuchs'sche Substitution“ mit reellen Coefficienten α, β, γ, δ:

$$s = \left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

eindeutig zuordnen und umgekehrt: die Gesamtgruppe der S ist mit derjenigen der s holoedrisch isomorph. Folglich entspricht auch jeder discontinuirlichen Gruppe von S eine „Fuchs'sche Gruppe“ von s und umgekehrt.

Dies erlaubt sofort eine Uebertragung auf beliebige ternäre quadratische Formen F.

Nun sei T irgend eine Substitution (von einer Determinante D), welche Φ in F überführt, so entspricht wiederum die Gruppe der („mit Φ ähnlichen“) Substitutionen S der Gruppe der „mit F ähnlichen“ $T^{-1}ST = \Sigma$. Demnach sind sich auch die Gruppen der Σ und s holoedrisch isomorph zugeordnet, und jeder discontinuirlichen Gruppe von Σ correspondirt eine „Fuchs'sche Gruppe“ von s.

Unter den mit F ähnlichen Substitutionen Σ, welche die als

ganzzahlig vorausgesetzte Form F reproduciren, spielen seit langem eine besonders wichtige Rolle die mit ganzzahligen Coefficienten versehenen. Diese bilden für sich eine discontinuirliche Gruppe G, die sogenannte „arithmetische" Gruppe von F, und dieser ist also ebenfalls eine bestimmte Fuchs'sche Gruppe und ein dadurch mitbedingtes System Fuchs'scher Functionen, „der arithmetischen Fuchs'schen Functionen", zugeordnet.

Mit Bezug auf die ebengenannte Gruppe G zerfallen die Formen F in vier Kategorien, je nachdem G elliptische und parabolische Substitutionen enthält oder nicht. Eine endliche Anzahl von „Aequivalenzversuchen" genügt, um zu erkennen, welcher Kategorie eine vorgelegte Form F angehört. Die correspondirende Fuchs'sche Gruppe ist dann immer Glied einer ganz bestimmten „Familie". Die Anzahlen der Seiten, Cyklen etc. der zugehörigen „erzeugenden Polygone" lassen sich aus arithmetischen Eigenschaften der Form F ableiten.

Ist nun $F(z)$ eine beliebige Fuchs'sche Function, und S eine ausserhalb von deren Gruppe stehende Substitution, so ist bald zu bemerken, dass „im allgemeinen" zwischen $F(z)$ und $F(zS)$ (wo zS das bedeutet, was entsteht, wenn auf z die Substitution S angewandt wird) keine algebraische Relation besteht.

Der Verfasser findet andererseits das Kriterium:

„Soll eine algebraische Relation zwischen $F(z)$ und $F(zS)$ herrschen, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass die Gruppe G von F und $S^{-1}GS$, d. i. die durch S transformirte Gruppe von G, commensurabel sind." Dabei heissen zwei Gruppen commensurabel, wenn ihre gemeinsame Gruppe für jede von beiden eine Untergruppe von endlichem Index ist.

In der That lässt sich das für den bekannten Fall, wenn F sich auf die Modularfunction J reducirt, leicht bestätigen. Dann ist z. B. für $zS = \frac{z}{n}$ die betrachtete algebraische Gleichung die Modulargleichung. Der Verfasser ist nunmehr im Stande, eine unendliche Anzahl neuer Fälle von Fuchs'schen Functionen anzugeben, für die eine algebraische Relation der genannten Art, d. i. ein Additionstheorem, existirt.

Ist nämlich F irgend eine (ganzzahlige, indefinite) ternäre quadratische Form, $f(z)$ eine der zugehörigen „arithmetischen" Fuchs'schen Functionen mit der erzeugenden Gruppe G, ferner S eine Substitution mit gebrochenen Coefficienten, welche F reproducirt, und s die correspondirende Fuchs'sche Substitution, dann bilden die s eine continuirliche Gruppe Γ, und es zeigt sich das obige Kriterium erfüllt, insofern G mit $s^{-1}Gs$ commensurabel wird. Daher lässt sich der Satz aussprechen:

„Ist $f(z)$ eine arithmetische Fuchs'sche Function, so besteht zwischen $f(z)$ und $f(zs)$ eine algebraische Relation, wenn s eine beliebige Substitution der continuirlichen Gruppe Γ ist".

Die Modularfunction erscheint dabei als der specielle Fall, wo F die Form $2y^2-2xz$ darstellt. Voraussichtlich werden demnach die arithmetischen Fuchs'schen Functionen für gewisse Klassen von Gleichungen eine ähnliche Rolle spielen, wie die Modularfunctionen für die Gleichungen fünften Grades.

Die durchgehende Wechselbeziehung zwischen den Formen F und den coordinirten Fuchs'schen Functionen liefert noch eine grosse Anzahl merkwürdiger Eigenschaften beider; es sei hier nur noch angedeutet, dass die Frage nach der Reduction einer Form F mit der Einteilung der Fuchs'schen Gruppen in eigentlich und uneigentlich discontinuirliche, sowie mit den „Invarianten" solcher Gruppen in engstem Connex steht. My.

HUMBERT. Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques. Journ. de Math. (4) III. 327-404.

Der Verfasser giebt als Zielpunkt der Arbeit die Aufstellung einer Formel an, welche es erlaubt, wenn eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung und ein zugehöriges Abel'sches Integral gegeben ist, a priori die Summe der Variationen zu bestimmen, die das Integral auf den Linien erleidet, die durch die Schnittpunkte der vorgelegten Curve mit einer veränderlichen algebraischen Curve erzeugt werden, welche einem Büschel angehört. Als Mittel dienen ihm die von Poincaré in die Curventheorie eingeführten Fuchs'schen Functionen.

Im ersten Teile der Arbeit werden, anschliessend an des Verfassers Aufsatz: Application de la théorie des fonctions fuchsiennes etc. Journ. de Math. (4) II., F. d. M. XVIII. 1886. 362 die drei homogenen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Curve n^{ter} Ordnung $f=0$, an welcher das Integral hinerstreckt ist, als Theta-Fuchs'sche Functionen vom Grade μ ausgedrückt:

$$x=\theta_1(t),\quad y=\theta_2(t),\quad z=\theta_3(t).$$

Mit Einführung derselben gelingt es dann, die rechte Seite der Gleichung des Abel'schen Theorems für Integrale beliebiger Gattung auszuwerten. Hierdurch gewinnt man die Formel

$$\sum_{i=1}^{i=mn}\int_{x_i^0}^{x_i}\frac{Q(x,y,z)}{S(x,y,z)}(z\,dx-x\,dz)=-\Sigma\int_{u_0}^{u}r_\beta\,du,$$

welche das Fundament der folgenden Untersuchungen bildet. Q und S sind hier Polynome von den Graden q und $q+2$, x_i^0 und x_i entsprechen bezüglich den Schnittpunkten der Curven m^{ten} Grades

$$F(x,y,z)-u_0\varphi(x,y,z)=0 \quad \text{und} \quad F(x,y,z)-u\varphi(x,y,z)=0,$$

und Σr_β ist die Residuensumme der eindeutigen Function

$$\Theta(t)=\frac{Q(x,y,z)}{S(x,y,z)}\,\frac{x'z-xz'}{\left(\frac{F}{\varphi}-u\right)}$$

und entspricht den Nullpunkten von S, während x' und z' die Abgeleiteten von x und z nach t bedeuten. Als Hauptresultat des ersten Teiles heben wir den aus dieser Formel folgenden Satz hervor: Die Summe der Werte, welche eine rationale homogene Function vom Grade Null $\frac{Q(x,y,z)}{V(x,y,z)}$ in den Punkten annimmt, in welchen eine algebraische Curve $f=0$ von jeder Curve eines Büschels $F-u\varphi=0$ geschnitten wird, ist constant, wenn die Curven des Büschels, welche bezüglich durch die Schnittpunkte der Curven $f=0$ und $V=0$ laufen und $\frac{Q}{V}$ unendlich machen, in jedem dieser Punkte mit der Curve $f=0$ einen Contact besitzen, dessen Ordnung mindestens gleich dem Unterschiede zwischen den Ordnungen der Contacte der Curve

$f = 0$ mit den Curven $V = 0$ und $Q = 0$ im betrachteten Punkte ist. Ein ganz ähnlicher Satz ergiebt sich für das Product der Werte einer solchen Function.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit den geometrischen Folgerungen. Es werden hier Sätze aufgestellt: 1) über die Flächenräume, welche ein Radiusvector überstreicht, der von irgend einem Punkte der Ebene nach den Schnittpunkten einer Curve $f = 0$ mit den Curven des Büschels $F - u\varphi = 0$ läuft; 2) über die Richtungen dieser Radienvectoren; 3) über die Abstände der beweglichen Schnittpunkte von festen Linien, insbesondere über das Centrum der mittleren Entfernungen eines Systems von Punkten und über homofocale Curven. Die in grosser Anzahl aufgestellten, teils neuen, teils bereits bekannten Sätze lassen sich mit grosser Leichtigkeit aus der angeführten Formel gewinnen.

Bemerkenswerte Folgerungen enthält der dritte, umfangreichste Teil der Abhandlung; sie beziehen sich auf die Curven, die Laguerre unter dem Namen „courbes de direction" in die Geometrie eingeführt hat, d. h. jene Curven, die als Einhüllende einer Geraden mit bestimmtem Richtungssinn erhalten werden. Für sie ist der Abstand irgend eines Punktes der Ebene von einer Tangente eine rationale Function der Coordinaten ihres Berührungspunktes. Soll $f(x, y, z) = 0$ eine solche Richtungscurve vorstellen, dann muss die Identität bestehen

$$f_x'^2 + f_y'^2 = \psi^2 + \chi f,$$

f ist vom Grade n, ψ und χ sind Polynome von den Graden $n-1$ und $n-2$. Der Bogen einer solchen Curve drückt sich durch ein zu der Curve gehöriges Abel'sches Integral aus, und daher lassen sich die Formeln des ersten Teils mit Vorteil auf diese Curven anwenden.

Nach einigen allgemeinen Untersuchungen werden die Richtungscurven 3ter Ordnung behandelt und zwei Klassen derselben unterschieden, deren Gleichungen die Formen annehmen:

$$\varrho^3 \cos 3\omega = a^3; \quad \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \tfrac{1}{3}\omega = m^{\frac{1}{3}}.$$

Dann folgen Untersuchungen über die cyklischen Richtungs-

curven, d. h. jene Curven, welche die unendlich ferne Gerade nur in den Kreispunkten schneiden. Diese Curven charakterisiren sich dadurch, dass die allgemeine Gleichung $\psi(x, y, z)$ derselben von der Form $z\psi_1$ ist, woselbst $\psi_1 = 0$ eine adjungirte Curve der fraglichen Richtungscurve darstellt. Falls diese Curve nur in getrennten Aesten durch die Kreispunkte geht, kann man die Summe der Bogen leicht berechnen, welche durch zwei beliebige Curven m^{ten} Grades auf ihr ausgeschnitten werden, woraus sich mehrere Sätze folgern lassen. Weiter werden noch die Richtungscurven bestimmt, auf welchen die Summe solcher Bogen stets gleich Null ist, wobei sich die interessante Folgerung ergiebt, dass der Bogen aller Curven mit der Gleichung

$$\alpha\varrho^{2n-2}\cos 3\omega + \beta\varrho^{2n-3}\cos 4\omega + \cdots + \lambda\cos(2n+1)\omega = \mu\varrho^{2n+1}$$

durch ein Abel'sches Integral erster Gattung ausgedrückt wird, wenn die Abgeleitete der Function

$$\alpha\theta^3 + \beta\theta^4 + \cdots + \lambda\theta^{2n+1}$$

in Bezug auf θ das Quadrat eines ganzen Polynoms ist. Den Schluss der inhaltreichen Abhandlung bildet die Auswertung der Summe der Bogen, welche von zwei Curven gleicher Ordnung auf einer beliebigen Richtungscurve ausgeschnitten werden; es ergeben sich dabei einige allgemeine Sätze, an die sich noch drei specielle über die Schwerpunkte dieser Bogen anschliessen.

Bm.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und hypergeometrischen Reihen).

Ch. Hermite, Hadamard. Solutions of questions 8510, 8596. Ed. Times XLVI. 50-51, 73-74.

Der allgemeinste Ausdruck eines Polynomes $F(x)$ vom Grade $2m$, das den Bedingungen genügt:

$$x^m F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x), \quad (x+1)^{2m} F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2^m F(x)$$

ist:

$$F(x) = A(x^2+1)^m + x^2(1-x^2)^2 B(x^2+1)^{m-4} + x^4(1-x^2)^4 C(x^2+1)^{m-8} + \cdots + x^{2i}(1-x^2)^{2i} L(x^2+1)^{m-4i}.$$

Diese von Hrn. Hermite gelöste Aufgabe verallgemeinert Hr. Hadamard dahin, dass er die Polynome $F(x)$ vom Grade $2p$ bestimmt, welche den Bedingungen genügen:

$$(c+bx)^{2p} F\left(\frac{a-cx}{c+bx}\right) \equiv (c^2+ab)^p F(x),$$

$$(c'+b'x)^{2p} F\left(\frac{a'-c'x}{c'+b'x}\right) \equiv (c'^2+a'b')^p F(x).$$

Lp.

T. R. Terry, H. London, Sircom. Solution of question 8339. Ed. Times XLVI. 35.

Eine Function $\varphi(p, q)$ von p und q werde durch die Gleichungen bestimmt:

$$(2q-2p-1)\varphi(p, q) = \varphi(p, q-1) = -(p+1)\varphi(p+1, q)$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(1, 0) = 1$, dann ist

$$\varphi(p, q) = (-1)^p \frac{2^{q-p}(q-p)!}{p![2(q-p)!]}.$$

Lp.

A. Martin. Methods of finding n^{th}-power numbers whose sum is an nth power; with examples. Wash. Bull. X. 107-110.

Die Methoden bestehen in einem systematischen Probiren an den Bernoulli'schen Functionen. Von Beispielen, welche für $n = 2, 3, 4, 5$ berechnet sind, mögen die für $n = 5$ hergesetzt werden:

$$4^5+5^5+6^5+7^5+9^5+11^5 = 12^5,$$

$$5^5+10^5+11^5+16^5+19^5+29^5 = 30^5,$$

$$3^5+6^5+7^5+8^5+10^5+11^5+13^5+14^5+15^5+16^5+18^5+31^5 = 32^5.$$

Für $n = 2$ und 3 sind nach Angabe des Verfassers die Zerlegungen durch Hrn. Hart geleistet in „The Mathematical Magazine“ Edited and published by Artemas Martin. 4°. Erie, Pa. 1882-1884. Vol. I No. 1 (p. 8-9), No. 11 (p. 173-176). Lp.

J. M. Schäberle. A short demonstration of the exponential theorem. Ann. of Math. III. 156.

Durch Quadriren von $a^x = 1+c_1x+c_2x^2+\cdots$ und Vergleichen mit $a^{2x} = 1+2c_1x+4c_2x^2+\cdots$ ergiebt sich $c_n = \frac{1}{n!}c_1^n$.

M.

J. L. W. V. Jensen. En Funktionalligning. Zeuthen T. (5) V. 90-94.

Es wird die Aufgabe gelöst, die eindeutigen analytischen Functionen zu bestimmen, welche die Functionalgleichung befriedigen:

$$(1)\qquad f(x+y) = af(x)f(y)+bf(x+\omega).f(y+\omega),$$

wo a, b, ω gegebene, von Null verschiedene Constanten sind.

Man hat entweder $f(x) = 0$, oder

$$(2)\ af(x+y)+\alpha f(x+y+\omega) = (af(x)+\alpha f(x+\omega))(af(y)+\alpha f(y+\omega)),$$

wenn k eine gewisse Constante und α eine Wurzel der Gleichung

$$k\alpha+ab = \alpha^2$$

ist. Wird nun $af(x)+\alpha f(x+\omega) = F(x)$ gesetzt, so hat man

$$F(x+y) = F(x).F(y),$$

also $F(x) = 0$ oder $F(x) = e^{cx}$, wo c eine willkürliche Constante ist. Die Gleichung (1) hat dann folgende vier Lösungen:

$$f(x) = 0,\quad f(x) = \frac{e^{cx}}{a+be^{2c\omega}},\quad f(x) = \frac{1}{a}\,\frac{ae^{cx}+be^{2c\omega}e^{c'x}}{a+be^{2c\omega}},$$

wo

$$c' = \frac{l\left(-\frac{b}{a}\right)+2n\pi i}{\omega}-c,\quad f(x) = \frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{\omega}\right)e^{cx}.$$

In der zweiten und dritten Lösung muss jedoch $a+be^{2c\omega}$ von Null verschieden sein. V.

M. LERCH. Note sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$. Acta Math. XI. 19-24.

Durch Anwendung der Methode, deren Riemann sich in seiner Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (Berl. Monatsber. Nov. 1859; Ges. W. p. 136ff.) bedient hat, wird gezeigt, dass die obige Reihe $\mathfrak{K}(w, x, s)$, die sich auch durch $\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} \frac{e^{-wz} z^{s-1}\, dz}{1-e^{2\pi i-s}}$ darstellen lässt, eine ganze, transcendente Function von s ist, und die Relation hergeleitet

$$\mathfrak{K}(w, x, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left\{e^{\pi i(\frac{1}{2}s-2wx)}\mathfrak{K}(x, -w, s) + e^{\pi i(-\frac{1}{2}+2w(1-x))}.\mathfrak{K}(1-x, w, s)\right\},$$

wenn der imaginäre Teil von x positiv, w ein positiver, echter Bruch und der reelle Teil von s positiv ist; liegt dieser in dem Intervall $0 \dots 1$, so gilt die Formel auch für reelle Werte von x. Als specieller Fall ergiebt sich die von Herrn Kronecker (Berl. Ber. April 1883 und Juli 1885) benutzte Gleichung $\frac{2\pi i e^{2\pi i w x}}{1-e^{2\pi i x}} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2kw\pi i}}{k-x}$ (Lipschitz in J. für Math. LIV. 320). Man vergleiche die inzwischen erschienene Arbeit des Herrn Lipschitz in J. für Math. CV. 127ff. T.

O. SCHLÖMILCH. Ueber eine Entwickelung des Logarithmus. Leipz. Ber. 53-54.

Die Entwickelung, welche dadurch bemerkenswert ist, dass sie sich aus zwei Reihen zusammensetzt, von denen die eine nach aufsteigenden, die andere nach absteigenden Facultäten fortschreitet, lautet:

$$l(1+\mu) = -C + \tfrac{1}{1}\frac{\mu}{1} - \tfrac{1}{2}\frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \tfrac{1}{3}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} - \cdots$$
$$+ \frac{c_1}{\mu+1} + \frac{c_2}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{c_3}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)} + \cdots,$$

wo C die Constante des Integrallogarithmus und

$$c_n = \frac{1}{n}\int_0^1 t(1-t)(2-t)\dots(n-1-t)dt$$

ist. Sie wird durch Umwandlung der Formel

$$l(1+\mu) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\mu x}}{x} e^{-x} dx$$

gewonnen. T.

Haro. Note sur une nouvelle méthode de notation graphique des logarithmes. Ass. Franç. Toulouse 128-132.

G. B. Mathews, W. J. Barton, G. G. Storr. Solution of question 8356. Ed. Times. XLVI. 47.

Ist

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\theta - 2k\cos\theta - 2k^2(1+\sin\theta)}{\cos\theta + 2k(1+\sin\theta)}$$

und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta-\varphi) = \dfrac{k(1+\sin\theta)}{1+k\cos\theta}$, so ist $\dfrac{k(1-ki)e^{\theta i}}{1+ki+ke^{\theta i}} = e^{\varphi i}$.

Lp.

J. Wolstenholme, G. B. Mathews, A. M. Nash. Solution of question 7840. Ed. Times XLVI. 45-46.

Es sei θ ein beliebiger Winkel zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, so ist für alle reellen Werte von n:

$$\frac{\sin n\theta}{\cos\theta} = n\sin\theta + n(2^2-n^2)\frac{\sin^3\theta}{3!} + n(2^2-n^2)(4^2-n^2)\frac{\sin^5\theta}{5!} + \cdots,$$

$$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta} = 1 + (1^2-n^2)\frac{\sin^2\theta}{2!} + (1^2-n^2)(3^2-n^2)\frac{\sin^4\theta}{4!} + \cdots.$$

Setzt man $x = \sin\theta$, $y = \dfrac{\sin n\theta}{\cos\theta}$ oder $= \dfrac{\cos n\theta}{\cos\theta}$, so gilt die Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (n^2-1)y = 0.$$

Lp.

A. Saporetti. Metodo analitico dello sviluppo di un arco circolare in funzione trigonometrica di un altro arco cognito il quoto costante delle loro tangenti trigonometriche. Bologna Mem. (4) VIII. 57-62.

Besteht zwischen den Grössen x, y, m die Gleichung

$$(1)\qquad \operatorname{tg} y = m \operatorname{tg} x,$$

so lässt sich y nach Potenzen von $\theta = \frac{1-m}{1+m}$ in die einfache Reihe

$$(2)\qquad y = x + \sum_1^{\infty} {}_n \frac{(-\theta)^n}{n} \sin 2nx$$

entwickeln. Es handelt sich darum, dieses direct zu beweisen, ohne die imaginären Ausdrücke der Tangente durch die Exponentialfunction zu Hülfe zu nehmen. Zu dem Ende geht der Verfasser von der mit (1) äquivalenten Gleichung

$$(3)\qquad x-y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\theta \sin 2x}{1+\theta \cos 2x}\right) = \varphi(\theta)$$

aus. Die zu beweisende Entwickelung ergiebt sich dann, indem man entweder den Arcus tangens nach Potenzen seines Argumentes entwickelt, sodann die einzelnen Glieder der Entwickelung n Potenzreihen von θ umformt und endlich die mit denselben ¡Potenzen von θ multiplicirten Terme zusammenfasst; oder indem man $\varphi'(\theta) = \frac{\sin 2x}{1+2\theta \cos 2x + \theta^2}$ nach Potenzen von θ entwickelt, welches leicht nach der Methode der unbestimmten Coefficienten geschieht, und aus dieser Entwickelung die Werte der Coefficienten in der Maclaurin'schen Reihe für $\varphi(\theta)$ ableitet. Hz.

T. R. Terry, W. J. C. Sharp, W. W. Taylor. Solution of question 8410. Ed. Times XLVI. 28.

Es sei $\varphi(x) = x^x$, so ist

$$\varphi(1)\,\varphi(3)\,\varphi(5)\ldots\varphi(2n-1) > \{\varphi(n)\}^n.$$ Lp.

A. LINDHAGEN. Studier öfver Gammafunktionen och några beslägtade transcendenter. Upsala. Dissert.

Darstellung der Theorie der Gammafunction in unmittelbarem Anschluss an die Theorie der trigonometrischen Functionen, und Untersuchung einiger mit der Gammafunction verwandten Transcendenten. K.

M. LERCH. Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale eulérienne de première espèce. S. M. F. Bull. XV. 173-178.

Die Formel $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ wird, mit Voraussetzung der zwei ersten Relationen der Function Γ, auf Grund des Cauchy'schen Satzes über die Integrale zwischen imaginären Grenzen hergeleitet. H.

A. GENOCCHI. Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ ed alla serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo. Nap. Mem. (3) VI.

Seit 1883 als Separatabdruck erschienen. Vi.

U. BIGLER. Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter. J. für Math CII 237-254.

Will man die Γ-Function bei unbeschränkter Veränderlichkeit ihres Argumentes durch ein Integral darstellen, so kann man nach Hermann Hankel

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2i\pi}\int e^x x^{-a} dx$$

setzen, wo das Integral auf einem Wege zu erstrecken ist, welcher von $-\infty$ ausgeht, in positivem Sinne um den Nullpunkt führt und wieder nach $-\infty$ zurückkehrt. Auf Grund dieser Darstellung beweist der Verfasser zunächst die Haupt-Eigenschaften der Γ-Function. In ähnlicher Weise wird sodann die

Function $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, welche für geeignet beschränkte Werte von α, β durch das Euler'sche Integral erster Art dargestellt wird, behandelt. Eine allgemeingültige Integraldarstellung dieser Function findet der Verfasser in der Form

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{2i\sin\pi\alpha}\,V - \frac{e^{-i\pi\beta}}{2i\sin\pi\beta}\,W.$$

Hier bedeutet V das Integral $\int x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$, welches in positivem Sinne um den Punkt $x=0$ von einem beliebigen Werte t nach demselben Werte zurück zu erstrecken ist, während W dasselbe Integral bezeichnet, nur dass der Integrationsweg, an Stelle des Punktes $x=0$, den Punkt $x=1$ umkreist. Besondere Integralformen ergeben sich unter der Annahme, dass eine Gleichung von der Form $m\alpha+n\beta=\mu$ besteht, wobei m eine positive, n und μ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Auf den letzten Seiten der Abhandlung werden die Werte von $\Gamma(\frac{1}{3})$ und $\Gamma(\frac{1}{4})$ durch vollständige elliptische Integrale erster Gattung ausgedrückt. Der Verfasser findet:

$$[\Gamma(\tfrac{1}{3})]^3 = \frac{2^{\frac{7}{9}}}{3^{\frac{1}{4}}}\pi K \qquad \left(k=\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$[\Gamma(\tfrac{1}{4})]^2 = 4\sqrt{\pi}\,K \qquad (k=\sqrt{\tfrac{1}{2}}),$$

wobei die Bezeichnungen von Jacobi zu Grunde liegen. Hz.

L. Saalschütz. Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten. Schlömilch Z. XXXII. 246-250.

Mit der Gauss'schen Function $\Pi(\mu+1)$ stimmt für positive Werte von μ das hierfür gültige Integral $\Gamma(\mu)$ überein; als ein Integral, welches dies für negative Werte des Arguments thut, wird das folgende aufgestellt:

$$\Gamma_1(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}\left(e^{-x}-1+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1.2}\pm\cdots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right).dx$$
$$(-k>\mu>-k-1).$$

Diese Function lässt sich als Fortsetzung von $\Gamma(\mu)$ betrachten; denn es ist

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma_1(\mu) \quad \text{für} \quad 0 > \mu > -1,$$
$$\Gamma_1(\mu+1) = \mu\Gamma_1(\mu) \quad \text{für} \quad \mu < -1.$$

Ferner ist

$$\Gamma_1(-\alpha-k) = \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \cdot \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad (\alpha \text{ positiver, echter Bruch}),$$

also abwechselnd positiv und negativ, und erreicht, absolut genommen, in jedem Intervalle ein Minimum, dessen Stelle in den einzelnen Intervallen (mit wachsendem k) dem Endpunkte desselben immer näher rückt, und dessen Wert immer kleiner wird. Ebenso wie die von Herrn Prym (J. für Math. LXXXII. 165, F. d. M. VIII. 1876. 303) eingeführten Functionen $P(\mu)$ und $Q(\mu)$, durch deren Summe die Function $\Pi(\mu-1)$ dargestellt ist, für reelle positive Werte von μ mit

$$\int_0^1 x^{\mu-1}.e^{-x}dx \quad \text{resp.} \quad \int_1^\infty x^{\mu-1}.e^{-x}dx$$

übereinstimmen, ist dies für negative μ mit den Ausdrücken $P_1(\mu) - \varphi(\mu)$ und $Q_1(\mu) + \varphi(\mu)$ der Fall, wo

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{1.(\mu+1)} \pm \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!(\mu+k)}$$

für $-k > \mu > -k-1$ ist, und P_1 und Q_1 aus $\Gamma_1(\mu)$ hervorgehen, wenn die Grenzen dieses Integrals in 0 und 1, resp. 1 und ∞ verwandelt werden. T.

P. Schafheitlin. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral. Math Ann. XXX. 157-178.

Sonine. Sur les fonctions cylindriques. Math. Ann. XXX. 582-583.

Die neue Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe unterscheidet sich von der bekannten Euler'schen dadurch, dass sie unter dem Integralzeichen Bessel'sche Functionen enthält und in ihrer Gültigkeit auf Punkte der reellen Axe beschränkt ist. Die Function

$$\varphi(z) = \int_0^\infty \frac{J^\mu(x)J^\nu(xz)dx}{x^\lambda},$$

worin $J^{(n)}(x)$ die Bessel'sche Function n^{ter} Ordnung bezeichnet, genügt einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche durch die Substitutionen

$$\varphi(z) = z^{\nu}\psi(z), \quad z^2 = \xi$$

in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe übergeht, wenn man setzt $\mu = \alpha-\beta$, $\nu = \gamma-1$, $\lambda = \gamma-\alpha-\beta$. Nach bekannten Principien folgt hieraus zunächst die Darstellung des bestimmten Integrals in der Form

$$\int_0^{\infty} \frac{J^{\alpha-\beta}(x)J^{\gamma-1}(xz)\,dz}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}$$

$$= Az^{\gamma-1}F(\alpha, \beta, \gamma, z^2)+Bz^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z^2).$$

Die Bestimmung der Constanten A und B bildet den Hauptgegenstand der Arbeit, in deren einleitendem Teil die Hülfsformel

$$\int_0^{\infty} \frac{J^{n}(x)\,dx}{x^{n-\varkappa+1}} = \frac{\Pi\left(\frac{\varkappa}{2}-1\right)}{2^{n-\varkappa+1}\Pi\left(n-\frac{\varkappa}{2}\right)} \qquad \left(\begin{matrix} n > -\frac{1}{2} \\ 0 < \varkappa < n+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

entwickelt wird. Das Resultat der Untersuchung wird folgendermassen zusammengefasst: Ist weder $\alpha-\beta$, noch $\gamma-1$ eine negative ganze Zahl und sowohl α als auch $\gamma-\alpha-\beta+1$ grösser als Null, so ist

$$(1) \qquad \int_0^{\infty} \frac{J^{\alpha-\beta}(x)J^{\gamma-1}(xz)\,dx}{x^{\gamma-\alpha-\beta}} =$$

$$\frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-1)}\, z^{\gamma-1}F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) \qquad (z < 1),$$

$$\frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\alpha-\beta)}\, z^{\gamma-2\alpha-1}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z^2}\right)$$

$$(z > 1)$$

mit Ausnahme von $z = 0, 1, \infty$.

Bemerkenswert ist die Discontinuität, welche bei dem Integrale unter Umständen für $z = 1$ auftritt. So erhält man für $\beta = 0$, $\gamma = \alpha$

$$\frac{1}{z^{\alpha-1}}\int_0^{\infty} J^{\alpha}(x)J^{\alpha-1}(xz)\,dx = \begin{cases} 1\ (z^2 < 1), \\ \frac{1}{2}\ (z^2 = 1), \\ 0\ (z^2 > 1), \end{cases}$$

woraus sich als specielle Fälle, indem $\alpha = 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, bezüglich der Weber'sche (J. für Math. LXXV. 80, F. d. M. V. 1873. 569) und der Dirichlet'sche discontinuirliche Factor ergeben. Uebrigens werden aus der allgemeinen Formel (1) durch Specialisirung von α, β, γ viele zum Teil bekannte Integralformeln abgeleitet, u. a. die von Dirichlet und Mehler angegebenen Integralformeln der Kugelfunctionen.

In der zweiten Note reclamirt Herr Sonine für Herrn Hankel und sich die Priorität mehrerer in vorstehender Arbeit veröffentlichter Formeln. Hr.

E. Goursat. Sur des fonctions uniformes provenant des séries hypergéométriques de deux variables. C. R. CIV. 893-896.

Die Integrale

$$U = \int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du,$$

wo g und h die Grössen 0, 1, x, y, ∞ bedeuten, genügen einem System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche drei gemeinsame linear unabhängige Auflösungen zulassen. Während nun, wenn ω_1, ω_2, ω_3 solche drei Auflösungen sind, die Gleichungen

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = z, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = t$$

für x und y dann hyperfuchssche Functionen ergeben, falls $\lambda+\mu-1$, $2-\lambda-b_1-b_2$ und die analogen Ausdrücke die reciproken Werte ganzer Zahlen sind (Picard, Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 357, und C. R. CI. 1127, s. F. d. M. XVII. 1885. 412), liefern sie für x und y vierfach-periodische Functionen von z und t, wenn man

$$\lambda = \mu = b_1 = b_2 = \tfrac{1}{4}$$

setzt. Der Beweis wird mit Hülfe der hypergeometrischen Reihen geführt. Bm.

E. Picard. Sur les séries hypergéométriques de deux variables. C. R. CIV. 896.

Anschliessend an die vorstehend besprochene Note des Hrn. Goursat, weist Hr. Picard nach, dass der daselbst betrachtete Fall als Grenzfall der allgemeineren auf hyperfuchssche Functionen führenden Fälle angesehen werden kann, dass aber die auftretenden Functionen nicht eigentlich vierfach-periodisch, sondern in Bezug auf jede einzelne Variable doppelt-periodisch sind. Zugleich bemerkt er, dass die Annahme $\lambda = \mu = b_1 = \frac{3}{4}$, $b_2 = \frac{1}{4}$ auf wirkliche hyperfuchssche Functionen führt. Bm.

B. Elliptische Functionen.

de Sparre. Cours sur les fonctions elliptiques. Seconde partie. Brux. S. sc. XI. 200-292.

Dieser zweite Teil (s. F. d. M. XVIII. 1886. 390) enthält die Productentwickelung der Thetafunctionen, die von der Zerlegung dieser Functionen in Primfactoren ausgeht. Der Verf. beweist nach dem Vorgange von Hrn. Hermite die Sätze der Herren Weierstrass und Mittag-Leffler. Die Productentwickelungen der Thetafunctionen werden in einer Form gewonnen, aus welcher sich unmittelbar die Transformationsformeln ersten Grades in diesen Functionen ableiten lassen. Bei der Theorie der Multiplication weist Hr. de Sparre nach, wie man hierzu die Weierstrass'sche Function $\wp u$ gebrauchen kann. Zuletzt stellt er die partielle Differentialgleichung für die Function σu auf. Folgendes ist die Anordnung des Stoffes: I. Beschaffenheit der Punkte einer Function. II. Zerlegung der holomorphen Functionen in Primfactoren. III. Bestimmung des Geschlechts einer holomorphen Function nach der Verteilung ihrer Nullen. IV. Zerlegung von $\sin \pi x$ in Primfactoren. V. Definition der dop-

peltperiodischen Functionen dritter Art. VI. Zerlegung von σu in Primfactoren. VII. Theorem von Mittag-Leffler. VIII. Ausdruck für die doppeltperiodischen Functionen erster Art, die wesentlich singuläre Punkte haben. IX. Productentwickelung der Θ-Functionen. X. Transformation ersten Grades der Θ-Functionen. XI. Multiplication des Argumentes in den Functionen $\wp u$. XII. Partielle Differentialgleichung, der die Function σu genügt. Mn. (Lp.)

G. Pick. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Math. Ann. XXVIII. 309-318.

Es ist eine fundamentale Aufgabe der Theorie der elliptischen Functionen, die elementaren elliptischen Functionen, deren Argument durch ein in irgend welcher Form gegebenes elliptisches Integral erster Gattung ersetzt wird, als explicite Ausdrücke in den Grenzen und den Constanten dieses Integrals darzustellen. Das erforderliche Formelsystem ist seinem allgemeinen Bildungsgesetze nach erst vervollständigt durch die Auffassungsweise des Herrn Klein, wonach die verwendeten Ausdrücke als Covarianten einer binären Grundform vierten Grades, des homogen gemachten Polynoms unter der Wurzel, erscheinen. („Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen", Math. Ann. XXVII. 431-464, §. 11, s. F. d. M. XVIII. 1886. 418). In der vorliegenden Arbeit wird die obige allgemeine Aufgabe unter der Voraussetzung gelöst, dass das elliptische Gebilde in Form einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung vorgelegt ist (vgl. Wien. Ber. Juni 1886. F. d. M. XVIII. 381). Entsprechend zwei verschiedenen Annahmen für das Argument, werden zwei Reihen von Formeln gefunden. Die ersteren sind das genaue Analogon der Klein'schen Formeln für das binäre Gebiet, die zweite Reihe enthält als speciellen Fall die Formeln, welche Hermite und Brioschi (J. für Math. LXIII. 30) für die Transformation einer Curve dritter Ordnung auf die Weierstrass'sche Normalform gegeben haben. M.

V. Dantscher v. Kollesberg. Bemerkung zur Definition eines primitiven Periodenpaares einer doppeltperiodischen Function. Innsbruck. Ber. 1885. 5 S.

Kriterium für die Existenz eines primitiven Periodenpaares. M.

C. V. L. Charlier. Om utvecklingen af dubbelperiodiska funktioner i Fourierska serier. Stockh. Vetensk. Bihang 1887.

Entwickelung von doppeltperiodischen Functionen in Fourier'sche Reihen. K.

A. Johansson. Undersökningar öfver vissa algebraiska likheter, som leda till elliptiska integraler. Stockh. Öfv. XLIV. No. 10. 691-703.

Der Verfasser studirt die Gleichung

$$F(x)y^{2p}+G(x)y^p+H(x)=0,$$

stellt eine allgemeine Formel für den Rang derselben auf, bestimmt die Fälle, wo dieser gleich 1 ist, und berechnet zuletzt die Weierstrass'schen Functionen. K.

A. Johansson. Vilkoren för att en algebraisk likhet af formen $y^n=(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_r)^{m_r}$ skall leda till elliptiska integraler. Stockh. Öfv. XLIV. No. 10. 703-713.

Durch ein analoges Verfahren wie in der vorigen Abhandlung werden die Fälle aufgestellt, wo eine Gleichung dieser Form vom Range 1 wird. K.

M. Krause. Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. Math. Ann. XXX. 425-436, 516-534.

Die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter

Art, deren Theorie von Herrn Hermite auf die Primfunction $e^{\lambda x} \frac{\vartheta_1(v-b)}{\vartheta_1(v-a)}$ basirt ist (J. für Math. XCIII.), wurde durchgeführt von Jacobi, Scheibner und Hermite (s. F. d. M. XVII. 1885. 460). Die Theorie der Functionen dritter Art war Gegenstand der Arbeiten von Hermite, Biehler und Appell (s. F. d. M. XI. 1879. 281, XV. 1883. 340, XVI. 1884. 383, XVII. 1885. 385). Die Resultate dieser Arbeiten sind in eleganter Weise zusammengestellt in dem Werke von Halphen: „Traité des fonctions elliptiques", Paris 1886. Besonders Herrn Appell ist es gelungen, eine grosse Anzahl von Functionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Da aber bei dieser Behandlungsweise einmal die Functionen zweiter und die dritter Art ganz von einander getrennt werden, da ferner neue Primfunctionen eingeführt werden, die bisher in der Theorie der elliptischen Functionen noch keine Verwendung gefunden haben und mit den bisher betrachteten in keinem einfachen Zusammenhange stehen, da drittens der Umstand hinzukommt, dass in demjenigen Falle, wo die Zahl der Nullpunkte kleiner als die der Unendliche ist, die Primfunctionen nicht denselben Bedingungsgleichungen Genüge leisten, wie die zu construirenden, da es ferner nicht möglich war, analoge Primfunctionen im Gebiete der Functionen mehrerer Veränderlichen herzustellen, und da endlich der Fall, wo die Zahl der Nullstellen grösser ist als die Zahl der Unendliche, der endgültigen allgemeinen Lösung noch harrt: so hat Herr Krause das Problem der Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen in trigonometrische Reihen hier von einem neuen Gesichtspunkte behandelt.

Zunächst wird gezeigt, dass für den Fall, wo die Zahl der Nullstellen grösser oder gleich der Zahl der Unendliche ist, die Primfunction $\frac{\vartheta_1[k](nv-b, n\tau)}{\vartheta_1(v-a, \tau)}$ gewählt werden kann, die der Transformationstheorie entnommen ist, und es wird die Bestimmung der linear auftretenden Constanten in zwei Fällen unmittelbar in expliciter Form gegeben. Im Folgenden geschieht

dann die Bestimmung sämtlicher Constanten in expliciter Form. Indem die Functionen zweiter und dritter Art unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte betrachtet werden, werden als Primfunctionen die Grössen

$$\frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\vartheta_3(nv,n\tau),\qquad \frac{\vartheta_3(v-b,\tau)}{\vartheta_3(v-a,\tau)}\,\frac{1}{\vartheta_3(nv,n\tau)}$$

gewählt. Das Problem der Verwandlung in trigonometrische Reihen ist nunmehr nur für die Primfunctionen zu lösen, und dies geschieht mit Hülfe elementarer Methoden. Die Lösungen, welche in der zweiten Abhandlung wirklich ausgeführt werden, sind indirecte. Sie bestehen im wesentlichen darin, dass die eingeführten Primfunctionen mit Hülfe gewisser „Restfunctionen" in trigonometrische Reihen entwickelt werden. Diese Restfunctionen stehen in enger Beziehung zu den von Herrn Appell eingeführten Primfunctionen. M.

De Presle. Développement en produit des fonctions Θ et H de Jacobi et recherche des valeurs de ces fonctions quand les périodes sont divisées par un nombre entier. S. M. F. Bull. XV. 216-222.

Die Weierstrass'sche Methode für die Productentwickelung analytischer Functionen wird hier auf die Function Θ angewandt, aber insofern modificirt, als die Nullwerte nicht nach wachsenden Moduln geordnet werden, sondern nach den wachsenden Werten des einen Parameters, während der andere als constant angenommen wird, worauf alsdann die so erhaltenen Functionen nach wachsenden Werten des zweiten Parameters gruppirt werden. Indem man also in der Doppelsumme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x-(2m+1)K-(2n+1)K'i}$$

mit den Parametern $2m+1$ und $2n+1$ verfährt, erhält man

$$\Theta_1(x) = P\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+q^{2n+1}e^{\frac{\pi xi}{K}}\right)\left(1+q^{2n+1}e^{-\frac{\pi xi}{K}}\right),$$

wo $P=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2(n+1)})$, ebenso H_1 und daraus die Entwickelungen von Θ und H. M.

A. Cayley. Comparison of the Weierstrassian and Jacobian elliptic functions. Mess. (2) XVI. 129-132.

Ermittelung der genauen Beziehungen zwischen dem Weierstrass'schen $\sigma(u)$ und Jacobi's $H(u)$ einerseits, sowie zwischen $\wp u$ und $\operatorname{sn} u$ andererseits. Glr. (Lp.)

Malet, D. Edwardes, S. Marks. Solution of question 7707. Ed. Times XLVII. 68.

Ist $\Delta(\theta) = (1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$, $k^2+k'^2 = 1$, und sind K, K' vollständige elliptische Integrale erster Gattung mit den Moduln k, k', so ist:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} \log\sin\theta\,\{\log\operatorname{tg}\theta - \log\Delta(\theta)\}$$
$$= \tfrac{1}{4}K\{\log k\log k' + \tfrac{1}{4}\pi^2\} + \tfrac{1}{4}\pi K'\log k',$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} \log\cos\theta\,\{\log\operatorname{cotg}\theta - \log\Delta(\theta)\} = \tfrac{1}{8}\pi^2 K,$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\Delta(\theta)} \log\Delta(\theta)\,\{\log\Delta(\theta) - \log\sin\theta\cos\theta\}$$
$$= \tfrac{1}{2}K\log k\log k' + \tfrac{1}{4}\pi K'\log k'.$$

Lp.

G. Torelli. Alcune formole relative agl'integrali ellittici. Annali di Mat. (2) XV. 67-71.

Es werden folgende Formeln bewiesen:

$$\int K\,dk = (1-\vartheta_1)kK + \vartheta kE + \text{const.},$$
$$\int K'dk = (1-\vartheta_1)kK' + \vartheta k(K'-E') + \frac{\pi}{2}\arcsin k + \text{const.},$$
$$\int K\frac{dk}{k} = \left[-k'(\varkappa'-\varkappa_1') + \varepsilon_1 - (1-k') + \tfrac{1}{2}l\frac{1-k'}{1+k'}\right]K$$
$$+ (k'\varkappa'-\varepsilon)E + \frac{\pi}{4}l\frac{1-k'}{1+k'} + \text{const.},$$
$$\int K'\frac{dk}{k} = \left[-k'(\varkappa'-\varkappa_1') + \varepsilon_1 - (1-k') + \tfrac{1}{2}l\frac{1-k'}{1+k'}\right]K$$
$$+ (k'\varkappa'-\varepsilon)(K'-E') + \text{const.},$$

wo mit Bierens de Haan folgende Functionen eingeführt sind:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\varphi, k)\,d\varphi = s, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, F(\varphi, k)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \vartheta,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, F(\varphi, k')\frac{d\varphi}{\Delta^2(\varphi, k')} = \varkappa',$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} E(\varphi, k)\,d\varphi = s_1, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, E(\varphi, k)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \vartheta_1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, E(\varphi, k')\frac{d\varphi}{\Delta^2(\varphi, k')} = \varkappa'_1.$$

Damit sind die Integrale $\int k^m K dk$, $\int k^m K' dk$, wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, jetzt vollständig bestimmt, wenn die Resultate einer früheren Arbeit des Herrn Verfassers (Battaglini G. XI. 17-37; s. F. d. M. V. 260) berücksichtigt werden. (Siehe das folgende Referat). M.

G. Torelli. Alcune formole relative agl'integrali ellittici. Napoli Ann. Ist. Tecn. e Naut.

Der Verfasser gebraucht in dieser Note die einst klassischen Bezeichnungen in der Theorie der elliptischen Functionen; wir werden seinem Beispiele folgen und ausserdem nach seinem Vorgange setzen:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(\varphi, k)\,d\varphi = s, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} E(\varphi, k)\,d\varphi = s_1,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi . F(\varphi, k) . \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \theta, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi . E(\varphi, k) . \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \theta_1,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi . F(\varphi, k) . \frac{d\varphi}{\Delta^3(\varphi, k)} = u', \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi . E(\varphi, k) . \frac{d\varphi}{\Delta^3(\varphi, k)} = u'_1.$$

Dann bestehen die folgenden vier Relationen:

$$\int K dk = (1-\theta_1)kK + \theta kE + \text{const.},$$

$$\int K' dk = (1-\theta_1)kK' + \theta k(K'-E') + \tfrac{1}{2}\pi \arcsin k + \text{const.},$$

$$\int \frac{K}{k}\,dk = \left[-k'(u'-u_1') + \varepsilon_1 - (1-k') + \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k'}{1+k'}\right]K$$
$$+ (k'u'-\varepsilon)E + \tfrac{1}{4}\pi\log\frac{1-k'}{1+k'} + \text{const.},$$

$$\int \frac{K'}{k}\,dk = \left[-k'(u'-u_1') + \varepsilon_1 - (1-k') + \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k'}{1+k'}\right]K'$$
$$+ (k'u'-\varepsilon)(K'-E') + \text{const.}$$

Zum Beweise der beiden ersten betrachtet der Verfasser die beiden folgenden Hülfsfunctionen:

$$X = k\theta \qquad - K\arcsin k,$$
$$Y = k(1-\theta_1) + E\arcsin k$$

und zeigt, dass sie eine Lösung der beiden folgenden simultanen Differentialgleichungen darstellen:

$$\frac{dx}{dk} + \frac{x}{k} + \frac{y}{kk'^2} = 0, \qquad \frac{dy}{dk} - \frac{x}{k} - \frac{y}{k} - 1 = 0,$$

oder auch der anderen beiden:

$$kk'^2\frac{d^2x}{dk^2} + (1-3k^2)\frac{dx}{dk} - kx + 1 = 0,$$
$$kk'^2\frac{d^2y}{dk^2} + k'^2\frac{dy}{dk} + ky - 2k'^2 = 0.$$

Durch Integration dieser letzteren auf zwei Arten und durch Vergleichung der Resultate gelangt er zu dem angeführten Ergebnisse.

Ebenso betrachtet der Verf. zum Nachweise der beiden letzten die anderen Hülfsfunctionen:

$$X_1 = k'u' - \varepsilon + \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k'}{1+k'},$$
$$Y_1 = -k'(u'-u_1') + \varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k'}{1+k'}(K'-E') - (1-k')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k'}{1+k'},$$

welche den beiden folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{dx}{dk} + \frac{x}{k} + \frac{y}{kk'^2} = 0, \qquad \frac{dy}{dk} - \frac{x}{k} - \frac{y}{k} - \frac{1}{k} = 0;$$

ihre Integration führt zu den beiden letzten der obigen Relationen. (Siehe das vorstehende Referat). La. (Lp.).

Battaglini. Intorno ad un' applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all' integrazione dell'equazione differenziale ellittica. Napoli Rend. XXIV. 200-201. M.

R. Russell. On the transformations of the general elliptic element $\frac{dx}{\sqrt{U_x}}$, where
$U_x = x-\alpha.x-\beta.x-\gamma.x-\delta = ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e.$
Lond. M. S. Proc. XVIII. 48-58.

Auf der Basis der Theorie der Covarianten werden die Transformationen des elliptischen Integrals mittels einer Substitution ersten, zweiten, dritten oder vierten Grades erörtert. M.

E. Vorsteher. Zur Reduction der elliptischen Integrale in die Normalform. Schlömilch Z. XXXII. 145-151.

Die Richelot'schen Reductionsformeln bei linearer Substitution werden unter der Annahme, dass die vier Wurzeln des Polynoms unter der Quadratwurzel alle reell sind, hergeleitet, indem nicht von vornherein, wie bei Richelot und Durège, k als positiv angenommen wird. M.

A. Winckler. Ueber den Multiplicator der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung. Wien. Ber. XCV. 209-218.

Eine directe Herleitung des Multiplicators, welche die Kenntnis des algebraischen Integrals nicht voraussetzt. Die Relationen ergeben sich aus der Bedingung, dass die Coefficienten der beiden Functionen

$X = a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,\quad Y = a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4$

einander gleich sind. Bildet man nämlich die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung X', Y', X'', Y'', so hat man sechs Gleichungen, woraus entweder die drei letzten oder alle Coefficienten a eliminirt werden können. Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{(x-y)(X'+Y')-2(X-Y)}{(x-y)^2} = 2a_0(x+y)+a_1 = \frac{Y''-X''}{6(x-y)},$$

und aus diesen Gleichungen kann mittels leichter Umformungen sowohl der Multiplicator als das algebraische Integral der elliptischen Differentialgleichung abgeleitet werden. M.

Ol. Olsson. Harledning af Additionsteoremen för några Elliptiska Integralen. Zeuthen T. (5) V. 33-44.

Indem das Additionstheorem für die elliptischen Integrale erster Gattung als gegeben angesehen wird, wird das Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Gattung auf sehr einfache Weise hergeleitet. Weiter werden analoge Theoreme entwickelt für Integrale von den Formen

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi,\quad \int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi,\quad \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi,$$

wobei $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$.

Schliesslich wird, indem man das Additionstheorem für Integrale dritter Gattung als bekannt annimmt, dasjenige für Integrale von den Formen $\int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$ und $\int_0^\varphi \frac{\cos^{2n}\varphi}{\Delta\varphi}\,d\varphi$ entwickelt. V.

M. L. Albeggiani. Intorno ad alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche. Palermo Rend. I. 350-378.

Die Note betrifft die Cayley-Glaisher'sche Formel

$$-k'^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,r\,\mathrm{sn}\,s+\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,r\,\mathrm{cn}\,s-\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,r\,\mathrm{dn}\,s = -\frac{k'^2}{k^2}$$

für

$$u+v+r+s = 0$$

und deren Verallgemeinerung (s. F. d. M. XI. 1879. 287), sowie die Formeln von St. Smith für die Multiplication von vier Thetafunctionen (F. d. M. XI. 314). Es werden aus den bekannten Additionsformeln Jacobi's in seiner Abhandlung: „Sur la rotation

d'un corps" (Ges. Werke II. 289-352) andere Formeln vom Typus der oben genannten gewonnen, aus denen sich wieder die von Cayley und Smith ergeben; ebenso analoge für die Weierstrass'schen σ Functionen. M.

L. J. Rogers, J. Hammond. Solution of question 8462. Ed. Times XLVI. 39-40.

Ist $u+v+w = K$, so ist

$$Zu+Zv+Zw = \frac{k^2}{k'} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} w.$$

Ist $u+v+w = K+iK'$, so ist

$$Zu+Zv+Zw+\frac{i\pi}{2K} = \frac{i}{k'} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} w.$$

Lp.

O. Tognoli. Sulla funzione σu. Battaglini G. XXV. 367-378.

Eine einfachere Darstellung des Inhaltes von Chap. VIII des „Traité des fonctions elliptiques" von Halphen. Es enthält dieses Capitel die Reihenentwickelung von σu und die Beziehungen der Thetafunctionen zu den Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$, sowie die dreigliedrige Fundamentalformel für die σ-Functionen, die zu Jacobi's Fundamentalformel für die Thetafunctionen analog ist. M.

F. Caspary. Ueber die Verwendung algebraischer Identitäten zur Aufstellung von Relationen für Thetafunctionen einer Variabeln. Math. Ann. XXVIII. 493-498.

Einfache algebraische Identitäten werden benutzt, um die Weierstrass'sche Thetaformel für Producte aus je vier Thetafunctionen (Berl. Ber. 1882. 505; Schwarz-Weierstrass, Formeln etc. art. 38; Enneper, Gött. Nachr. 1883. 177), das Jacobi'sche Fundamentaltheorem (Ges. Werke I. 507) und, bei specieller Annahme für die Variabeln, die Cayley'sche Gleichung (Darboux Bull. I. 215) herzuleiten. Ferner ergiebt sich eine allgemeine Relation zwischen Producten von sechs Thetafunctionen. M.

F. Caspary. Sur une méthode élémentaire pour obtenir le théorème fondamental de Jacobi, relatif aux fonctions thêta d'un seul argument. C. R. CIV. 1094-1096.

Das Jacobi'sche Fundamentaltheorem (Ges. Werke I. 499) für die Thetafunctionen wird hier unter Zugrundelegung der Bezeichnung von Hermite (C. R. LXXXVI. 852)

$$\vartheta_{\mu,\nu}(u) = e^{-\frac{1}{2}\mu\nu i\pi}\Sigma(-1)^{m\nu}e^{\frac{i\pi}{K}[(2m+\mu)u+\frac{1}{4}(2m+\mu)^2 iK']}$$

und mit Hülfe der Formel

$$\vartheta_{\mu,\nu}(u+v,\ q)\vartheta_{\mu,\nu}(u-v,\ q)$$
$$= \vartheta_{0,0}(2u,\ q^2)\vartheta_{\mu,0}(2v,\ q^2)+(-1)^{\nu}\vartheta_{1,0}(2u,\ q^2)\vartheta_{\mu+1,0}(2v,\ q^2)$$

hergeleitet. M.

W. Scheibner. Ueber die Producte von drei und vier Thetafunctionen. J. für Math. CII. 255-259.

Herr Kiepert hat zuerst die Beziehung zwischen $\chi_1(u)$ und dem Product $\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u$ abgeleitet (J. f. Math. LXXXVII. 213); deshalb nennt Herr Scheibner die Functionen χu, $\chi_1 u$, $\chi_2 u$, $\chi_3 u$ die Kiepert'schen Functionen. Zwischen ihnen und den Thetafunctionen bestehen, wie hier gezeigt wird, die Gleichungen:

$$\vartheta_2 u\,\vartheta(2u,\ q^2) = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1(q^2)\chi_1(u,\ q),$$
$$\vartheta_3 u\,\vartheta_1(2u,\ q^2) = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1(q^2)\chi(u,\ q),$$
$$\vartheta_1 u\,\vartheta(2u,\ q^2) = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1(q^2)\chi_2(u),$$
$$\vartheta u\,\vartheta_1(2u,\ q^2) = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1(q^2)\chi_3(u),$$

und aus diesen folgt:

$$\sqrt{\varkappa}\sin\varphi = \frac{\chi u}{\chi_1 u},\quad \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\cos\varphi = \frac{\chi u}{\chi_2 u},\quad \frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\Delta\varphi = \frac{\chi u}{\chi_3 u}.$$

In einem zweiten Paragraphen betont Herr Scheibner die Aequivalenz der von Herrn Weierstrass (Berl. Monatsber. v. 27. April 1882) gegebenen dreigliedrigen σ-Formel mit der Jacobi'schen ϑ-Formel (Ges. Werke I. 507) und leitet die erstere aus der letzteren her. M.

L. Kronecker. Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln. J. für Math. CII. 260-272.

Durch Betrachtung der Functionen

$$T_h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \vartheta_h(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_0-\zeta_1)\vartheta_h(\zeta_2+\zeta_3)\vartheta_h(\zeta_2-\zeta_3),$$

wo

$$\vartheta_0(\zeta) = \Sigma(-q)^{n^2}e^{2n\zeta\pi i}, \quad i\vartheta_1(\zeta) = q^{\frac{1}{4}}\Sigma(-1)^n q^{n^2+n}e^{(2n+1)\zeta\pi i},$$

$$\vartheta_3(\zeta) = \Sigma q^{n^2}e^{2n\zeta\pi i}, \quad \vartheta_2(\zeta) = q^{\frac{1}{4}}\Sigma q^{n^2+n}e^{(2n+1)\zeta\pi i},$$

ergiebt sich, dass T_2+T_3 eine symmetrische Function der vier Grössen ζ ist. Dieses Resultat ist nichts anderes als die berühmte Fundamentalgleichung für die Theorie der Thetafunctionen, die Jacobi gegeben hat. Ferner ist die Summe der drei conjugirten Werte von T_1 gleich Null, und dieser Satz ist identisch mit der Weierstrass'schen dreigliedrigen σ-Formel (Berl. Monatsber. 1882. 505). Vgl. die vorstehend angeführte Abhandlung. Nach Herleitung allgemeinerer Thetaformeln bemerkt Herr Kronecker, dass die Möglichkeit der Ableitung der Jacobi'schen Formel aus der Weierstrass'schen sich schon in dem Werke von Briot und Bouquet: „Théorie des fonctions elliptiques" p. 495 finde, und leitet umgekehrt die Weierstrass'sche Formel aus der Jacobi'schen Thetaformel her. M.

A. Delisle. Bestimmung der allgemeinsten der Functionalgleichung der σ-Function genügenden Function. Math. Ann. XXX. 91-119.

In der von dem jung verstorbenen Verfasser hinterlassenen und von der Redaction der Annalen abgedruckten Abhandlung wird eine Andeutung des Herrn Weierstrass weiter ausgeführt, die in Berl. Ber. 1882. 508 über die dreigliedrige Functionalgleichung

$$\Sigma\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3) = 0$$

für die σ-Function (siehe Weierstrass-Schwarz, Formeln und Lehrsätze etc. art. 38) gemacht wurde. Es wird zunächst eine Potenzreihe bestimmt, welche formell der obigen Functionalgleichung genügt; alsdann wird die Convergenz dieser Reihe

untersucht, und endlich wird der Zusammenhang der allgemeinen Sigmafunction mit der speciellen, von Herrn Weierstrass eingeführten σ-Function und mit den elliptischen Functionen überhaupt erörtert. In einer Fussnote bemerken die Herausgeber, dass die Arbeit in § 5 eine vom Verfasser selbst hervorgehobene Annahme betreffs des Nichtverschwindens einer gewissen Determinante enthält, die noch einer weitergehenden Begründung bedarf.

M.

J. W. L. Glaisher. On the deduction of the q-series for the elliptic functions from the q-products. Mess. (2) XVI. 133-139.

In jeder ausführlichen Behandlung der elliptischen Functionen geht gewöhnlich die Betrachtung der q-Producte derjenigen der q-Reihen voran, indem die letzteren aus den ersteten abgeleitet werden. Im XVII. Bande des Quart. Journ. („A chapter in elliptic functions" F. d. M. XII. 1880. 362) hat der Verfasser die Art, in welcher dieser Uebergang von Jacobi und danach von Durège bewerkstelligt wurde, kurz vorgeführt, darauf aber einen systematischen Gang zur Ableitung des Systems der zwölf Reihen aus den Producten angegeben; hierbei wurde hauptsächlich der Gedanke benutzt, die Producte in binomische Factoren aufzulösen und an diesen Factoren die Ueberführung zu vollziehen. Diese Methode ist direct und geht gerade auf das Ziel los; mehrere Jahre hindurch bediente sich auch der Verfasser ihrer in seinen Vorträgen; doch fühlte er immer das Bedürfnis nach einem kürzeren und fördersameren Wege zur Erlangung der Reihen. Der vorliegende Aufsatz enthält die Methode, durch welche der Verfasser sehr bequem, wie er meint, von den Producten zu den Reihen übergeht.

Von den q-Producten für $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ ausgehend, leitet er die Reihen für $\log\mathrm{sn}\,u$, $\log\mathrm{cn}\,u$, $\log\mathrm{dn}\,u$ und ihre Ableitungen

$$\varrho\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},\quad \varrho\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},\quad k'^2\varrho\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

nach der gewöhnlichen Art ab. Die Reihen für $\mathrm{ns}\,u$, $\mathrm{ds}\,u$, $\mathrm{cs}\,u$

werden dann vermittelst der Formeln gewonnen:

$$2\,\mathrm{ns}\,2u = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} + \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + k^2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},$$

$$2\,\mathrm{ds}\,2u = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} + \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} - k^2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},$$

$$2\,\mathrm{cs}\,2u = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} - \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + k^2\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}.$$

Die anderen neun Reihen werden aus diesen durch eine Transformation des Arguments abgeleitet. Die Abhandlung enthält auch ein System von Formeln, welche im Zusammenhange mit den Reihen vorkommen. Glr. (Lp.)

N. M. Ferrers. Squaring $\varrho\,\mathrm{dn}\,u$. Mess. XVI. 189-190.

Die q-Reihe für $\varrho^2\mathrm{dn}^2u$ wird durch Benutzung des Umstandes erhalten, dass $\varrho\,\mathrm{dn}\,u + k\varrho\,\mathrm{cn}\,u$ dieselbe Function von $q^{\frac{1}{2}}$ und x ist, wie $\varrho\,\mathrm{dn}\,u$ von q und $2x$. Glr. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. On the process of squaring the q-series for $k\varrho\,\mathrm{sn}\,u$, $k\varrho\,\mathrm{cn}\,u$, $\varrho\,\mathrm{dn}\,u$. Mess. (2) XVI. 145-149.

Im § 41 der Fundamenta nova erhält Jacobi die q-Reihe für $k^2\varrho^2\mathrm{sn}^2u$ durch Multiplication der q-Reihe für $k\varrho\,\mathrm{sn}\,u$ mit sich selbst. In der gegenwärtigen Note giebt der Verf. zur Quadrirung der q-Reihen für $k\varrho\,\mathrm{sn}\,u$, $k\varrho\,\mathrm{cn}\,u$, $\varrho\,\mathrm{dn}\,u$ eine directe Methode, welche einfacher und förderlicher erscheint als die Jacobi'sche. Glr. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. On the process of squaring the Zeta-function. Mess. (2) XVI 150-151.

Die in der vorangehenden Arbeit gebrauchte directe Methode wird zur Gewinnung des Quadrates der q-Reihe für $\varrho Z(u)$ benutzt. Glr. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. On the transformation and developments of the twelve elliptic functions and the four Zeta-functions. Mess. (2) XVII. 1-18.

Der Zweck der Abhandlung ist besonders, die Transformation der 16 Functionen zu geben (12 elliptische und 4 Zetafunctionen), die von der Verwandlung von q in $-q$, q^2 und $q^{\frac{1}{2}}$ herrühren. Die ersten Glieder (im allgemeinen vier) der Entwickelungen der 16 Functionen nach aufsteigenden Potenzen des Arguments werden auch gegeben.

Die Transformationen werden in Tabellen geordnet und betreffen nicht bloss $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, ..., sondern auch $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, ... und $k\varrho \operatorname{sn} u$, $k\varrho \operatorname{cn} u$, ..., wo $u = \varrho x$ und $\varrho = \frac{2K}{\pi}$.

Andere Tafeln betreffen die Vermehrung des Argumentes um K, iK' und $K + iK'$.

Die Abhandlung kann (insofern sie die elliptischen Functionen betrifft) als die Fortsetzung der beiden Aufsätze „On elliptic functions“ in Mess. (2) XI. 81-95, 120-138 angesehen werden. Glr. (Lp.)

Ch. Hermite, G. B. Mathews. Solution of question 8717. Ed. Times XLVI. 111.

Man hat

$$e^{\frac{i\pi x}{2K}} \frac{H^2[x + \frac{1}{2}Ki']}{\Theta^2(x)} = A \sin x + BD_x \operatorname{sn} x,$$

wo

$$A = i\frac{H^2[K + \frac{1}{2}iK']}{\Theta^2(K)}, \quad B = \frac{H^2(\frac{1}{2}iK')}{\Theta^2(0)}.$$

Lp.

A. Cayley. On the transformation of elliptic functions. American J. IX. 193-224, X. 71-93.

Die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird hier in folgender, von der Jacobi'schen verschiedenen Weise

behandelt. Statt der Gleichung

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{1-y^2 \,.\, 1-\lambda^2 y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \,.\, 1-k^2 x^2}}$$

legt Herr Cayley die $\varrho\alpha\beta$-Form, wie er sie nennt, nämlich

$$\frac{dy}{\sqrt{1-2\beta y^2+y^4}} = \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{1-2\alpha x^2+x^4}}$$

zu Grunde. Durch Entwickelung einer jeden Seite in eine Reihe, durch Integration und Umkehrung der resultirenden Reihe für y erhält man y in der Form:

$$y = \varrho x(1+\Pi_1 x^2+\Pi_2 x^4 + \cdots),$$

wo Π_1, Π_2, ... gegebene Functionen von ϱ, α, β bezeichnen. Ist n ungerade, $= 2s+1$, so wird für y ein Ausdruck

$$y = \frac{x(A_s+A_{s-1}x^2 + \cdots + A_1 x^{2s-2} + x^{2s})}{1+A_1 x^2 + \cdots + A_{s-1}x^{2s-2}+A_s x^{2s}}$$

angenommen, wo $A_s = \varrho$. Durch Vergleichung mit der obigen Reihe für y erhält man eine unendliche Reihe von Gleichungen. s derselben geben die Coefficienten A_1, A_2, ..., A_s als Functionen der Π, d. h. von ϱ, α, β; die beiden folgenden bestimmen ϱ, β als Functionen von α; die übrigen müssen identische Gleichungen sein. Am schwierigsten ist die Bestimmung des vollständigen Systems der Gleichungen zwischen ϱ, α, β, oder der „Multiplicator-Modular-Curve“. In Verbindung mit dieser Theorie betrachtet Herr Cayley die Lösungen des Transformationsproblems durch Jacobi's partielle Differentialgleichung (Crelle J. IV. 185 - 193) und durch die Jacobi - Brioschi'schen Differentialgleichungen (Crelle J. IV. 376, und Trattato elementare delle funzioni ellittiche, Milano 1880). Ferner werden die Resultate verwertet aus des Herrn Verfassers Abhandlungen: On the transformation of elliptic functions, Phil. Trans. CLXIII. 1873. 397-456, und CLXXXVIII. 1878. 419-424. In den vorliegenden beiden Abhandlungen ist die Transformation für $n = 3$, 5 und 7 durchgeführt. M.

A. Cayley. Note sur la transformation du septième ordre, des fonctions elliptiques. Ass. Franç. (Toulouse.) 211-213.

J. Griffiths. Note on two annihilators in the theory of elliptic functions. Lond. M. S. Proc. XVIII. 164-169.

Jede algebraische elliptische Transformationsgleichung $y=\frac{P}{Q}$, welche giebt:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2\,.\,1-\lambda^2y^2}}=M\frac{dx}{\sqrt{1-x^2\,.\,1-k^2x^2}},$$

$$\Theta\{M(u+a)+\Delta,\lambda\}=Ce^{\mu u^2+\nu u}\Theta^n u\,.\,R(\operatorname{sn}u),\qquad R=\sqrt{Q^2-\lambda^2P^2},$$

$$\Theta\{M(u+a),\lambda\}=C\sqrt{\lambda'}\,e^{\mu u^2+\nu u}\,\Theta^n u\,.\,Q(\operatorname{sn}u),$$

$$M^2=n\frac{kk'^2}{\lambda\lambda'^2}\frac{d\lambda}{dk},$$

hat 2 „Annihilatoren" Ω und O, d. h.: werden die Functionszeichen

$$\Omega=nkk'^2\frac{d}{dk}+(1-x^2)(1-k^2x^2)\,\varphi(x,k)\frac{d}{dx},$$

$$\varphi(x,k)=\frac{nk^2x}{1-k^2x^2}+\frac{1}{R}\frac{d}{dx}R,$$

$$O=nkk'^2\frac{d}{dk}+(1-x^2)(1-k^2x^2)\,f(x,k)\frac{d}{dx},$$

$$f(x,k)=\frac{nk^2x}{1-k^2x^2}+\frac{1}{S}\frac{d}{dx}S,$$

wo $S^2=Q^2-P^2$ ist, auf y oder $\frac{P}{Q}$ angewandt, so ist

$$\Omega y=\Omega\frac{P}{Q}=0$$

und

$$O\lambda y=O\lambda\frac{P}{Q}=0.$$

Es werden noch andere Formen für Ω und O angegeben.

M.

J. Griffiths. Second note on elliptic transformation annihilators. Lond. M. S. Proc. XVIII. 377-388.

In gegenwärtiger Note werden die Eigenschaften der beiden Functionen $G(x,k)$ und $g(x,k)$ untersucht, welche in den Anni-

hilatoren

$$\Omega = nkk'^2 \frac{d}{dk} + \sqrt{1-x^2 . 1-k^2x^2} \frac{d}{dx},$$

$$O = nkk'^2 \frac{d}{dk} + \sqrt{1-x^2 . 1-k^2x^2} \frac{d}{dx}$$

vorkommen und welche, wie gezeigt wird, von grosser Bedeutung für die Theorie der Transformation sind. M.

Faa de Bruno. Démonstration directe de la formule Jacobienne de la transformation cubique. American J. X. 169-172.

Aus den Gleichungen für die Transformation dritten Grades:

$$y = x\frac{a_0 + a_1 x^2}{1+b_1 x^2}, \quad a_0 = 1+2\alpha,$$

$$b_1 = \alpha(\alpha+2), \quad a_1 = \alpha^2 = \sqrt{\frac{\varkappa^3}{\lambda}}, \quad \sqrt[4]{\varkappa} = u,$$

$$\sqrt[4]{\lambda} = v, \quad \alpha = \frac{v^3}{u}, \quad u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2) = 0$$

wird die Formel

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{\mu}, \lambda\right) = \frac{\operatorname{sn}(u)}{\mu} \cdot \frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2(u)}{\operatorname{sn}^2(\frac{2}{3}K)}}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2\frac{2}{3}K}$$

der Fundamenta Jacobi's hergeleitet. Zugleich wird ein Resultat des Herrn Cayley (Am. J. IX), die Darstellung der Modulargleichung

$$u^{16}+v^{16}+12(v^{12}u^4+u^{12}v^4)-16(v^4u^4+v^{12}u^{12})+6u^8v^8 = 0$$

als Function von $2\alpha = \varkappa+\frac{1}{\varkappa}$, $2\beta = \lambda+\frac{1}{\lambda}$ betreffend, auf anderem Wege gewonnen. M.

H. Sylow. Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Journ. de Math. (4) III. 109-254.

Die von Abel (Oeuvres compl. I. Mém. XIX. XX) inaugurirte, von Hermite und Kronecker weitergeführte Theorie der

complexen Multiplication der elliptischen Functionen ermangelte bisher einer zusammenhängenden und systematischen Begründung und Darstellung; eine solche giebt der Verfasser in der vorliegenden umfangreichen Arbeit.

Die moderne Auffassung, derzufolge der ganzen Theorie der elliptischen Moduln nicht die Grösse k^2, sondern die absolute Invariante J als der einfachste Modul zu Grunde gelegt wird, ist vom Verfasser wohl absichtlich bei Seite gelassen worden: dafür geniesst seine Arbeit des Vorzuges, mit möglichst elementaren Mitteln zu operiren, und die Methode ist daher, abgesehen von den (erst im weiteren Verlaufe auftretenden) gruppen-theoretischen Entwickelungen, eine wesentlich rechnerische. Als Fundament des Ganzen dient der Abel'sche Satz: „Soll eine complexe Multiplication des elliptischen Integrals erster Gattung z stattfinden, d. h. soll eine Relation von der Art bestehen:

$$\lambda(\varepsilon z+\alpha,\ k) = f[\lambda(z,\ k)],$$

wo ε den complexen Multiplicator, α eine additive Constante und f eine rationale Function bedeutet, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass die Elementarperioden 2ω, ω' von z den Bedingungen genügen:

$$\varepsilon.2\omega = p.2\omega+q\omega',$$
$$\varepsilon\omega' = p'.2\omega+q'\omega',$$

wo die ganzen Zahlen p, q, p', q' durch

$$pq'-p'q = n$$

verbunden sind. n ist dann zugleich der Grad von f."

Unterwirft man noch die 2ω, ω' linearen Transformationen, so liefert der Satz zugleich alle möglichen Multiplicationen.

Das Verhältnis $\zeta = \dfrac{\omega'}{2\omega}$ der beiden Perioden genügt dann einer ganzzahligen quadratischen Gleichung:

$$A\zeta^2+B\zeta+C = 0;$$

nur im Falle der „gewöhnlichen" Multiplication wird ζ unbestimmt. Das letztere bleibt von jetzt ab ausgeschlossen. Jedem ζ entspricht eine unendliche Menge von Werten $\varepsilon = p+q\zeta$. Die einfachsten ε erhält man, wenn n zu einem Minimum gemacht

wird, und zwar wird $\varepsilon = i\sqrt{n}$, $n = ac - b^2$ für ein gerades $B = 2b$, für ein ungerades $B = 2b + 1$ aber:

$$\varepsilon = \frac{1 + i\sqrt{4n-1}}{2}, \quad n = ac - b(b+1),$$

woraus alle anderen Multiplicationen leicht abzuleiten sind, und demnach in zwei Klassen zerfallen. Den beiden genannten Klassen entsprechend heisst k^2 ein „singulärer" Modul der ersten oder zweiten „Art", n sein „Grad", $-n$ resp. $-(4n-1)$ die zugehörige „Determinante".

Umgekehrt definirt jede ganzzahlige quadratische Form (oder Gleichung) von negativer Determinante einen singulären Modul. Damit zwei Werte von ζ zu dem nämlichen Modul führen, ist notwendig, dass die bezüglichen quadratischen Formen eigentlich äquivalent sind. Mithin gehört jeder singuläre Modul der ersten Art zu einer eigentlich primitiven Klasse der Determinante $-n$, und ein jeder der zweiten Art zu einer uneigentlich primitiven Klasse der Determinante $-(4n-1)$.

Aus der Theorie der linearen Transformationen von ζ geht hervor, dass zu ein und derselben Klasse quadratischer Formen sechs verschiedene Werte von k^2 gehören, die nur im Falle der „linearen singulären" Moduln zu je zweien resp. dreien coincidiren.

Neben die Einteilung der singulären Moduln k^2 in solche erster und zweiter Art stellt sich eine andere in solche der ersten resp. zweiten „Kategorie", je nachdem der erste Coefficient A der bez. quadratischen Form gerade oder ungerade ist. Die reellen Werte von k^2 gehören immer zu ambigen quadratischen Formen und umgekehrt.

Um nun zunächst für die „einfachsten" Werte von ε die Formeln der complexen Multiplication, sowie die algebraische Bestimmung der zugehörigen Moduln zu finden, werden die bez. Transformationsformeln wirklich aufgestellt. Die n verschiedenen Werte von $\lambda(z)$, die einem und demselben Werte von $\lambda(\varepsilon z + \alpha, k_1)$ entsprechen, sind in der Gestalt

$$\lambda\left(z + \frac{p\Omega}{n}\right) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, (n-1))$$

angebbar, wo die „Periode" Ω eine gewisse lineare Form der

2ω, ω' vorstellt. Sei, in Primfactoren zerlegt,

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3} \ldots,$$

so liefert

$$N = q_1^{\beta_1 - 1}(q_1 + 1) q_2^{\beta_2 - 1}(q_2 + 1) \ldots$$

die Anzahl der zu verschiedenen Transformationen Veranlassung gebenden Perioden Ω; jedem der letzteren Werte correspondiren wiederum mehrere Transformationen, unter denen eine einfachste als die „Haupttransformation" herausgehoben wird. Dann genügen die bezüglichen Moduln ein und derselben algebraischen Gleichung, die bereits von fremden Lösungen befreit ist. Aus jeder „Haupttransformation" lassen sich immer die andern mittels linearer Transformationen ableiten.

Setzt man nachträglich wieder die transformirten Elementar-Perioden $2\omega_1$, ω_1' sowie den transformirten Modul k_1 gleich den ursprünglichen 2ω, ω', k, so hat man $\lambda(sz + \alpha, k)$ als rationale Functionen von $\lambda(z)$ und zugleich eine algebraische Gleichung $F = 0$ für k, oder k^2, oder auch $\sqrt{k}$.

Diese letztere Gleichung besitzt aber fremdartige Lösungen, vor allem die zu kleineren n gehörenden Moduln, und es handelt sich im weiteren um die Ausscheidung derselben. Es ergiebt sich, dass dies mittels rationaler Processe möglich ist, und das Gleiche gilt für die Reduction der eigentlichen, aber vielfach auftretenden Wurzeln von $F = 0$ auf einfache.

Die Beweise werden verschieden geführt, je nach der Art und Kategorie, der k^2 angehört, und je nachdem der Grad n von der Form $4h+1$ oder $4h+3$ ist. Zur Erläuterung werden die bekannten Modulargleichungen für die niedrigsten Zahlen n noch einmal abgeleitet. Die so entwickelte Theorie der Modulargleichungen erlaubt als wichtige Anwendung den vollständigen Beweis der bekannten Kronecker'schen Klassenanzahlformeln für einen ungeraden Transformationsgrad. Es erweist sich dabei als zweckmässig, mit gewissen Formen reducibler Modulargleichungen zu operiren. Der Verfasser wendet sich darauf zur Untersuchung der „Teilungsgleichungen" $F = 0$ des Grades $n^2 - 1$ (wo n als ungerade vorausgesetzt wird), deren Coefficienten ganzzahlige Functionen von k^2 sind.

Sei ein solcher Periodenteil bezeichnet durch

$$\frac{r.2\omega+s\omega'}{n},$$

so fliesst aus der Theorie der Modulargleichungen unter anderem das wichtige Theorem, dass für $\varepsilon = i\sqrt{D}$ die elliptische Function $\lambda\left[\frac{(r+s\varepsilon)\Omega}{n}\right]$ als eine rationale Function der einfacheren $\lambda\left(\frac{\Omega}{n}\right)$ darstellbar ist, deren Coefficienten sowohl in k^2 wie in ε ganz sind. Darauf beruht ein einfacher Beweis des Hauptsatzes, dass die Teilungsgleichung $F=0$, wenigstens nach Adjunction von ε, eine Abel'sche Gleichung wird. Ein eingehenderes Studium der Auflösung dieser Gleichung erfordert jedoch die Untersuchung ihrer Gruppe.

Wenn n eine ungerade Primzahl (auf welchen Fall man sich beschränken darf), so ist die gemeinte Gruppe identisch mit der „linearen" Gruppe des Grades n^2-1, welche sich nach Adjunction der n^{ten} Einheitswurzeln auf die Gruppe der „Monodromie" reducirt; in der letzteren sind enthalten die linearen Substitutionen, deren Determinante der Einheit nach dem Modul n congruent ist.

Es werden drei Hauptfälle unterschieden, je nachdem die Determinante $-D$ quadratischer Rest resp. Nichtrest von n, oder durch n teilbar ist; jedesmal tritt wieder eine andere Zerlegung der Gleichung $F=0$ ein, und wird damit ihre Auflösung bewerkstelligt.

Das Folgende beschäftigt sich mit der Transformation der singulären Moduln; der ursprüngliche und der transformirte (wiederum singuläre) Modul genügen bei gegebener Determinante $-D$ derselben algebraischen Gleichung. Für die Wurzeln der letzteren hat Abel einen berühmt gewordenen Satz ausgesprochen, den der Verfasser folgendermassen präcisirt: „Nach Adjunction der Grösse $i\sqrt{D}$ drückt sich das Quadrat jedes singulären Moduls rational aus durch das Quadrat eines jeden andern, zur nämlichen Determinante, Art und Kategorie gehörigen Moduls".

Die gemeinte Gleichung, als solche für k^2 aufgefasst, wird also nach Adjunction von $i\sqrt{D}$ eine Abel'sche. Die Zerlegung

dieser Gleichung in irreducible Factoren führt wiederum zu Beweisen bekannter Sätze über die Composition quadratischer Formen.

Zum Schlusse wird auf den (nur unerheblichen) Unterschied zwischen der Kronecker'schen Klassification der singulären Moduln und der vom Verfasser gewählten hingewiesen. My.

A. CAYLEY. Note on Kiepert's L-equations, in the transformation of elliptic functions. Math. Ann. XXX. 75-78.

Die Bemerkung bezieht sich auf die Gleichungen für die Grössen L, die Herr Kiepert in seiner Abhandlung: „Ueber Teilung und Transformation der elliptischen Functionen", Math. Ann. XXVI. 369-454 (s. F. d. M. XVII. 1885. 444) aus den f-Gleichungen durch die Substitutionen

$$L = Q^{n-1}f,\quad \gamma_2 = \frac{g_2}{Q^6},\quad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}$$

erhalten hat. Herr Cayley bemerkt, dass aus einer Vergleichung mit Herrn Klein's Abhandlung: „Ueber die Transformation u. s. w." in Math. Ann. XIV. 144, dieses L als das Quadrat des Multiplicators für das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normirte Integral erscheint. Es wird dies für $n=5$ gezeigt. M.

W. BURNSIDE. On the trisection of the periods for Weierstrass's elliptic functions. Mess. (2) XVI. 177-180.

Der Verf. berechnet den Wert von $\wp(3u)$ in $\wp(u)$ ausgedrückt und wendet das Ergebnis an, um Ausdrücke für $\wp\{\frac{1}{3}(2n\omega+2n'\omega')\}$ für verschiedene Werte von n und n' zu erhalten. Glr. (Lp.)

A. G. GREENHILL. Complex multiplication of elliptic functions. Quart. J. XXII. 119-150, 174.

Die Aufgabe der complexen Multiplication der elliptischen Functionen besteht darin, die Modulargleichung in dem Falle zu

lösen, wo das Verhältnis der Perioden der elliptischen Functionen die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl Δ ist, die entweder eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch, und die elliptischen Functionen des complexen Arguments $(a+bi\sqrt{\Delta})u$ durch die elliptischen Functionen des Arguments u auszudrücken. Im Vorliegenden wird diese Theorie für die Weierstrass'sche Function $\wp u$, für welche sie sich weit einfacher als für sn$u$ oder cn$u$ gestaltet, durchgeführt. M.

P. Biedermann. Ueber Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen. Hoppe Arch. (2) V. 1-90, Diss. Leipzig.

Da die den Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen zu Grunde gelegte Modulform nach Weierstrass'scher Bezeichnung

$$F(\omega_1,\ \omega_2) = \sqrt{e_i-e_k},$$

also eine wirkliche Modulform, aber bei den Modulargleichungen speciell eine Modulfunction $F(\omega_1,\ \omega_2) = F(1,\ \omega) = \sqrt[4]{k}$ ist, so nennt der Herr Verfasser überhaupt die betreffenden algebraischen Gleichungen zwischen transformirten und nicht-transformirten Grössen Multiplicator- resp. Modular-Gleichungen, je nachdem es sich dabei um transformirte Modul-Formen resp. Modul-Functionen handelt. Die Multiplicatorgleichungen für g_2, g_3, $\sqrt[24]{\Delta}$ sind erster Stufe, da die Modulformen g_2, g_3, $\sqrt[24]{\Delta}$ der Gesamtgruppe der linearen Substitutionen der Perioden ω_1, ω_2 zugehören, resp. ihr adjungirt sind. Da aber die Modulformen $\sqrt{e_i-e_k}$ der Gruppe der linearen Substitutionen der Perioden, welche mod. 2 zur Identität congruent sind, adjungirt sind, so sind die Jacobi'schen Multiplicator-Gleichungen als solche zweiter Stufe zu bezeichnen.

In diesem Sinne werden hier Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe behandelt, indem fundamentale Modulformen höherer Stufe für die Transformationen zu Grunde gelegt werden, nämlich die Teilwerte der σ-Function:

$$\sigma_{\lambda\mu} = -e^{-\frac{1}{2s^2}(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}\ \sigma\left(\frac{1}{s}(\lambda\omega_1+\mu\omega_2),\ \omega_1,\ \omega_2\right)$$

(vgl. Klein, Leipz. Ber. 1884). Zuerst werden die Multiplicatorgleichungen der Teilwerte der σ-Functionen allgemein bei beliebigem s untersucht, im zweiten Abschnitt aber die niedrigsten Stufen specieller eingehend behandelt. M.

R. Fricke. Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe. Math. Ann. XXIX. 97-122.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind bereits im 4[ten] Capitel der Dissertation des Herrn Verfassers: „Ueber Systeme elliptischer Modulfunctionen von niederer Stufenzahl", Leipzig 1885 (s. F. d. M. XVIII. 1886. 403) veröffentlicht. Da für zusammengesetzte Stufenzahlen die gefundenen Modulsysteme noch nicht die einfachsten sind, so ist die ausführliche Behandlung derselben von Wichtigkeit. Der Herr Verfasser hat gerade die sechste Stufe gewählt, weil in den Untersuchungen des Herrn Klein nur ungerade Stufenzahlen aufgestellt werden und die Erweiterung des Herrn Hurwitz (die Literatur siehe F. d. M. XVIII. 1886. 404) den Fall $n = 6$ nicht umfasst. Ueberdies stehen die Stufenzahlen $2p$, wo p eine der ersten ungeraden Primzahlen ist, in specieller Beziehung zur Theorie der elliptischen Functionen. So erscheinen z. B. die Relationen zwischen den Nullwerten der Functionen ϑ_0, ϑ_2, ϑ_3 und den aus ihnen durch Transformation p^{ter} Ordnung entstehenden Grössen in einheitlichem Zusammenhang. M.

R. Fricke. Ueber die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind. Math. Ann. XXX. 345-400.

In der oben angeführten Arbeit: „Ueber die Congruenzgruppen der sechsten Stufe" ist von einer transcendenten Modulfunction mehrfach Gebrauch gemacht, welche bei den Substitutionen, die der Identität (mod. 6) congruent waren, sich bis auf eine additive Constante reproducirt:

$$u\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = u(\omega) + \text{const.}$$

Hier wird nun die Bedeutung dieser Function $u(\omega)$ für die Theorie der elliptischen Modulfunctionen erschöpfender **nach**gewiesen. Zu dem Zweck werden alle ausgezeichneten Untergruppen des Geschlechtes $p = 1$ eingehend betrachtet. **M.**

A. Hurwitz. Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten. Math. Ann. XXVII. 183-233. (1886.)

Die Arbeit bietet eine Weiterführung der Entwickelungen, welche Herr Klein über Modulfunctionen der N^{ten} Stufe gegeben hatte (cf. F. d. M. XVII. 1885. 453-456).

Als Basis des Ganzen dient ein bekannter Satz von Hermite, demzufolge alle doppelt-periodischen Functionen $X(u)$, die n-mal im Perioden-Parallelogramme verschwinden, aus n von einander unabhängigen linear und homogen zusammensetzbar sind. Bezeichnet man ein solches System mit $X_0(u)$, $X_1(u)$, ..., $X_{n-1}(u)$, so ist insbesondere deren Verhalten bei linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2 zu untersuchen. Dabei darf man über die Constanten a_1, b_1, a_2, b_2, welche in den Fundamentalformeln

$$X(u+\omega_1) = e^{a_1 u+b_1}X(u), \quad X(u+\omega_2) = e^{a_2 u+b_2}X(u)$$

auftreten, beliebig verfügen; man wählt sie zweckmässig so, dass die n^{te} Potenz der Weierstrass'schen Function $\sigma(u)$ der Reihe der $X(u)$ angehört, da $\sigma(u)$ bei allen linearen Transformationen der Perioden ungeändert bleibt. Dann lassen sich die n Functionen $X_a(u)$ leicht durch die σ-Function darstellen. Definirt man mit Herrn Klein:

$$\sigma_{x,y}(u\,|\,\omega_1, \omega_2) = e^{(x\eta_1+y\eta_2)\left(u-\frac{x\omega_1+y\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u - x\,\omega_1 - y\,\omega_2\,|\,\omega_1, \omega_2),$$

so kommt ($\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$):

$$X_a(u) = \mu_a . e^{-G_1 u^2} . \sigma_{\varepsilon,\varepsilon+\frac{a}{n}}\left(u\,\Big|\,\frac{\omega_1}{n},\ \omega_2\right),$$

wo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ oder $= 0$ zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade

oder eine ungerade Zahl ist, wo ferner G_1 eine bestimmte Constante ist und die μ_a Proportionalitätsfactoren bedeuten.

Daraus folgt, dass $X_{a+n}(u) = X_a(u)$, $X_a(-u) = (-1)^n X_{n-a}(u)$, und wenn man das Argument um einen n^{ten} Periodenteil vermehrt, so wird $X_a\left(u + \frac{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2}{n}\right)$, bis auf Exponentialfactoren, proportional mit $X_{a-\lambda_2}(u)$. Ferner verschwindet $X_a(u)$ im Periodenparallelogramm an den n Stellen

$$u = \varepsilon\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{n}\right) + a\,\frac{\omega_2}{n} + k\,\frac{\omega_1}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Endlich lassen sich die $X_a(u)$ auch, mittels der „Discriminante“ Δ, durch ϑ-Functionen ausdrücken.

Werden jetzt die Perioden ω_1, ω_2 einer ganzzahligen linearen Transformation von der Determinante 1 unterworfen, so erfahren die $X_a(u)$ vermöge des Hermite'schen Satzes eine homogene lineare Substitution mit von u unabhängigen Coefficienten.

Ueber die letzteren lässt sich noch Genaueres aussagen.

Reducirt man die unwesentlichen (oben erwähnten) Factoren μ_a auf einen einzigen, indem man setzt

$$\mu_a = (-1)^a \mu,$$

so lässt sich über μ noch so verfügen, dass die Grösse

$$\nu = \frac{\mu}{\sqrt[8]{\Delta}}$$

zu einer solchen Function der ω_1, ω_2 wird, welche sich bei allen linearen Transformationen bis auf einen numerischen Factor reproducirt.

Dann aber erhalten die Substitutionen der X_a rein numerische Coefficienten, wie dies bereits von Herrn Klein für ein ungerades n dargelegt worden ist.

Das Hauptinteresse wendet sich nunmehr der Substitutionengruppe G der X_a zu, welche der Gesamtheit T der linearen Transformationen der Perioden zugeordnet ist. Insofern immer unzählig vielen Substitutionen der Perioden ein und dieselbe Substitution der X_a entspricht, wird es erklärlich, dass die Gruppe G der letzteren nur eine endliche Anzahl N von Substitutionen umfasst,

Und zwar, wenn $p, q, \ldots$ die verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen bedeuten, und

$$f(n) = n^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots$$

gesetzt wird, so fällt

$$N = f(n), \quad \text{resp.} = \tfrac{1}{4}f(2n), \quad \text{resp.} = \tfrac{1}{8}f(4n)$$

aus, jenachdem

$n \equiv 1\,(\text{mod.}\,2)$, resp. $n \equiv 0\,(\text{mod.}\,4)$, resp. $n \equiv 2\,(\text{mod.}\,4)$ ist. Die Gruppen G und T repräsentiren zwei (meriedrisch) isomorphe Substitutionssysteme. Man kann sich nach dem Vorgange von Herrn Klein die Aufgabe stellen, überhaupt bei zwei (meriedrisch) isomorphen Gruppen Functionen der Variabeln der einen Gruppe zu construiren, welche sich wie die Variabeln der anderen Gruppe substituiren. Für den vorliegenden Fall ist die bez. Aufgabe durch die $X_\alpha(u)$ gelöst, und somit liefert die vorangegangene gruppentheoretische Betrachtung das functionentheoretische Resultat:

„Die Functionen $X_\alpha(u)$ sind Functionen der Variabeln ω_1, ω_2, welche sich wie die Variabeln der Gruppe G substituiren, wenn ω_1, ω_2 den Substitutionen der Gruppe T unterworfen werden." Dabei kann man dem Argument u unendlich viele Werte beilegen.

Die soeben für zwei isomorphe Gruppen skizzirte Aufgabe lässt sich verallgemeinern (und führt dadurch zur Herstellung neuer zugehöriger Functionssysteme), wenn man den Begriff des Isomorphismus zweier Gruppen auf drei und mehr überträgt, und z. B. für den Fall Drei die Substitutionen der Gruppen in analoger Weise zu „Tripeln" zusammenfasst, wie es bei zweien in Paaren geschieht. In der That lassen sich dann ebenfalls „zugehörige" Functionssysteme bilden.

Dies erlaubt eine sofortige Anwendung auf das Frühere, denn die, den verschiedenen Werten von n correspondirenden, unendlich vielen Substitutionssysteme der X_α sind alle auf die Gruppe T und damit auch auf einander isomorph bezogen.

Die so erzeugten „neuen" Functionssysteme sind den inäquivalenten primitiven quadratischen Formen der Determinante $-4n$ in einfacher Weise zugeordnet. My.

R. Hoppe. Darstellung der ersten Gattung elliptischer Integrale durch Curvenbogen zweiten Grades. Hoppe Arch. (2) V. 215-217.

Eine Darstellung durch Ellipsen und Hyperbelbogen, die sich durch Einfachheit der geometrischen Beziehungen auszeichnet. M.

H. F. W. Burstall. Note on the arc of a sphero-conic. Lond. M. S. Proc. XVIII. 58-60.

Es wird das Analogon zum Fagnano'schen Satze für einen sphärischen Kegelschnitt hergeleitet. M.

G. de Longchamps. Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin, au moyen des intégrales elliptiques. C. R. CIV. 676-678.

Mit Hülfe elliptischer Integrale erster und zweiter Gattung kann Maclaurin's Trisectrix (Traité des fluxions, 1749. Pl. X. Fig. 134. 198) rectificirt werden, indem man folgende Erzeugungsweise derselben zu Grunde legt. Von den Endpunkten eines Radius OA eines Kreises ziehe man in den Kreis nach entgegengesetzten Richtungen den Radius OB und die Sehne AC, dann beschreibt der Pol von BC die verlangte Curve. M.

G. de Longchamps. Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques. C. R. CIV. 964-966.

Der Inhalt der vorhergehenden Note wird dahin erweitert, dass alle die unicursalen Curven dritter Ordnung, die Zahradnik (Grunert Arch. LVI. 134-153, s. F. d. M. VI. 1874. 418) und der Herr Verfasser (N. C. M. V. 403-408, s. F. d. M. XI. 1879. 515) untersucht, sich mittels elliptischer Integrale rectificiren lassen. M.

A. G. Greenhill. Some applications of Weierstrass' elliptic functions. Lond. M. S. Proc. XVII. 355-379.

Herr Greenhill giebt eine directe Anwendung der Weierstrass'schen Theorie auf die folgenden geometrischen Probleme. Der erste Abschnitt enthält die Vectorgleichung confocaler Cartesischer Ovale in symmetrischer Form (vgl. Darboux, Ann. de l'Éc. Norm. IV. 1867), und orthogonale Curven vierten Grades, die mit den Cartesischen Ovalen associirt sind. Der zweite wendet die $\wp$-Function auf Sylvester's „Reciprocanten" an (s. F. d. M. XVIII. 1886. 73); die „gemischte Reciprocante"

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^4y}{dx^4}-5\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

führt auf die Functionen

$$t^{-2}=\wp(x;\,0,\,-4),\quad t^2=\wp(y;\,0,\,-4)$$

(vgl. J. Hammond und L. J. Rogers, Lond. M. S. Proc. XVIII. 128-138 u. 220-231; F. d. M. XVIII. 85 u. 90). Im dritten Abschnitt werden Euler's Bewegungsgleichungen und im vierten das sphärische Pendel und der Kreisel behandelt. Der fünfte giebt die Bahn eines Projectils im widerstehenden Mittel, wenn der Widerstand proportional dem Kubus der Geschwindigkeit ist. Der sechste knüpft an zwei vom Verfasser in Quart. J. XVII. u. XVIII. behandelte Probleme der Wärme und Elektricität an, und im letzten Abschnitt wird das Potential eines homogenen Ellipsoids auf einen äussern Punkt umgeformt. M.

A. G. Greenhill. Note on the Weierstrass elliptic functions, and their applications. Lond. M. S. Proc. XVIII. 263-288.

Es werden auf elementarem Wege diejenigen Formeln abgeleitet, die nach der Bezeichnung von Weierstrass denjenigen Formeln entsprechen, die Herr Glaisher in seiner „Note on the functions Zu, Θu, $\Pi(u,a)$", Lond. M. S. Proc. XVII. 152-157, (s. F. d. M. XVIII. 391) in Jacobi'scher Bezeichnung gegeben hat. Alsdann werden diese Formeln auf die Lamé'sche Gleichung und auf eine Reihe bekannter physikalischer Probleme angewandt,

deren mehrere in Herrn Hermite's Buche: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques", Paris 1885, behandelt sind. Der Aufsatz ist gleichsam eine Fortsetzung des soeben besprochenen. M.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

O. Bolza. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische durch eine Transformation vierten Grades. Math. Ann. XXVIII. 447-456.

Wiedergabe des Gedankenganges und der Resultate der Dissertation, über welche F. d. M. XVIII. 1886. 407 berichtet worden ist. M.

F. G. Teixeira. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques. Teixeira J. VIII. 164-170.

In diesem Aufsatz giebt der Verfasser einen neuen Beweis für die Sätze, die sich auf die Zurückführung der hyperelliptischen Integrale auf die Normalintegrale erster, zweiter und dritter Gattung beziehen. Tx. (Hch.)

K. Toropoff. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Perm. (Russisch).

Wenn man ein elliptisches Integral $\int \frac{f_1(y)dy}{\sqrt{R(y)}}$ transformirt, indem man $y = U(x)$ setzt, wo $U(x)$ eine ganze Function von x ist, so erhält man ein ultraelliptisches Integral, welches sich jedoch augenscheinlich auf das elliptische Integral reduciren lässt. Der Verfasser stellt sich die umgekehrte Aufgabe, zu erkennen, ob ein gegebenes hyperelliptisches Integral $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$ durch die

Transformation $y = U(x)$ in ein elliptisches übergehen kann. Er findet z. B., wenn ein hyperelliptisches Integral erster Gattung $\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R(x)}}$, wo $R(x)$ ein Polynom s^{ten} Grades ist, sich infolge der Transformation $y =$ einer ganzen Function von x auf ein elliptisches reducirt, so muss sein:

$$R(x) = (x+a)(x+b)\left\{A + B\cos 3\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right\}.$$

Wi.

G. v. Alth. Ueber die Reduction einer Gruppe Abel'scher Integrale auf elliptische Integrale. Wien. Ber. XCV. 702-713.

Die hier betrachteten 14 Integrale vom Geschlecht $p = 2$ sind von der Form

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{R(x)}}, \quad R(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2} \dots (x-\alpha_\varrho)^{n_\varrho}$$

und

$$J^{(l)} = \int \frac{\psi_l(x)dx}{\sqrt[m]{(R(x))^l}},$$

$$\psi_l(x) = (x-\alpha_1)^{g\left[\frac{n_1 l}{m}\right]}(x-\alpha_2)^{g\left[\frac{n_2 l}{m}\right]} \dots (x-\alpha_\varrho)^{g\left[\frac{n_\varrho l}{m}\right]},$$

wo $g\left[\frac{n_r l}{m}\right]$ die in $\frac{n_r l}{m}$ enthaltene grösste ganze Zahl bedeutet. l kann nur die Werte 2, 3, ..., $(m-1)$ und von diesen in jedem speciellen Fall wieder nur einen annehmen. Um derartige Integrale in hyperelliptische, eventuell elliptische von ganz unbestimmt gelassener Gestalt zu transformiren, hat man nur eine im allgemeinen rationale Function $f(x)$ so zu wählen, dass $\frac{R(x)}{[f(x)]^m}$ nach Streichung der dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren eine rationale Function von höchstens dem zweiten Grade in x wird. Ist m gerade, so kann man für

$f(x)$ auch die Function $\sqrt{\varphi(x)}$ wählen, doch so, dass

$$y^m = \frac{R(x)}{[f(x)]^m}$$

in x linear wird. M.

C. Guichard. Sur les intégrales $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$. C. R. CIV. 1494-1496.

Den Inhalt dieser Note bildet die vorläufige Mitteilung der Resultate einer Untersuchung über die hyperelliptischen Integrale, deren baldige Veröffentlichung in den Annales de l'École Normale der Herr Verfasser in Aussicht stellt. Kr.

M. Krause. Ueber hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung. Annali di Mat. (2) XV. 187-208.

Bei der Darstellung der hyperelliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung durch Thetafunctionen treten gewisse Verbindungen dieser Functionen auf, die auch losgelöst von der Art ihrer Entstehung und als selbständige Grössen betrachtet, von Interesse sind. Im Falle $p = 2$ sind es die folgenden:

$$Z_\alpha((v))_\varepsilon = \frac{\partial \log \vartheta_\alpha((v))}{\partial v_\varepsilon}, \qquad (\varepsilon = 1, 2)$$

$$P_\alpha((v, w)) = \sum_{\varepsilon=1}^{2} v_\varepsilon \frac{\partial \log \vartheta_\alpha((w))}{\partial w_\varepsilon} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\vartheta_\alpha((v-w))}{\vartheta_\alpha((v+w))}.$$

Der Herr Verfasser entwickelt in der vorliegenden Arbeit die wichtigsten Eigenschaften dieser Functionen, insbesondere in § 2 ihr Verhalten bei einer Aenderung der Variabeln v um ein System correspondirender Halber der Perioden, in den §§ 3 und 4 das Additionstheorem und in den §§ 5 und 6 die Transformation der Functionen Z und P. Es ergeben sich dabei gleichzeitig neue Differentialgleichungen, denen Zähler und Nenner der gewöhnlichen Transformationsgleichungen Genüge leisten. Im Schlussparagraphen, § 7, werden aus den Functionen Z und P neue Functionen $E_\alpha((u))$, $\Pi_\alpha((u, \omega))$ abgeleitet, welche den Charakter von hyperelliptischen Integralen zweiter und dritter Gat-

tung haben, und deren Eigenschaften aus den entwickelte Eigenschaften der Functionen Z und P unmittelbar folgen.

Kr.

J. Thomae. Ueber Integrale zweiter Gattung. J. für Matl CI. 326-336.

Der Herr Verfasser hat früher (J. für Math. XCIII. 69-8(F. d. M. XIV. 1882. 418) den Ausdruck:

$$\frac{\partial \log \vartheta((v))}{\partial \zeta}, \quad v_\nu = u_\nu(\sigma, \zeta) - \sum_\mu u_\nu(s_\mu, z_\mu),$$

vollständig durch Integrale zweiter Gattung und durch algebrai sche Functionen, sowohl in Bezug auf die Variabeln s, z al auch in Bezug auf das Parameterwertepaar σ, ζ dargestellt. De algebraische Teil enthält dabei eine Function q, deren Quadrat wurzel in der Fläche T zweiwertig, in der Fläche T' aber ein wertig ist, und die in p gewissen von σ, ζ abhängigen Punkte 0^2 wird. Im Falle einer zweiblättrigen Fläche T oder eine dreiblättrigen Fläche T mit lauter doppelten Verzweigungspunkte war es leicht, diese algebraische Function herzustellen, während im allgemeinen Falle die Construction derselben noch übrig blieb

Später (J. für Math. XCIV. 241-250) hat der Herr Ver fasser versucht, im Falle $p = 3$ das Resultat von dieser Func tion q zu befreien; er hat dabei aber für die die Verzweigung der Fläche T darstellende Grundgleichung $F(s, z) = 0$ eine Form gewählt, bei der die Verzweigungspunkte nicht von ein ander unabhängig sind, während andererseits die Voraussetzung dieser Unabhängigkeit der Untersuchung zu Grunde gelegt wurde Durch diesen Mangel wird der Herr Verfasser veranlasst, nochmals auf den genannten Gegenstand zurückzukommen. Da ihm aber inzwischen auch im allgemeinen Falle einige Vereinfachungen gelungen sind, so nimmt er die ganze Untersuchung wieder auf und teilt sie in der Gestalt mit, die er ihr jetzt nach den von ihm gewonnenen neuen Einblicken zu geben vorzieht. Die Resultate sind von den früher mitgeteilten nicht wesentlich verschieden.

Kr.

J. Lüroth. Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. Zweite Abhandlung. München. Abh. XVI_1. 199-241.

Durch die algebraische irreducible Gleichung $f(x, y) = 0$ werde eine ν-wertige Function y von x mit σ Verzweigungspunkten w_1, w_2, ..., w_σ definirt. Ist dann y_α einer der ν Werte von y für einen bestimmten Wert x_0 von x, der keinem Verzweigungspunkte entspreche, so geht derselbe durch den Umlauf um einen Verzweigungspunkt w in einen Wert y_β über, der auch mit y_α identisch sein kann. In diesem Sinne entsprechen jedem Verzweigungspunkte ν und daher allen σ Verzweigungspunkten $\nu\sigma$ „Uebergänge". Unter ihnen können stets $\nu-1$ so ausgewählt werden, dass man mit ihrer Hülfe von jedem Werte y_α zu jedem anderen gelangen kann; solche $\nu-1$ Uebergänge heissen fundamentale. Setzt man aus denselben einen geschlossenen, d. h. zu dem Anfangswerte y zurückführenden Weg zusammen, so ist ein Integral erster Gattung einer rationalen Function von x und y, über einen solchen Weg genommen, Null. Andere geschlossene Wege können aus einem gegebenen nicht fundamentalen Uebergange und passend dazu gewählten fundamentalen hergestellt werden; ein Integral erster Gattung, erstreckt über einen solchen Weg, ist nicht Null, und man erhält auf diese Weise in den Integralwerten, den $\nu\sigma-(\nu-1)$ nicht fundamentalen Uebergängen entsprechend, $\nu\sigma-(\nu-1)$ Perioden der Integrale erster Gattung; unter ihnen können 2ϱ „normale" oder „kanonische" ausgesucht werden, aus denen sich dann alle Perioden linear und ganzzahlig zusammensetzen lassen. Mit der Bildung der den Perioden überhaupt und speciell den 2ϱ kanonischen zu Grunde liegenden geschlossenen Wege beschäftigen sich die Art. 4-7. In Art. 8 und 9 werden im Anschlusse daran zwei bekannte von Riemann in den Art. 20, 21 seiner Theorie der Abel'schen Functionen mitgeteilte Relationen abgeleitet.

Kr.

P. Baumer. Ueber die ultraelliptischen Integrale der dritten Ordnung. Pr. Progymn. Striegau. 8 S. 4°.

Es wird für die hyperelliptischen Functionen von vier Variabeln unter Zugrundelegung einer Function 10ten Grades unter dem Wurzelzeichen und unter der nicht ausgesprochenen Voraussetzung, dass die sämtlichen Wurzeln dieser Function reell sind, nach Riemann'scher Methode die mehrfach zusammenhängende Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt und eine Discussion der allgemeinen Eigenschaften der Integrale erster Gattung angestellt. Zum Schluss wird der Uebergang zu den Thetafunctionen gemacht und einiger Eigenschaften derselben Erwähnung gethan. Hch.

F. Klein. Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale. Math. Ann. XXVIII. 533-560.

In § 1 wird der Satz bewiesen: Bezeichnet man die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, welche sich bei festgehaltenen Werten der x_i aus der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i^2}{\lambda - \varkappa_i} = 0,$$

in der die $\varkappa_i$ irgendwie gegebene von einander verschiedene Grössen, die x_i aber beliebige Tetraedercoordinaten bedeuten sollen, für λ als Unbekannte ergeben, als die elliptischen Coordinaten des Punktes x, so ist der geometrische Ort aller Punkte x, deren elliptische Coordinaten den Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems:

$$\sum_{a=1}^{3} \frac{\pm \lambda_a^\nu \, d\lambda_a}{\sqrt{\varphi(\lambda_a)}} = 0 \qquad (\nu = 0, 1),$$

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - \varkappa_i)(\lambda - a)(\lambda - b)$$

genügen, eine gerade Linie, welche die Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ berührt.

Diesen Satz, den, wie der Herr Verfasser angiebt, zuerst Liouville (Journal de Mathématiques (1) XII) aufgestellt hat, nach mehreren Richtungen hin zu erweitern und hierauf die angestellten Untersuchungen auf den Raum von beliebig vielen Dimensionen zu übertragen, bildet den Inhalt der §§ 2-7.

In den §§ 8 und 9 werden sodann die gewonnenen Resultate für die Liniengeometrie verwertet; es ergiebt sich hiebei u. a. eine naturgemässe Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche für den Fall der hyperelliptischen Functionen, deren Geschlecht $p > 2$ ist. Kr.

G. Pick. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. XXIX. 259-271.

Für den Fall der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung hat Herr Klein (Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Math. Ann. XXVII. § 7) gezeigt, dass es unter den Integralen dritter Gattung ein „Normalintegral" giebt, das dadurch ausgezeichnet ist, dass der Zähler des Integranden eine ganze Covariante der Grundform f ist, und weiter (§ 9), dass durch Einführung dieses Normalintegrals in die bekannte Definitionsgleichung der Thetafunction durch Integrale dritter Gattung die in dieser Formel auftretenden Thetafunctionen in die von Herrn Klein eingeführten σ-Functionen übergehen.

Von dem Herrn Verfasser werden in der vorliegenden Abhandlung die analogen Untersuchungen für die zu einer ebenen algebraischen Curve ohne Doppel- und Rückkehrpunkte gehörigen Abel'schen Functionen durchgeführt.

Ein Teil der Resultate wurde von dem Herrn Verfasser schon früher (Wien. Ber. XCIV. 367-371 und 739-747) mitgeteilt.

Kr.

E. Goursat. Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques. S. M. F. Bull. XV. 106-120.

Ein Differential von der Form

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}},$$

wo $f(x)$ irgend eine rationale Function von x bedeutet, werde durch die Substitution

$$x = \frac{at^2+bt+c}{a't^2+b't+c'} = \varphi(t)$$

übergeführt in

$$\frac{F(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}.$$

Alsdann existirt eine lineare involutive Substitution

$$t = \frac{Nz-M}{Lz-N},$$

welche paarweise die Wurzeln der Gleichung $R(t) = 0$ permutirt, so dass man identisch hat:

$$F\left(\frac{Nz-M}{Lz-N}\right) = -F(z).$$

Ist umgekehrt $\left[t, \frac{Nt-M}{Lt-N}\right]$ eine Substitution von der Periode 2, welche paarweise die vier Wurzeln a, b, c, d der Gleichung $R(t) = 0$ permutirt, und $F(t)$ eine rationale Function, so dass

$$F(t) + F\left(\frac{Nt-M}{Lt-N}\right) = 0,$$

so ist das Integral

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

ein pseudo-elliptisches Integral. Dies ergiebt eine Beziehung zwischen pseudo-elliptischen Integralen und den linearen Substitutionen, die die Wurzeln der Gleichung $R(t) = 0$ permutiren. Hiermit hängt das Problem der Reduction pseudo-elliptischer Integrale zusammen; vgl. S. Günther, S. M. F. Bull. X, s. F. d. M. XIV. 1882. 377. Es folgt die Untersuchung der Gruppe der 12 linearen Substitutionen, welche die vier Grössen ∞, 1, α, α^2 permutiren. M.

M. Nöther. Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. XXVIII. 354-380.

In den ersten vier Paragraphen beschäftigt sich der Herr Verfasser mit der Herstellung einer möglichst symmetrischen Gestalt für die Formel, durch welche einfache Thetaquotienten algebraisch durch die oberen Grenzen derjenigen Integralsummen ausgedrückt werden, welche die Argumente der Thetafunctionen bilden. Die Endformel des Herrn Verfassers, in welcher als

Argumente der Thetaquotienten Summen von $2p-2$ Integralen auftreten, ist auch noch symmetrisch in den unteren festen Grenzpunkten dieser Integrale; sie enthält ferner den sonst in den unteren Grenzen formal eingeführten einen Punkt der Grundcurve mit den p Berührungspunkten einer zu diesem Punkte gehörigen Berührungscurve auch explicite nicht mehr, und es treten endlich auf ihrer rechten Seite nur reine Berührungscurven auf. § 5 enthält einen einfachen Uebergang von dieser Formel zu einer neuen Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. Der letzte Paragraph, § 6, der mit dem vorangehenden Teile der Arbeit nicht in unmittelbarem Zusammenhange steht, behandelt eine Frage, welche für die Theorie der linearen Transformation der Thetafunctionen von allgemeinem Interesse ist. Vermöge einer beliebigen linearen Transformation T wird:

$$\vartheta_{a}((u, a_{hk})) = c e^{f((u'))}\, \vartheta_{a'}((u', a'_{hk})),$$

wobei die Grössen u', a' von den Grössen u, a in der bekannten Weise abhängen, wobei weiter $f((u'))$ eine homogene ganze Function zweiten Grades der u', c aber eine von den u' freie Constante ist, und wobei endlich die Elemente der Charakteristik (α') sich aus den Elementen der Charakteristik (α) den Gleichungen (31) pag. 376 gemäss zusammensetzen. Indem man nun ausschliesslich die Charakteristiken (α), (α') ins Auge fasst, pflegt man auch zu sagen, dass die Charakteristik (α) durch die lineare Transformation T in die Charakteristik (α') übergehe, wenn eben zwischen den Elementen der beiden Charakteristiken (α), (α') die Gleichungen (31) bestehen, und es entspricht so jeder linearen Transformation eine Charakteristikensubstitution. Da nun weiter solchen Transformationen, welche mod. 2 einander congruent sind, dieselbe Charakteristikensubstitution entspricht, und sich die Substitutionen in der nämlichen Weise wie die Transformationen zusammensetzen, so erhält man der Gruppe der mod. 2 incongruenten linearen Transformationen entsprechend eine endliche Gruppe von Charakteristikensubstitutionen. Der Herr Verfasser zeigt von ihr, dass sie mit jener Gruppe von Charakteristikensubstitutionen identisch ist, welche er früher (Math. Ann. XVI) betrachtet und als die Gruppe jener Charakteristiken-

substitutionen definirt hat, welche die Charakteristikenbeziehungen unverändert lassen. Kr.

O. Staude. Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. XXIX. 468-485.

Neben dem durch Thetafunctionen von p Argumenten gelösten „vollständigen" Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale erster Gattung vom Geschlecht p steht eine Reihe anderer „unvollständiger" Umkehrprobleme, die besonders bei Anwendungen auf Mechanik von Wichtigkeit sind. Das erste derselben knüpft sich an die Gleichungen

$$\sum_{h=1}^{p-1} \int_{a_h}^{x_h} \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1),$$

und verlangt die rationalen symmetrischen Functionen der Variabeln x_i durch die Variabeln t_i auszudrücken. Ein zweites unvollständiges Umkehrproblem knüpft eine ähnliche Fragestellung an ein entsprechend weiter reducirtes System von $p-2$ Gleichungen zwischen $p-2$ Variabeln. So geht ein $(p-2)^{\text{tes}}$ und ein $(p-1)^{\text{tes}}$ Problem resp. von den Gleichungen

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = t_1,$$

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = t_2$$

und der Gleichung

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} = t_1$$

aus und verlangt die symmetrischen Functionen von x_1, x_2, resp. x_1 selbst durch t_1, t_2, resp. t_1 auszudrücken. Dabei bleibt $R(x)$ überall vom Grade $2p+1$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zunächst mit dem vorletzten dieser unvollständigen Umkehrprobleme, das zugleich in wesentlich verallgemeinerter Gestalt behandelt wird. Die Betrachtung führt zu einer Gattung doppelt reell periodischer

Functionen zweier reellen Veränderlichen, zu denen als specielle Fälle die hyperelliptischen Functionen zweier Variabeln vom Geschlecht $p = 2$ gehören. M.

F. BRIOSCHI. Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Auszug eines Briefes an M. Krause in Rostock). Math. Ann. XXVIII. 594-596.

M. KRAUSE. Zur Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Auszug eines Briefes an Fr. Brioschi in Mailand). Math. Ann. XXVIII. 597-600.

Die beiden Noten behandeln die Transformation dritten Grades der Thetafunctionen zweier Veränderlichen und insbesondere jene Relationen, welche in diesem Falle zwischen den Nullwerten der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen bestehen. Kr.

H. MÖLLER. Zur Transformation der Thetafunctionen. Diss. Rostock. 37 S. 8°.

F. CASPARY. Sur les systèmes orthogonaux, formés par les fonctions thêta. C. R. CIV. 490-493.

Wenn man bei den Thetafunctionen einer Variabeln vier Argumente w, x, y, z mit w', x', y', z' durch die Formeln $2w' = w+x+y+z$ u. s. w. mit einander verknüpft und

$$\vartheta_a(u, q)\,\vartheta_a(v, q) = \vartheta_a(u; v) \qquad (a = 0, 1, 2, 3)$$

setzt, so bilden die 16 Grössen

$$\vartheta(w; x)_a \pm \vartheta(y; z)_a, \quad \vartheta(w'; x')_a \pm \vartheta(y'; z')_a,$$

abgesehen vom Vorzeichen, ein orthogonales System.

Durch Anwendung der bekannten Transformationen zweiten Grades auf die Thetaproducte erscheinen die Formeln, welche das orthogonale System bestimmen, in Form von Identitäten.

Dieser Beweis lässt sich direct auf Theta von ϱ Argumenten

übertragen. Nach einer von Herrn Weierstrass gegebenen Formel für die Transformation zweiten Grades ist

$$(a)\qquad {\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\varrho \atop \delta_1\delta_2\ldots\delta_\varrho} = \Sigma(-1)^{\Sigma\lambda_a^{(k)}\delta_a} A_k B_{k\varepsilon} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^\varrho),$$

wo

$$ {\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\varrho \atop \delta_1\delta_2\ldots\delta_\varrho} = \vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon\ldots\\ \delta\ldots\end{pmatrix}(u_1,\ldots,u_\varrho)\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon\ldots\\ \delta\ldots\end{pmatrix}(v_1,\ldots,v_\varrho),$$

$$A_k = \Theta\begin{pmatrix}\lambda^{(k)}\ldots\\ 0\ \ldots\end{pmatrix}(u_1+v_1,\ldots,u_\varrho+v_\varrho),$$

$$B_{kl} = \Theta\begin{pmatrix}\lambda^{(k)}+\varepsilon\ldots\\ 0\ \ldots\end{pmatrix}(u_1-v_1,\ldots,u_\varrho-v_\varrho)$$

gesetzt ist, Θ die Thetafunction mit den doppelten Moduln $2\tau_{\alpha\beta}$ bedeutet und jedes λ den Wert 0 und 1 annimmt.

Mit Hülfe dieser Formel ergeben sich für $\varrho = 2$ die entsprechenden Identitäten, und man findet so die bekannten 16 Producte der Thetafunctionen zweier Variabeln, welche ein orthogonales System bilden.

Giebt man in (a) $\varrho-2$ der Grössen δ die speciellen Werte δ_i und darauf δ_i+1 und addirt die Formeln, so enthält die rechte Seite nur noch vier der Grössen A und vier der Grössen B. Wenn man diese Grössen entsprechend den Formeln für $\varrho = 2$ ordnet und mittels der Gleichung (a) durch die Theta mit ϱ Argumenten ausdrückt, so gelangt man zu orthogonalen Systemen. Hch.

Bolza. On binary sextics with linear transformations into themselves. American J. X. 47-70.

Bolza. Ueber Binärformen sechster Ordnung mit linearen Substitutionen in sich. Math. Ann. XXX. 546-552.

Bericht auf S. 119ff. dieses Bandes.

Bolza. Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärformen sechster Ordnung durch die Nullwerte der zugehörigen ϑ-Functionen. Gött. N. 418-421, Math. Ann. XXX. 478-495.

Bericht auf S. 122 dieses Bandes.

F. Brioschi. Sulle funzioni sigma iperellittiche. Rom. Acc. L. Rend. (4) III. 245-250, 311-315.

Fortsetzung der Arbeit in II. 199-203, 215-221 (s. F. d. M. XVIII. 1886. 418). Es werden für die Function

$$\sigma(u_1, u_2) = e^{\frac{1}{2}D}\frac{\Theta(u_1, u_2)}{\Theta(0)},$$

wo

$$D = \tfrac{1}{5}(2A_3u_1^2 + A_2u_1u_2 + 2A_1u_2^2),$$

und für die besonderen Sigmafunctionen $\sigma_{r,s}(u_1, u_2)$ analoge Differentialgleichungen hergeleitet, wie Formel (10) in § 25 der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen" von Weierstrass-Schwarz. Den e_1, e_2, e_3 der elliptischen Sigmafunction entsprechen simultane quadratische Covarianten $(\varphi\psi)_2$, welche betrachtet werden, ebenso die Functionen $\wp_{rs}(u_1, u_2)$, welche dem $\wp(u)$ der elliptischen Sigmafunction entsprechen.

M.

E. Wiltheiss. Ueber eine partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente und über die Reihenentwickelung derselben. Math. Ann. XXIX. 272-298.

Der Verfasser stützt sich in vorliegender Abhandlung auf seine im Bande IC des Journ. für Math. veröffentlichten Untersuchungen (F. d. M. XVII. 1885. 480) und auf die des Herrn Brioschi Rom. Acc. L. Rend. (4) II. (F. d. M. XVIII. 1886. 418). Er giebt die Differentialgleichungen, die zwischen den Ableitungen der Thetafunctionen zweier Veränderlichen nach den Argumenten und den Parametern bestehen, sowie die aus diesen Differentialgleichungen abgeleiteten Recursionsformeln für die Coefficienten der nach Potenzen der Argumente entwickelten Thetafunctionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Eigenschaft als Invarianten und Covarianten nach der von Herrn F. Klein in seiner Abhandlung „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen" Math. Ann. XXVII. (siehe F. d. M. XVIII 1886. 418) gegebenen Anregung.

Zu diesem Zwecke ist es notwendig, dass $R(x)$ vom sechsten Grade ist, ausserdem wird statt $\Theta(u_1, u_2)$ eine Function

$$Th = 2\pi(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21})^{-\frac{1}{2}}\Theta(u_1, u_2)$$

eingeführt und für diese die Differentialgleichung zwischen den zweiten und ersten Ableitungen nach u_1 und u_2 und ihrer Ableitung nach einer Wurzel von $R(x)$ sowie der Function selbst aufgestellt. Den drei hierbei auftretenden unbestimmten Constanten werden darauf solche Werte gegeben, dass die Glieder gleicher Dimension in der Reihenentwickelung der Thetafunctionen, abgesehen von gewissen Factoren, unmittelbar Covarianten werden; hierbei ergiebt sich zugleich der Ausdruck für die Glieder zweiter Dimension der geraden Theta, und es wird der der dritten für die ungeraden berechnet.

Die betreffende Differentialgleichung wird darauf umgeformt und zunächst in einer in Bezug auf die Wurzeln von $R(x)$ symmetrischen Form gegeben.

Hierbei zeigt sich, dass die Glieder der gleichen Dimension in u_1 und u_2 bei den geraden Theta simultane Covarianten der beiden kubischen Formen sind, in die $R(x_1, x_2)$ sich zerlegen lässt, und ebenso, dass die der ungeraden Theta solche einer linearen Form und der dazu gehörigen Form fünfter Ordnung sind. Ferner werden die Ableitungen nach den Coefficienten dieser Formen eingeführt, also entweder nach denen der beiden kubischen oder nach denen der ersten und fünften Ordnung, die Differentialgleichung entsprechend umgeformt und die Recursionsformeln für die Glieder gleicher Dimension gegeben. Die Glieder werden einerseits bis zur siebenten, anderseits bis zur sechsten Dimension durch Covarianten unter Anlehnung an die Clebsch'sche Bezeichnungsweise vollständig gegeben. Hch.

M. Krause. Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Annali di Mat. (2) XV. 173-185.

Man bezeichne die ursprünglichen Moduln der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung mit $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, ihre Argumente mit u_1, u_2, ihre Perioden mit $2K_{11}$, $2K_{21}$, $2K_{12}$, $2K_{22}$, ferner die entsprechenden mit Hülfe einer rationalen Transformation n^{ten} Grades transformirten Grössen mit c^2, l^2, m^2, u_1', u_2', $2C_{11}$, $2C_{21}$,

$2C_{12}$, $2C_{22}$ beziehlich. Die transformirten Argumente u'_1, u'_2 sind dann homogene lineare Functionen:

$$u'_1 = M_0 u_1 + M_1 u_2,$$
$$u'_2 = M_2 u_1 + M_3 u_2$$

der ursprünglichen, und die dabei auftretenden Coefficienten M_0, M_1, M_2, M_3 sind die sogenannten Multiplicatoren. Diese Multiplicatoren genügen, als Functionen von $\varkappa$, λ, μ oder von c, l, m betrachtet, einer Reihe von Differentialgleichungen erster Ordnung und einer Reihe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die ersteren werden in § 1, die letzteren in § 3 der vorliegenden Abhandlung von dem Herrn Verfasser abgeleitet. In § 2 werden ferner Differentialgleichungen aufgestellt, denen die Perioden $2C_{11}$, $2C_{21}$, als Functionen von c, l, m aufgefasst, Genüge leisten, und in § 4 endlich werden Differentialgleichungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Moduln abgeleitet. Die Resultate der §§ 2 und 4 sind zum grössten Teile auch in die §§ 31, 45 und 43 des Werkes des Herrn Verfassers: „Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung“ (Leipzig 1886) aufgenommen. Kr.

F. Caspary. Sur les théorèmes d'addition des fonctions thêta. C. R. CIV. 1255-1258.

F. Caspary. Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln. Math. Ann. XXX. 571-577.

Bezeichnet man mit $\vartheta(u;\ \frac{1}{2}\delta,\ \frac{1}{2}\varepsilon)$ eine allgemeine Thetafunction von ϱ Variabeln, so ist nach einer Weierstrass'schen Formel

$$\vartheta(u^{(p)}+u^{(q)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)\ \vartheta(u^{(p)}-u^{(q)};\ \tfrac{1}{2}\delta,\ \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$
$$= \Sigma (-1)^{\Sigma_a \lambda_a^{(k)} \delta_a}\, \Theta(2u^{(p)};\ 0,\ \tfrac{1}{2}\lambda^{(k)})\, \Theta(2u^{q};\ 0,\ \tfrac{1}{2}\lambda^{k}+\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$

wo $k = 0, 1, \ldots, 2^{\varrho}-1$ und Θ die Thetafunction mit doppelten Moduln. Ist nun $A_k^{(n)}$ eine von $\lambda^{(k)}$ abhängige Grösse und $A_{k+\nu}^{(n)}$ dieselbe Grösse, wenn man $\lambda^{(k)}$ durch $\lambda^{(k)}+\lambda^{(\nu)}$ ersetzt; ferner

$$A^{(n)} = \Sigma e_k^{(n)} A_k^{(n)},\quad (e_k^{(n)} = \pm 1),$$

so wird das Product

$$A^{(p)}A^{(q)} = \sum_h (e_h^q \sum_k e_k^{(p)} e_k^{(q)} A_k^{(p)} A_{k+h}^{(q)}).$$

Setzt man hierin

$$A_k^{(n)} = \Theta(2u^{(n)};\ 0,\ \tfrac{1}{2}\lambda^{(k)}),\quad A_{k+\nu}^{(n)} = \Theta(2u^{(n)};\ 0,\ \tfrac{1}{2}\lambda^k + \tfrac{1}{2}\lambda^\nu),$$

$$e_k^{(n)} = (-1)^{\sum \lambda_a^{(k)}\delta_a^{(n)}}$$

und

$$\vartheta_k^{(p,q)} = \vartheta(u^{(p)}+u^{(q)};\tfrac{1}{2}\delta^{(p)}+\tfrac{1}{2}\delta^{(q)},\tfrac{1}{2}\lambda^{(k)})\,\vartheta(u^{(p)}-u^{(q)};\tfrac{1}{2}\delta^{(p)}+\tfrac{1}{2}\delta^{(q)},\tfrac{1}{2}\lambda^{(k)}),$$

so erhält man

$$A^{(p)}A^{(q)} = \sum e_k^{(q)}\vartheta_k^{(p,q)} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ h).$$

Giebt man jetzt den Indices p, q die Werte 1, 2, 3, 4, so erhält man in Folge der Identität

$$(A^{(1)}A^{(2)})(A^{(3)}A^{(4)}) = (A^{(1)}A^{(3)})(A^{(2)}A^{(4)})$$

die Formel

$$\sum e_k^{(2)}\vartheta_k^{(1,2)} \sum e_k^{(4)}\vartheta_k^{(3,4)} = \sum e_k^{(3)}\vartheta^{(1,3)} \sum e_k^{(4)}\vartheta^{(2,4)},$$

die ein sehr allgemeines Additionstheorem darstellt und durch Specialisirung eine grosse Menge bekannter Sätze ergiebt.

Zum Schluss bemerkt der Verfasser, dass, wenn man den Indices p, q die Werte 1, 2, ..., $2m$ giebt, wo $m > 2$, man auf dieselbe Weise noch andere Additionstheoreme erhält.

In der zweiten Arbeit giebt Herr Caspary im § 1 die auf die quadratische Transformation der Thetafunctionen zweier Variabeln bezüglichen Relationen in dem Umfange, wie er sie im zweiten Paragraphen zum Beweise der Rosenhain'schen Fundamentalformeln braucht; im § 2 schlägt er denselben Weg wie in der ersten Arbeit ein. Indem er die Formeln vollständig für die Theta zweier Variabeln aufstellt, gelangt er zu der im ersten Teil des Referats angegebenen Schlussformel und entwickelt aus dieser als speciellen Fall die von Rosenhain gegebenen Relationen.

Hch.

M. Krause. Sur les fonctions quadruplement périodiques de deuxième et de troisième espèce. Journ. de Math. (4) III. 87-107.

Der Herr Verfasser wurde durch die Lectüre von Herrn

Hermite's Abhandlungen: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“ veranlasst, analoge Untersuchungen im Gebiete der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung dadurch vorzubereiten, dass er den Hermite'schen Fundamentalfunctionen entsprechende Functionen aus den Thetafunctionen zweier Veränderlichen zusammensetzt und deren hauptsächlichste Eigenschaften untersucht. Insbesondere wird gezeigt, welchen Functionalgleichungen dieselben genügen, und welche Systeme von Differentialgleichungen mit ihrer Hülfe gelöst werden können.

Kr.

P. M. Pokrowsky. Theorie der ultraelliptischen Functionen erster Klasse. Moskau. (Russisch).

Die umfangreiche Arbeit bezweckt die Untersuchung der ultraelliptischen Functionen $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_a$, welche Herr Weierstrass in den berühmten Abhandlungen eingeführt hat: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen“ und „Theorie der Abel'schen Functionen“. Der Verfasser scheint mit den späteren Weierstrass'schen Untersuchungen auf dem Gebiete der ultraelliptischen Functionen unbekannt zu sein; demnach benutzt er diejenigen Vorstellungsweisen, wie mehrblättrige Fläche, Periodenweg, kanonisches Querschnittsystem u. s. w., auf welchen Riemann seine Theorie aufgebaut hat. Die Arbeit ist in sechs Capitel geteilt:

I. Theorie der ultraelliptischen Integrale erster Klasse nach der Riemann'schen Methode. In diesem Capitel führt der Verfasser die Integrale ein, welche er als analog zu den normalen Riemann'schen ansieht. Es sind zwei Integrale erster Gattung, welche die Perioden 1, 0, $i\delta_{11}$, $i\delta_{12}$ resp. 0, 1, $i\delta_{21}$, $i\delta_{22}$ haben. Dabei ist $\delta_{12} = \delta_{21}$.

II. Ueber die Functionen Θ von zwei Argumenten. Als Grundfunction wird die Function $\Theta(v_1, v_2)$ behandelt, welche das folgende System der simultanen Moduln der Periodicität hat: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(i\delta_{11}, i\delta_{12})$, $(i\delta_{12}, i\delta_{22})$.

III. Das Abel'sche Theorem und die Jacobi'sche Um-

kehrungsaufgabe. Diese Aufgabe wird nach der Weierstrass'schen Methode mit Hülfe der Functionen $\mathrm{Al}(u_1, u_2)_a$ gelöst.

IV. Beziehungen zwischen den Θ-Functionen und den Functionen von Rosenhain, Riemann und Weierstrass. Ultraelliptische Functionen.

V. Die Grundeigenschaften der ultraelliptischen Functionen und die allgemeinsten Eigenschaften derselben. Es werden die Beziehungen zwischen Quadraten und Producten der ultraelliptischen Functionen, sowie die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen der ultraelliptischen Functionen gegeben. In diesem Capitel beweist der Verfasser mehrere Formeln, welche von Herrn Weierstrass ohne Beweis gegeben wurden.

VI. Die Entwickelung der ultraelliptischen Functionen in trigonometrische und hyperbolische Reihen. Wi.

F. Klein. Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente. Gött. N. 515-521.

Diese Arbeit giebt eine Erweiterung der vom Verfasser in den Math. Ann. XXVII. (s. F. d. M. XVIII. 1886. 418) „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen" geführten Untersuchungen auf hyperelliptische Functionen beliebig vieler Argumente. Es wird eine homogene binäre Form $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades $f_{2p+2}(z_1, z_2)$ zu Grunde gelegt und diese auf jede Weise in das Product zweier Factoren vom Grade $p+1-2\mu$ und $p+1+2\mu$ zerlegt, wo $\mu = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}(p+1)$ ist, also $f_{2p+2} = \varphi_{p+1-2\mu} . \psi_{p+1+2\mu}$; ferner werden die überall endlichen Integrale erster Gattung von der Form $\int z_1^{p-r} z_2^{r-1}(z\,dz)(fz)^{-\frac{1}{2}}$ mit $w_1, \dots, w_p$ bezeichnet und die Summen der Integrale von dw_a zwischen den Grenzen $a, x'; \dots; a, x^{(2\nu)}$ mit w_a. Bildet man nun unter der Voraussetzung, dass ν hinreichend gross, die 2ν-reihigen Determinanten:

$$D = |x_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(x)}, x_1^{\nu-2+\mu}x_2\sqrt{\varphi(x)}, \dots, x_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi x}, \dots, x_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi x}|$$
$$(x = x', x'', \dots, x^{(2\nu)}),$$

so verhalten sich die 2^{2p} Thetafunctionen $\vartheta(w_1, \dots, w_p)$ einfach wie

die mit gewissen Constanten multiplicirten D, in der Art, dass geraden und ungeraden μ gerade und ungerade ϑ correspondiren.

Herr Klein bezeichnet darauf das allgemeine Integral dritter Gattung $P_{x,y}^{x',y'}$, wenn x mit x', y mit y' zusammenfallen, die zugehörigen Quadratwurzeln von f aber das entgegengesetzte Vorzeichen haben, mit $P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$, bildet den Ausdruck

$$\Omega(x, y) = (xy)\, e^{\frac{1}{2} P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}} . (fx . fy)^{-\frac{1}{4}}$$

und aus diesem einen zweiten $X(x)$, indem er $y = x$ und $\sqrt{fy} = -\sqrt{fx}$ setzt; dann ist

$$\vartheta(w_1, \ldots, w_p) = C . e^{G(w_1,\ldots, w_p)}\, \Theta(w_1, \ldots, w_p),$$

wo G eine homogene Function zweiten Grades der w und C eine Constante ist, die von der einzelnen Thetafunction ϑ zur anderen wechseln kann, während

$$\Theta(w_1, \ldots, w_p) = \frac{D}{(\Pi \sqrt{f x^{(i)}})^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{(\Pi X(x^{(i)}))^{\frac{\nu}{2}}}{\Pi\Pi\, \Omega(x^{(i)} x^{(k)})} .$$

$$(i,\ k = 1, \ldots, 2\nu;\ i \gtrless k)$$

Jetzt führt der Verfasser statt des allgemeinen Integrals dritter Gattung ein dem in der Arbeit in den Math. Ann. XXVII. entsprechendes ausgezeichnetes Q ein und gelangt so zu Θ-Functionen, die den in jener Arbeit gegebenen σ-Functionen entsprechen und also auch mit σ bezeichnet werden. Dieselben haben die Eigenschaft, dass, wenn man sie in nach Potenzen von $w_1, \ldots, w_p$ fortschreitende Reihen entwickelt, die Coefficienten dieser Entwickelung ganze rationale Functionen der Coefficienten jener anfangs erwähnten Formen φ, ψ werden. Es sei $(\overset{k}{w}, \overset{m}{\varphi}, \overset{n}{\psi})$ eine homogene Function k^{ten} Grades in den w, m^{ten} Grades in den Coefficienten von φ und n^{ten} in denen von ψ, dann schreibt sich die Reihenentwickelung des einzelnen, zur Zerlegung $f = \varphi . \psi$ gehörigen σ in der Form

$$\sigma(w_1, \ldots, w_p) = (\overset{\mu}{w}, \overset{\mu}{\varphi}, \overset{0}{\psi}) + (\overset{\mu+2}{w}, \overset{\mu+1}{\varphi}, \overset{1}{\psi}) + \cdots + (\overset{\mu+2\varrho}{w}, \overset{\mu+\varrho}{\varphi}, \overset{\varrho}{\psi}) + \cdots.$$

Jeder einzelne in Klammern stehende Teil erweist sich dabei als simultane Invariante von $\varphi(z)$, $\psi(z)$ und einer Form $(p-1)^{\text{ten}}$

Grades

$$\chi(z) = w_1 z_2^{p-1} - (p-1) w_2 z_2^{p-2} z_1 + \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) w_3 z_2^{p-3} z_1^2 - \cdots.$$

Dann wird auf den ersten Term der Entwickelung von $\sigma(w_1, \ldots, w_p)$ besonders eingegangen und sein Ausdruck genauer gegeben. Zum Schluss wird noch der Zusammenhang zwischen den σ und ϑ kurz besprochen.

Die Arbeit ist in äusserst gedrängter Form geschrieben, die Beweise sind grösstenteils nur angedeutet. Hch.

A. v. Braunmühl. Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunctionen. München Abh. XVI$_2$. 327-368.

Die vorliegende Arbeit, deren Resultate von dem Herrn Verfasser teilweise schon früher (Erlang. Ber. 1886) veröffentlicht wurden, enthält in ihrem ersten Abschnitte, §§ 1—7, eine Theorie der p-reihigen Drittelcharakteristiken, welche sich ziemlich strenge an jene Gesichtspunkte hält, die Herr Frobenius (J. für Math. LXXXIX) für die Behandlung der Theorie der gewöhnlichen Charakteristiken angegeben hat.

Entsprechend der Einteilung der gewöhnlichen Charakteristiken in gerade und ungerade teilt der Herr Verfasser die 3^{2p} Drittelcharakteristiken, die er unter Fortlassung des allen Elementen gemeinsamen Nenners 3 mit $\binom{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{\alpha'_1 \ldots \alpha'_p}$ bezeichnet, in drei Arten ein, indem er eine Charakteristik von der ersten, zweiten oder dritten Art nennt, je nachdem $\alpha_1\alpha'_1 + \cdots + \alpha_p\alpha'_p \equiv 0$, 1 oder -1 (mod. 3) ist. Dass die Anzahlen s_p, r_p, r'_p der Charakteristiken erster, zweiter, dritter Art gewisse von dem Herrn Verfasser angegebene Werte besitzen, beweist derselbe durch den Schluss von $p-1$ auf p. Da aber dieser Beweis keine Bestimmung der Anzahlen s_p, r_p, r'_p liefert, vielmehr deren Kenntnis schon voraussetzt, so wäre es wohl vorzuziehen gewesen, die von Herrn Prym (Unters. ü. d. Riemann'schen Thetafunctionen p. 52) angegebene Bestimmung der Anzahlen der geraden und ungeraden

Charakteristiken nachzubilden und aus den Gleichungen

$$s_p = 5s_{p-1}+2r_{p-1}+2r'_{p-1},\quad r_p = 2s_{p-1}+5r_{p-1}+2r'_{p-1},$$
$$r'_p = 2s_{p-1}+2r_{p-1}+5r'_{p-1}$$

die folgenden

$$s_p+r_p+r'_p = 3^2(s_{p-1}+r_{p-1}+r'_{p-1}),\quad s_p-r_p = 3(s_{p-1}-r_{p-1})$$
$$(r_p-r'_p) = 3(r_{p-1}-r'_{p-1})$$

und hieraus die weiteren

$$s_p+r_p+r'_p = 3^{2p-2}(s_1+r_1+r'_1) = 3^{2p},\quad s_p-r_p = 3^{p-1}(s_1-r_1) = 3^p,$$
$$r_p-r'_p = 3^{p-1}(r_1-r'_1) = 0$$

abzuleiten, aus denen dann sofort $r'_p = r_p$ folgt, während sie zur Bestimmung von s_p und r_p die Gleichungen:

$$s_p+2r_p = 3^{2p},\quad s_p-r_p = 3^p$$

liefern.

Zur Erläuterung und teilweisen Berichtigung des im Anfange des § 2 Auseinandergesetzten mag hier das Folgende bemerkt werden. Wenn irgend eine Relation zwischen beliebigen Thetafunctionen

$$\vartheta[\alpha]((v)),\quad \vartheta[\beta]((v)),\quad \vartheta[\gamma]((v)),\quad \dots$$

vorliegt, so kann man aus ihr auf zwei verschiedene Weisen weitere ähnliche Relationen ableiten, erstens, indem man die Argumente der Thetafunctionen um die einer Charakteristik $[\varkappa]$ entsprechenden Teile der Perioden vermehrt, zweitens, indem man auf die Thetafunctionen eine lineare Transformation T anwendet. Im ersten Falle erhält man eine Relation zwischen den Functionen $\vartheta[\varkappa\alpha]((v))$, $\vartheta[\varkappa\beta]((v))$, ..., im zweiten Falle (wenn man schliesslich noch die früheren Argumente und Moduln wiederherstellt) zwischen den Functionen

$$\vartheta[\alpha']((v)),\quad \vartheta[\beta']((v)),\quad \vartheta[\gamma']((v)),\quad \dots,$$

wobei allgemein die Elemente der Charakteristik $[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} g'_1 \dots g'_p \\ h'_1 \dots h'_p \end{bmatrix}$ sich aus den Elementen der entsprechenden Charakteristik $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}$ den Gleichungen

$$g'_\nu = \sum_\varepsilon (\alpha_{\nu\varepsilon} g_\varepsilon - \beta_{\nu\varepsilon} h_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}),\ h'_\nu = \sum_\varepsilon (-\gamma_{\nu\varepsilon} g_\varepsilon + \delta_{\nu\varepsilon} h_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\gamma_{\nu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon}),$$
$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

gemäss zusammensetzen, wenn man sich in der Bezeichnung der

die Transformation T charakterisirenden ganzen Zahlen der Dissertation des Herrn Thomae anschliesst. Man kann daher sagen, dass den genannten Operationen, nämlich den Vermehrungen der Argumente um Periodenteile und den linearen Transformationen, gewisse Charakteristikenänderungen, die kurz Charakteristikenadditionen und Charakteristikentransformationen zu nennen erlaubt sein möge, entsprechen. Man erkennt nun aber sofort, dass für die Charakteristikentransformationen das Gebiet der 3^{2p} Drittelcharakteristiken kein geschlossenes ist; indem im allgemeinen aus einer Charakteristik, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet ist, durch Transformation eine solche hervorgeht, deren Elemente Sechstel ganzer Zahlen sind; weiter ist bekannt, dass durch Charakteristikentransformationen der Wert des Symbols $\alpha|\beta$ nicht ungeändert bleibt, endlich aber auch, dass keine Vertauschbarkeit der Charakteristikentransformationen mit den Charakteristikenadditionen besteht. Alle diese Eigenschaften besitzt vielmehr nur jene Gruppe von Charakteristikenänderungen, bei der die Elemente g', h' der neuen Charakteristik mit den Elementen g, h der ursprünglichen durch die Gleichungen

$$g'_\nu = \Sigma(\alpha_{\varepsilon\nu} g_\varepsilon - \beta_{\nu\varepsilon} h_\varepsilon);\ h'_\nu = \Sigma(-\gamma_{\nu\varepsilon} g_\varepsilon + \delta_{\nu\varepsilon} h_\varepsilon)\ \ (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind. Diesen Charakteristikenänderungen aber liegen nicht, wie der Herr Verfasser behauptet, unimodulare lineare Transformationen der Perioden oder, was dasselbe ist, lineare Transformationen der Thetafunctionen zu Grunde, sondern vielmehr lineare Transformationen verbunden mit Aenderungen der Variablen um halbe Perioden.

Der zweite Abschnitt §§ 8-14 behandelt die zwischen den Thetafunctionen mit Drittelcharakteristiken bestehenden Relationen. In § 9 wird eine erste Gruppe von Thetaformeln abgeleitet; dieselben entsprechen genau jenen Formeln, welche Herr Frobenius in § 3 seiner oben erwähnten Arbeit für die gewöhnlichen Thetafunctionen mitgeteilt hat; auch die Herstellungsweise der Formeln ist derjenigen des Herrn Frobenius nachgebildet. Die als Fundamentalformeln erscheinenden Formeln (9), (10), (11) sind einander äquivalent, insofern als aus jeder von ihnen die beiden übrigen

direct erhalten werden können. Die Formel (11) ist als specieller dem Werte $r = 3$ entsprechender Fall in jener Thetaformel (θ_3) enthalten, welche Herr Prym und der Referent schon früher Acta Math. III. veröffentlicht haben.

In § 12 beabsichtigt sodann der Herr Verfasser, eine Thetaformel herzustellen, welche der von den Herren Frobenius (a. a. o. pag. 219, Glg. 9) und Nöther (Math. Ann. XVI. 327 Glg. V) für die gewöhnlichen Thetafunctionen mitgeteilten Fundamentalformel entspricht, und versucht auch hier das Herstellungsverfahren des Herrn Frobenius nachzubilden. Der Herr Verfasser übersieht aber, dass Herr Frobenius zu der am Ende der S. 217 seiner Abhandlung stehenden Gleichung nur deshalb gelangen kann, weil ein Teil der bei ihrer Ableitung auftretenden Charakteristiken ungerade wird und in Folge dessen die ihnen entsprechenden das Argument Null besitzenden Thetafunctionen verschwinden, und bedient sich zur Gewinnung der entsprechenden Formeln am Beginne der Seite 361 einer falschen Schlussweise. Es entbehren in Folge dessen die weiteren von ihm abgeleiteten Formeln, insbesondere die Fundamentalformel (5) und die aus ihr in den §§ 13 und 14 gezogenen Folgerungen der Begründung. Will man eine Thetaformel ableiten, deren eine Seite von der Summe der 3^p auf der rechten Seite der Formel (5) stehenden Thetaproducte gebildet wird, so wird man mit Vorteil von der Glg. (11) des § 9 ausgehen und auf sie ein Verfahren anwenden, welches demjenigen analog ist, dessen sich Herr Prym (Unters. über die Riemann'sche Thetaf. p. 94) im siebenten Artikel seiner fünften Abhandlung bedient; man wird dann entsprechend der Formel (II) jener Abhandlung zu einer Formel gelangen, welche an Stelle der Formel (5) des Herrn Verfassers zu setzen ist. Von der Aufstellung derselben mag hier aber umsomehr abgesehen werden, als die vom Herrn Verfasser aufgestellten Fundamentalsysteme so lange der Existenzberechtigung entbehren, als nicht an den ihnen entsprechenden Thetafunctionen gewisse sie auszeichnende Eigenschaften nachgewiesen werden können, wie sie den Thetafunctionen der Fundamentalsysteme des Herrn Frobenius in der That zukommen. Kr.

J. Thomae. Bemerkung über Thetafunctionen vom Geschlecht 3. Leipz. Ber. 100-111.

Die Darstellung von $\vartheta((0))$ durch die Klassenmoduln, d. h. die Coefficienten der Grundgleichung $F(s, z) = 0$, zu welcher die Thetafunctionen gehören, bildete den Gegenstand einer von dem Herrn Verfasser im LXVI. Bande des Journals für Mathematik veröffentlichten Abhandlung; die damals mitgeteilte Formel für den Fall $p = 3$ in eine einfachere Gestalt zu bringen, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Die von dem Herrn Verfasser früher mitgeteilte Formel (Formel (1) pag. 104) kann nämlich, wie Herr Fuchs im LXXIII. Bande des genannten Journals gezeigt hat, von den in ihr vorkommenden Wurzeln der Gleichung

$$((u(s, z)-u(s_1, z_1)-u(s_2, z_2)-u(s_3, z_3)))\equiv((0))$$

befreit werden. Wird dies jedoch durchgeführt, so treten in die Formel (Formel (3) pag. 106) drei willkürliche Grössen ζ_1, ζ_2, ζ_3 ein, die notwendig nur formal in ihr enthalten sein können. Der Herr Verfasser zeigt, wie die Formel in eine solche Gestalt gebracht werden kann, dass sie diese Grössen ζ auch explicite nicht mehr enthält, und gelangt so zu der einfachen Endformel (6) pag. 108.

In der ersten Zeile der Abhandlung muss es „Im IC. Bande" statt „Im LXXXIX. Bande" und pag. 101 Zeile 11 „im LXXI. Bande" statt „im LXXII. Bande" heissen. Kr.

P. Appell. Sur quelques applications de la fonction $Z(x, y, z)$ à la physique mathématique. Acta Math. VIII. 265-294. (1886.)

Die in der früheren Abhandlung: „Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$", Acta Math. IV. 313-374 (s. F. d. M. XVI. 1884. 373) definirte Function $Z(x, y, z)$ wird hier auf die Lösung verschiedener physikalischer Fragen angewendet. Diese Anwendungen basiren auf einer Ausdehnung des Mittag-Leffler'schen Satzes und umfassen als

speciellen Fall die Bestimmung der Green'schen Function für ein rechtwinkliges Parallelepipedon im Riemann'schen Sinne, sowie die Bestimmung der Geschwindigkeiten einer sich auf dem Grunde eines prismatischen Gefässes bewegenden Flüssigkeit nach den Methoden von Boussinesq, de Saint-Venant und Flamant (C. R. 1870, 1882, 1883). Die Einführung der Function $Z(x, y, z)$, die durch eine absolut convergente Reihe definirt wird, gestattet, die Anwendung der nicht absolut convergenten Reihen zu vermeiden, auf welche die genannten Physiker bisher ausschliesslich geführt wurden. Beispiele für die hier befolgte Methode wurden von dem Herrn Verfasser schon früher in den C. R. XCVIII (s. F. d. M. XVI. 1884. 982) veröffentlicht. M.

A. Witting. Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabeln. Math. Ann. XXIX. 157-170.

A. Witting. Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) führt. Diss. Göttingen. 58 S. 8°.

Die von Herrn F. Klein im Falle $p = 1$ eingeführten Functionen $X_a(u)$ (vergl. Klein, Ueber die elliptischen Normalcurven etc. Leipz. Abhandlungen 1885, pag. 371) besitzen die Eigenschaft, dass das System der k Functionen $X_\alpha (\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ bei einer linearen Transformation der Perioden in ein System von k Functionen $X'_\alpha (\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$ übergeht, von denen jede aus den ursprünglichen Functionen X_α sich linear und homogen mit constanten Coefficienten zusammensetzt. Die Aufstellung analoger k^2 Functionen $X_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, k-1)$ für den Fall $p = 2$ und die Untersuchung dieser Functionen sowie der daraus zusammengesetzten $\frac{k^2+1}{2}$ geraden Functionen $Y_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} + X_{k-\alpha, k-\beta}$ und $\frac{k^2-1}{2}$ ungeraden Functionen $Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} - X_{k-\alpha, k-\beta}$ bildet den Inhalt der ersten sowie des

ersten Abschnitts der zweiten der beiden vorliegenden Abhandlungen.

Fasst man weiter die vier im Falle $k = 3$ existirenden Functionen Z als homogene Coordinaten eines Raumpunktes auf, so entsprechen den linearen Transformationen der Perioden Collineationen des Raumes; deren Gesamtheit zu untersuchen und übersichtlich darzustellen, ist die Aufgabe des zweiten Abschnittes der zweiten Abhandlung. Kr.

W. Reichardt. Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen. Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. L. 375-483.

Die Kummer'sche Fläche wird definirt als die Singularitätenfläche der einfach unendlich vielen confocalen Liniencomplexe zweiten Grades:

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0\right).$$

Während nämlich eine Gerade im allgemeinen vier Complexen dieser Schar angehört, deren Parameterwerte λ', λ'', λ''', λ'''' die elliptischen Liniencoordinaten der Geraden genannt werden, gehört eine Tangente T der Kummer'schen Fläche einem Complexe λ doppelt zählend, zwei anderen λ', λ'' aber einfach an. Da die singulären Linien der beiden letzteren Complexe die Haupttangenten des Berührungspunktes von T sind, so heissen λ', λ'' die Haupttangentenparameter dieses Punktes. Von diesem Paare algebraischer Parameter eines Punktes der Kummer'schen Fläche, durch deren Angabe übrigens der Punkt nicht eindeutig bestimmt ist, indem zu jedem Wertepaare λ', λ'' 32 Punkte der Fläche gehören, gelangt man, wie Herr F. Klein (Math. Ann. XXVII. 106) gezeigt hat, zu einem transcendenten Parameterpaare, indem man die hyperelliptischen Integrale

$$u_1 = \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad u_2 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$
$$f(\lambda) = (\lambda - k_1)(\lambda - k_2) \ldots (\lambda - k_6)$$

auf der durch Simultanstellung der fünf Verhältnisse:

$$\sqrt{\lambda-k_1} : \sqrt{\lambda-k_2} : \ldots : \sqrt{\lambda-k_6}$$

definirten 32blättrigen Riemann'schen Fläche von einem festen unteren Grenzpunkte einmal zum Punkte $\varrho' \sqrt{\lambda'-k_i}$, das andere Mal zum Punkte $\varrho'' \sqrt{\lambda''-k_i}$ hinerstreckt und die Differenzen $u_1'-u_1'' \mid u_2'-u_2''$ der erhaltenen Integralwerte als Parameter $U_1 \mid U_2$ des nunmehr eindeutig bestimmten entsprechenden Punktes der Kummer'schen Fläche einführt. Eine zweite ähnliche Methode (§ 6), den Punkten der Kummer'schen Fläche transcendente Parameter zuzuweisen, knüpft sich an eine von Hrn. Darboux herrührende algebraische Parameterverteilung. In jedem Falle gehören infolge der Periodicität der Integrale zu jedem Punkte der Kummer'schen Fläche unendlich viele, um Systeme additiver Constanten unterschiedene Parameterwertepaare $U_1 \mid U_2$, und eine eindeutige Function $\Phi(U_1 \mid U_2)$ des Ortes der Kummer'schen Fläche muss eine vierfach periodische Function von $U_1 \mid U_2$ mit bestimmten Perioden sein. Insbesondere werden daher Quotienten von Thetafunctionen mit den Variablen $U_1 \mid U_2$ und passend gewählten Parametern eindeutige Functionen des Ortes der Kummer'schen Fläche sein. Setzt man eine solche Function $\Phi(U_1 \mid U_2)$ einer Constanten gleich, so wird dadurch eine Beziehung zwischen U_1 und U_2 geschaffen, also eine Curve auf der Kummer'schen Fläche definirt. Die Discussion solcher Curven bildet den hauptsächlichsten Inhalt der Capitel III-V.

Aber abgesehen davon, dass man in der hier angedeuteten Weise die Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen für die Geometrie auf der Kummer'schen Fläche verwenden kann, ist die Kummer'sche Fläche selbst einer Darstellung durch solche Thetafunctionen, wie zuerst Herr Weber (J. für Math. LXXXIV. 332) gezeigt hat, fähig. Der Verfasser zeigt, wie solche Gleichungen der Kummer'schen Fläche auf verschiedene Weisen und in verschiedenen Formen erhalten werden können (cf. pag. 408, 428 u. f., 446). Kr.

K. Bobek. Ueber hyperelliptische Curven III. Wien. Ber. XCV. 31-41.

Siehe Abschn. IX, Cap. 2.

G. Kobb. Om bäglängden af algebraiska kroklinier. Stockh. Öfv. XLIV. No. 10. 713-719.

Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, dass das Bogenintegral einer algebraischen Curve ein Abel'sches Integral erster Gattung wird. K.

R. Noske. Die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid. Teil II. Pr. Königsberg i. Pr.

Fortsetzung der Abhandlung vom Jahre 1886 (s. F. d. M. XVIII. 761). Die laufenden Coordinaten und der Bogen der kürzesten Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid lassen sich bekanntlich im allgemeinen durch hyperelliptische Functionen und Transcendenten bestimmen, in gewissen Fällen aber durch elliptische. Es werden zur Lösung des Problems die von Rosenhain in seinem „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes", Paris 1850, entwickelten Formeln benutzt. Von der einschlägigen Literatur werden die Abhandlungen von Weierstrass (Berl. Monatsber. 1861. 986-997) und H. Weber (J. für Math. LXXXII. 133) angeführt. M.

O. Staude. Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten. Acta Math. X. 183-200.

Herr Staude fasst in der Einleitung den Inhalt seiner Abhandlung mit folgenden Worten zusammen.

„Die bekannte Darstellung der geodätischen Linie auf den Flächen 2ten Grades durch hyperelliptische Functionen zweier Veränderlichen und verschiedene ähnliche Anwendungen der genannten Functionen weisen auf eine Gattung transcendenter

Raumcoordinaten hin, durch deren Einführung jene Anwendungen auf einen gemeinsamen Ausgangspunkt zurückgeführt werden. Statt zur Darstellung einzelner Raumgebilde einen oder zwei Parameter durch die Integralsummen des Jacobi'schen Umkehrproblems zu definiren, kann man nämlich zuerst darauf ausgehen, alle Punkte des Raumes durch drei unabhängige Summen von je drei hyperelliptischen Integralen darzustellen und die geometrische Discussion der entsprechenden räumlichen Gebilde an den Gebrauch dieser transcendenten Coordinaten zu knüpfen. Im Folgenden sind als typische Formen drei unabhängige Parameter der angedeuteten Art in Kürze zusammengestellt.

Dabei ist nicht sowohl auf die mannigfachen geometrischen Sätze Rücksicht genommen, welche als gemeinsame Folgerungen aus jeder einzelnen dieser Darstellungen sich ergeben, als vielmehr auf mechanische Bedeutungen der letzteren. An den herangezogenen einfachsten Beispielen mechanischer Vorgänge, deren analytische Behandlung auf hyperelliptische Functionen 1ter oder 2ter Ordnung führt, wird überdies auf eine charakteristische Unterscheidung der betreffenden Bewegungsvorgänge hingewiesen. Bei der Anwendung der hyperelliptischen Functionen auf die Darstellung der Bewegungen kommt nämlich wesentlich in Frage, wie viele von den reellen Periodicitätsmoduln, respective Systemen zusammengehöriger Periodicitätsmoduln bei dem einzelnen Falle zur Geltung gelangen. Dieser Frage parallel geht die andere, ob die betreffende Bewegung eine unmittelbar periodische oder eine nur unter gewissen Bedingungen periodisch werdende ist. Eine darauf beruhende Gruppirung aller Bewegungsvorgänge findet an den hier behandelten Darstellungen der Raumpunkte ihre einfachste Erläuterung." Hch.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

E. Beltrami. Sulle funzioni sferiche d'una variabile. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 469-478.

Bezeichnet man, wie üblich, mit $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ die einfachen Kugelfunctionen erster und zweiter Art und setzt

$$(1) \qquad AP_n(x)+BQ_n(x) = R_n(x),$$

wo die Constanten A, B vom Index n unabhängig sind, so gelten für die R die Recursionsformeln

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dR_{n+1}}{dx} = x\dfrac{dR_n}{dx}+(n+1)R_n, \\ \dfrac{dR_{n-1}}{dx} = x\dfrac{dR_n}{dx}-nR_n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen finden sich schon bei F. Neumann (Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen; cf. F. d. M. X. 1878. 333-336). Doch sind sie dort für die Functionen erster und zweiter Art gesondert abgeleitet, auch ist ihre wahre Bedeutung bisher nirgends erkannt. Sie allein genügen nämlich, um mit Hinzunahme der Werte von P_0 und Q_0 das ganze System der Kugelfunctionen einer Veränderlichen zu definiren. Der Verfasser leitet die in Rede stehenden Gleichungen folgendermassen ab. Setzt man

$$(3) \qquad R_n = x\frac{d\varphi}{dx}+m\varphi,$$

so ergiebt sich aus der Differentialgleichung für R_n, falls m entweder $= n-1$ oder $= -(n+2)$ ist, dass φ der Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+m(m+1)\varphi = 0$$

genügt. Daher ist $\dfrac{d\varphi}{dx}$ selbst eine der Functionen R; und damit folgen aus (3) leicht die Gleichungen (2).

Diese Gleichungen werden dann benutzt, um die Reihe

$$\sum_0^\infty s^n R_n = F(x, s) \qquad [x^2 < 1, s^2 < 1]$$

zu summiren. Zu dem Zwecke wird das vollständige Differential der Function $u.F$ gebildet, wo

$$u^2 = 1-2sx+s^2$$

ist, und mittels der Gleichungen (2) auf die Form

$$d(uF) = \left\{\frac{1-sx}{u}dx-\frac{1-x^2}{u}ds\right\}\frac{dR_0}{dx}$$

gebracht. Da

$$R_0 = A.1+B\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

ist, so folgt durch Integration

$$(4)\qquad F(x, s) = \sum_0^\infty s^n R_n = \frac{A}{u} + \frac{B}{u}\lg\sqrt{\frac{u-s+x}{u+s-x}}.$$

Damit ist die Summe der Reihe

$$\sum_0^\infty s^n Q_n(x)$$

auf neue Art abgeleitet.

In (4) kann man

$$\lg\sqrt{\frac{u-s+x}{u+s-x}} = \lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \int_0^s \frac{ds}{u}$$

setzen. Benutzt man ausserdem die bekannte Entwickelung

$$\frac{1}{u} = \sum_0^\infty s^n P_n(x),$$

so folgt

$$Q_n = P_n\lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{P_m P_{n-m-1}}{m+1},$$

eine zuerst von Hermite (cf. F. d. M. XVI. 1884. 452) abgeleitete Formel. Wn.

F. G. Teixeira. Sur une limite relative aux polynômes de Legendre. Prag. Ber. 1886. 19-20.

Aus der bekannten Recursionsformel zwischen drei auf einander folgenden Kugelfunctionen ergiebt sich

$$\lim_{n=\infty}\frac{X_n}{X_{n+1}} = x\pm\sqrt{x^2-1};$$

und zwar ist von den beiden Werten derjenige zu wählen, der den kleineren Modul besitzt. Wn.

O. Zanotti Bianco. Alcuni teoremi sui coefficienti di Legendre. Torino Atti XXII. 225-239.

Aus bekannten Formeln, insbesondere aus der Entwickelung von $\sqrt{1-x^2} = \sin\vartheta$ und von $\cos(2n\vartheta)$ nach Kugelfunctionen mit dem Argumente $x = \cos\vartheta$ werden die Werte folgender Integrale ermittelt:

$$\int_{-1}^{+1} \sin\vartheta . P_n(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} \sin^2\vartheta . P_n(x) P_m(x) dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} \cos^2\vartheta . P_n(x) P_m(x) dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} \cos(2\vartheta) P_n(x) P_m(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} \cos(2n\vartheta) P_s(x) P_s(x) dx,$$

$$\int_{-1}^{+1} \cos^{2n}\vartheta . P_s(x) P_s(x) dx, \quad \int_{-1}^{+1} \sin^{2n}\vartheta . P_s(x) P_s(x) dx.$$

Wn.

G. Giuliani. Sopra certe funzioni analoghe alle sferiche. Batt. G. XXV. 203-218.

Die Functionen, deren hauptsächlichste Eigenschaften hier abgeleitet werden, sind die Coefficienten der Entwickelung von

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{k}{h}}$$

nach steigenden Potenzen von α. Die sich ergebenden Resultate sind nicht neu, wie der Verfasser glaubt, sondern sämtlich bereits von andern Autoren gefunden [cf. F. d. M. IX. 1877. 373; XVI. 1884. 452 etc.]. Ein näheres Eingehen auf den Inhalt hält Referent aus diesem Grunde für überflüssig. Nur das eine sei noch erwähnt, dass einige Formeln hier nicht richtig angegeben sind. So heisst z. B. der Integralsatz für die Function X_n (den Coefficienten von α^n in obiger Entwickelung) nicht

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m (1-x^2)^{\frac{2k}{h}-1} dx = 0 \qquad (m \gtrless n),$$

sondern

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m (1-x^2)^{\frac{k}{h}-\frac{1}{2}} dx = 0 \qquad (m \gtrless n);$$

und analog ist die für $m = n$ geltende Gleichung zu verbessern.

Wn.

A. CAYLEY. Note on the Legendrian coefficients of the second kind. Mess. (2) XVII. 21-23.

Der Verf. meint, man beachte nicht genug die Lösung

$$y = \tfrac{1}{2}P_n \log\frac{x+1}{x-1} - Z_n = Q_n,$$

wo P_n, das Legendre'sche Integral erster Art, eine rationale und ganze Function n^{ten} Grades von x, und Z_n eine rationale und ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist. Wir haben somit eine Lösung, welche keine andere transcendente Function als den Logarithmus enthält, und welche also als ein zweites particulares Integral lieber angenommen werden sollte als die Form $y = Q_n$, in welcher wir die unendliche Reihe Q_n haben, die eine unbekannte transcendente Function ist. Ferner ist der gewöhnlich für Z_n gegebene Ausdruck, nämlich

$$Z_n = \frac{2n-1}{1.n}P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5} + \cdots$$

sehr einfach und elegant; aber die natürlichere Definition (durch welche auch Z_n sehr bequem berechnet wird) ist die, dass Z_n der ganze Bestandteil von $\tfrac{1}{2}P_n \log\frac{x+1}{x-1}$ ist, wenn der Logarithmus nach absteigenden Potenzen von x entwickelt wird. Die Werte von Z_1, Z_2, ..., Z_{10} sind der Arbeit angehängt.

Glr. (Lp.)

E. BRAND. Notice sur la théorie de la fonction X_n de Legendre. Paris. Gauthier-Villars.

P. ALEXANDER. Expansion of functions in terms of linear cylindric spherical and allied functions. Edinb. Trans. XXXIII. 313-320.

Der Verf. bezieht sich auf Abhandlungen von König in Math. Ann. V, von Sonine ebenda XVI und von Lord Rayleigh in seiner Theorie des Schalles. Das allgemeine Problem ist dasjenige der Bestimmung der Coefficienten A in einer Ent-

wickelung von der Gestalt:

$$\varphi(x) = A_0 G_0(x) + A_1 G_1(x) + A_2 G_2(x) + \cdots,$$

wo G_0, G_1, G_2, ... durch irgend ein gegebenes Gesetz zusammenhängen; und für einen besonderen Fall von beträchtlicher Allgemeinheit gewinnt der Verf. einen Operator O_n, so dass $O_n G_m = 0$, ausser wenn $m = n$, und gelangt so zu einer Lösung der Aufgabe. Cly. (Lp.)

L. Schläfli. Verbesserungen und Zusätze zu den Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen (Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini p. 277). Roma Acc. L. Mem. (4) IV. 37-44.

Ueber die im Titel angeführte Abhandlung wurde schon an der geeigneten Stelle (F. d. M. XIII. 1881. 405) berichtet. Der vorliegende Aufsatz enthält: 1) die Vervollständigung des Beweises des Satzes, nach welchem die Wurzeln der Gleichung $Q = 0$ (oder nach Heine $E(\mu) = 0$) sämtlich reell sind; 2) die Berichtigung einiger Druckfehler; 3) die Bestätigung der in der früheren Abhandlung ausgesprochenen Vermutung, dass die als N bezeichnete Grösse sich durch ein einziges Product darstellen lasse, und die Aufstellung dieses Productes. Vi.

L. Gegenbauer. Ueber die Bessel'schen Functionen. Wien. Ber. XCV. 409-410.

Ohne Beweis wird folgendes Resultat mitgeteilt: Ist die Function $f(r, \varphi)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

absolut convergirt, so kann dieselbe für beliebig gegebene Werte r_1, φ_1 der Variabeln entweder durch die Formel

$$f(r_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^\nu \pi \Pi(\nu-1)} \int_0^\infty z^\nu dz \int_0^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) u^{\nu-1} J_{\nu-1}(zu)\, d\varphi$$

oder durch die Formel

$$f(r_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^{\nu-2} \pi \Pi(\nu-1)} \int_0^\infty z^{2\nu+1} dz \int_0^\infty r\, dr \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) u^{2\nu} J_{\nu-1}(z^2 u^2)\, d\varphi$$

ausgedrückt werden. Dabei ist $0 < \nu < \frac{1}{2}$ und

$$u^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Die erste Gleichung führt für $\nu = 1$ auf eine von Herrn C. Neumann, die zweite für $\nu = \frac{1}{2}$ auf eine von P. Du Bois-Reymond aufgestellte Formel. Wn.

G. Giuliani. Sopra alcune funzioni analoghe alle funzioni cilindriche. Batt. G. XXV. 198-202.

Der Verfasser betrachtet die Function

$$H_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z^h \sin^h w - nw) dw,$$

in der n eine ganze Zahl ist, und findet u. a., dass $H_n(z)$ der Differentialgleichung genügt

$$\frac{d^2 H_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dH_n}{dz} + H_n\left(h^2 - \frac{n^2}{z^2}\right) = 0.$$

Dies Resultat ist falsch. Denn der letzten Gleichung genügt die Bessel'sche Function

$$J_n(hz) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(hz \sin w - nw) dw.$$

Auch die Entwickelungen, die zu der genannten Differentialgleichung führen, sind unrichtig. Wn.

R. Olbricht. Studien über die Kugel- und Cylinderfunctionen. (Nova Acta d. Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturf. Bd. LII.). Diss. Leipzig. 48 S. 4°.

P. Schafheitlin. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral. Math. Ann. XXX. 157-178.

Sonine. Sur les fonctions cylindriques. Math. Ann. XXX. 582-583.

Referat in Abschnitt VII, Cap. 2A. 443.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

H. Poincaré. Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie. S. M. F. Bull. XV. 203-216.

Gegenstand der vorliegenden Studie ist die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Hypothesen, welche allen möglichen Arten zweidimensionaler Geometrie gemeinsam sind, und nach denjenigen, welche noch hinzugefügt werden müssen, um zu speciellen Formen dieser Geometrie zu gelangen. Der Verfasser betrachtet zuerst die „quadratische" Geometrie auf den centrischen Flächen zweiter Ordnung, wobei als „Gerade" ein ebener Diametralschnitt, als „Kreis" jeder andere ebene Schnitt definirt wird. Der Winkel zweier durch einen Punkt A gehenden Geraden ist der Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses zwischen den beiden durch A gehenden Erzeugenden der Fläche und den in A an die beiden Diametralschnitte gezogenen Tangenten. Die Länge einer Strecke AB ist der Logarithmus des anharmonischen Verhältnisses zwischen den Punkten A und B und den unendlich fernen Punkten des Diametralschnittes. Die Logarithmen sind durch i zu dividiren, wenn im ersten Falle die Erzeugenden, im zweiten die unendlich fernen Punkte imaginär sind. Man gelangt nun zur Riemann'schen, Lobatschewsky'-

schen oder euklidischen Geometrie, je nachdem die zu Grunde gelegte Fläche ein Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid oder elliptisches Paraboloid ist. Zu diesen drei Hauptarten kommen noch die Geometrien des einschaligen Hyperboloids und diejenigen der verschiedenen Grenzfälle und Ausartungen der Flächen. Eine übersichtliche Einteilung aller auf den Flächen zweiten Grades möglichen Geometrien nebst den zu ihrer Aufstellung erforderlichen Hypothesen wird aber erst durch Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie vermittelt. Der Verfasser gelangt hiermit zu folgenden Resultaten: Legt man nur die beiden Hypothesen zu Grunde: 1) Die Ebene hat zwei Ausdehnungen, 2) die Lage einer ebenen Figur in ihrer Ebene ist durch drei Bedingungen bestimmt, so hat man die Wahl zwischen den quadratischen Geometrien und zwei anderen durch specielle Gruppen ausgezeichneten. Letztere werden beseitigt durch die Hypothese: 3) Eine ebene Figur ist in ihrer Ebene unbeweglich, sobald zwei ihrer Punkte fest sind. Die Geometrie des einschaligen Hyperboloids wird ausgeschlossen durch zwei weitere, von einander abhängige Hypothesen: 4) Der Abstand zweier Punkte kann nur dann Null sein, wenn die Punkte zusammenfallen. 5) Von zwei sich schneidenden Geraden kann die eine durch Drehung um den Schnittpunkt zur Deckung mit der andern gebracht werden. Ferner wird 6) durch die Annahme, dass zwei Gerade sich nur in einem Punkte schneiden können, die sphärische, und 7) durch die Festsetzung einer constanten Winkelsumme des Dreiecks die Lobatschewsky'sche Geometrie ausgeschlossen. Hiermit ist also der Inbegriff der für die euklidische Geometrie notwendigen und hinreichenden Postulate gewonnen. Der Aufsatz schliesst mit einem Hinweis auf die abweichenden Voraussetzungen, welche für Riemann's Einteilung der Geometrien massgebend sind, und mit der Bemerkung, dass alle diese Arten ebener Geometrie, rein wissenschaftlich betrachtet, gleich wahr und gleich berechtigt sind, während die euklidische nur wegen der Uebereinstimmung ihrer Resultate mit den Thatsachen unserer Weltordnung den Vorrang beanspruchen kann. Schg.

G. LORIA. Le definizioni di spazio a *n* dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di G. Cantor. Batt. G. XXV. 97-108.

Dieser Aufsatz kennzeichnet sich als eine Einführung in das Studium der Cantor'schen Arbeiten über Punktmengen, namentlich soweit es auf das Verständnis der aus denselben gezogenen geometrischen Folgerungen ankommt. Auch die einschlägigen Arbeiten Dedekind's sind berücksichtigt. Die Darstellung empfiehlt sich durch Klarheit und Uebersichtlichkeit.

Schg.

J. PETERSEN. Bemerkungen über den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. Math. Ann. XXIX. 239-246.

Uebersetzt aus Zeuthen Tidsskr. (5) I. 3-11 durch Hrn. R. v. Fischer-Benzon; vgl. das Referat in F. d. M. XV. 1883. 456.

Lp.

V. REYES Y PRÓSPER. Sur la géométrie non-Euclidienne. Math. Ann. XXIX. 154-156.

Der von Hrn. Klein mit Hülfe vollständiger Vierecke geführte Beweis des Satzes, dass die Lage des vierten harmonischen Punktes auch in gekrümmten Räumen nur von der Lage der drei gegebenen Punkte abhängt, wird in vereinfachter Gestalt vorgetragen.

Schg.

M. PASCH. Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde. Math. Ann. XXX. 127-131.

Der Verfasser zeigt, dass die von Herrn Ventura Reyes y Prósper im XXIX. Bande der mathematischen Annalen veröffentlichte Mitteilung: „Sur la géométrie non-Euclidienne" schon in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882" enthalten ist, und knüpft hieran eine kurze, gehaltvolle Uebersicht der Gesichtspunkte, die bei der Abfassung dieses Werkes,

sowie des geometrischen Teiles seiner „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1882“ massgebend waren.

Js.

V. Schlegel. Sur les distances moyennes entre un point et des variétés de points, discrètes ou continues. Ass. Franç. (Toulouse.) 266-281.

Tarry. Essai sur la géométrie des figures imaginaires. Ass. Franç. (Toulouse.) 163-188.

Eigil Schmidt. Om Planers uendelig fjerne Punkter. Zeuthen T. (5) V. 9-13.

Von den unendlich fernen Punkten der Ebene. V.

A. S. Bang. Nogle Maximumsproblemer i den ikke euklidiske Geometri. Zeuthen T. (5) V. 136-141.

Es wird gezeigt, dass die gewöhnlichen Sätze über isoperimetrische Figuren auch in der nichteuklidischen Geometrie ihre Gültigkeit behalten, so z. B. dass unter allen geschlossenen Linien mit derselben Länge der Kreis den grössten Flächeninhalt hat.

V.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

W. Dyck. Beiträge zur Analysis situs. III. Leipz. Ber. 40-52.

Im Anschluss an die beiden ersten gleichbetitelten Aufsätze (s. F. d. M. XVII. 1885. 523; XVIII. 1886. 454) wird hier die Frage aufgestellt: Welche Anzahlbestimmungen sind (unter Vor-

aussetzung eines analytischen Datums) an einer Mannigfaltigkeit durchzuführen, um dieselbe im Sinne der Analysis situs hinreichend und vollständig zu charakterisiren? Diese Frage wird speciell für ebene Curven und für Flächen beantwortet. Ist im ersten Falle die Curve durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben, so wird ihr Verlauf bestimmt 1) durch ihre horizontalen Tangenten ($y = y_i$) nebst Angabe, auf welcher Seite der Tangente der berührte Curvenzweig liegt, 2) durch das Lagenverhältnis des Berührungspunktes jeder dieser Tangenten zu ihren Schnittpunkten mit der Curve, ausgedrückt durch gewisse Zahlen λ_i, die mittels des Sturm'schen Satzes bestimmt werden. Im zweiten Falle wird die gegebene Fläche auf eine Ebene projicirt, wobei eine Umrisscurve und verschiedene Doppelcurven entstehen, letztere als Projectionen der Raumcurven, in denen die Fläche sich selbst durchsetzt. Die Anordnung der Flächenteile wird hier bestimmt 1) durch die Umrisscurve und die Doppelcurven, nebst Angabe, auf welcher Seite der Curve die beiden in der Projection sich bedeckenden Flächenstücke liegen, 2) durch die Art der Ueberkreuzungen des entstandenen Curvensystems und der Berührungen von Umriss- und Doppelcurven, 3) durch die Schnittpunktzahlen (λ) derjenigen Projectionsstrahlen, welche durch je einen Punkt der Umrisscurve und der Doppelcurven gehen. Diese Bedingungen werden als notwendig und hinreichend nachgewiesen. Schliesslich findet sich, dass ein beliebig gegebenes System ebener geschlossener Curven stets auf verschiedene Arten als Abbildung des vollständigen Umrisses einer Fläche angesehen werden kann, und zwar auch dann, wenn diese Curven sich selbst durchsetzen. Schg.

Fr. Meyer. Ueber algebraische Knoten. Edinb. Proc. XIII. 931-946.

Eine Anwendung der zuerst von Hrn. Tait aufgestellten topologischen Theorie der „Knoten“ auf ebene algebraische Curven (R_n) hat der Verfasser schon 1878 (Münchener Dissertation) gegeben. Die dort mehr empirisch gefundenen Resultate hat der Verfasser

neuerdings algebraisch begründet und erweitert, und der vorliegende Aufsatz giebt eine Uebersicht dieser Untersuchungen. Nach Zusammenstellung der für die Behandlung algebraischer Knoten nötigen Grundbegriffe und Bezeichnungen werden die bei rationalen Curven vierter und fünfter Ordnung auftretenden Knoten ermittelt, tabellarisch zusammengestellt und durch Figuren erläutert. Gelangt man auf diese Weise einerseits zu den von Hrn. Tait aufgestellten „topologischen" Knoten, so lassen sich auch umgekehrt die Tait'schen Knoten mit 3-7 Knotenpunkten an Curven sechster Ordnung nachweisen. Die verschiedenen Gestalten der R_4 und R_5 können zunächst algebraisch durch quadratische Transformationen gefunden werden, sodann die der R_5 mehr anschaulich durch einen „Auflösungsprocess", welcher eine von einer Geraden (R_1) geschnittene R_4 in eine R_5 verwandelt. Endlich kann eine beliebige R_n in Verbindung mit einer Geraden R_1 durch Projection einer Raumcurve C_{n+1} dargestellt werden und, noch allgemeiner, durch algebraische Processe aus einer R_m und einer R_n eine R_{m+n}. Mit der Angabe von Beziehungen zwischen den Doppelpunktsargumenten einer R_5 schliesst die Arbeit. (Vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 457.)

Schg.

O. Simony. Ueber den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung. Wien. Ber. XCVI. 191-286.

Die topologischen Untersuchungen des Verfassers hängen bekanntlich mit der Aufgabe zusammen, die verschiedenen in sich zurückkehrenden Schnitte auf der Oberfläche eines geschlossenen Ringes und die Verschlingungen und Knoten der hierdurch entstehenden Streifen zu studiren. In der vorliegenden Abhandlung beschreibt der Verfasser zuerst einen Apparat, welcher es ermöglicht, aus einem System paralleler gespannter Fäden durch Rotation solche Verschlingungen und Knotenverbindungen beliebig zu erzeugen. Mittels dieses Apparates ergiebt sich für die ein-

facheren Fälle eine Reihe von Erfahrungssätzen, welche durch Analogieschluss als Specialfälle allgemeiner mathematischer Sätze dargestellt werden. Der Gang der Untersuchung, die sich an frühere Arbeiten des Verfassers, z. B. „Eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiet der Topologie" (s. F. d. M. XVI. 1884. 466) anschliesst, ist im allgemeinen folgender: Die Typengleichung einer Knotenverbindung enthält nur zwei, diejenige einer Verschlingung mehrere Argumente. Durch geeignete Transformation einer solchen Verschlingung lässt sich dieselbe aber ebenfalls von zwei Argumenten abhängig machen. Dies hatte sich für primäre Verschlingungen in einfacher Weise schon früher herausgestellt. Hier nun wird dasselbe für secundäre Verschlingungen festgestellt, und zwar ergiebt sich die in zahlentheoretischer Hinsicht wichtige Thatsache, dass die sogenannten Windungszahlen dieser Verschlingungen vollständig durch die Primfactoren der beiden Argumente u und t bestimmt werden. Bei der erwähnten Transformation bleibt eine durch ein symbolisches Product

$$P_1 = V^{a_1} U^{a_2} V^{a_3} \dots U^{a_{2m}} V^c$$

dargestellte Knotengruppe unverändert. Dieselbe wird nun analytisch durch eine Function F dargestellt, und zwar in Form eines Kettenbruchs, dessen Nenner die Zahlen $a_1, a_2, \dots, c$ sind, wobei vorläufig statt der variabeln Umlaufszahl u eine bestimmte a angenommen ist. Um P_1 auch als Function von u darzustellen, müssen specielle Werte von P_1 untersucht werden, wozu mit Rücksicht auf die Darstellung von P_1 durch zwei Argumente eine Darstellung der Zahlen durch das dyadische Zahlensystem erforderlich ist. Hierbei ergiebt sich nun folgendes Gesetz: Die charakteristischen Exponenten $a_1, a_2, \dots$ der stabilen Knotengruppe jeder secundären transformirten Knotenverschlingung bestimmen als Exponenten des (symbolischen) dyadischen Productes

$$1^{a_1}\, 0^{a_2}\, 1^{a_3} \dots 0^{a_{2m}}\, 1^c$$

eine Primzahl von der Form $6l-1$ oder $6l+1$, je nachdem die der Knotenverschlingung zugehörige Umlaufszahl ungerade oder gerade ist. Von hier an tritt die topologische Grundlage der

zahlentheoretischen Resultate mehr in den Hintergrund, während die Wichtigkeit des dyadischen Zahlensystems bestehen bleibt. Die folgenden Sätze begründen die Zuordnung einer Primzahlengruppe zu einer ungeraden Zahl, ferner die Einteilung aller Primzahlen in die drei Gruppen [2, 3], [$6l-1$], [$6l+1$], und liefern eine theoretische Grundlage für die Formulirung der Frage, wie viele Primzahlen zwischen 1 und $x+1$ liegen. Es ergeben sich hierbei Sätze über Kettenbrüche, aus welchen wieder rückwärts Schlüsse über Umlaufszahlen von Knotengruppen gezogen werden. Es stellt sich ferner ein Unterschied heraus zwischen der topologisch-arithmetischen und der rein arithmetischen Zuordnung gewisser Primzahlen zu einer ungeraden Zahl, und es wird auf Grund umfangreicher Tabellen festgestellt, wie viele Primzahlen in der einen und in der andern Hinsicht zu einer gegebenen ungeraden Zahl gehören. Mit der Aufstellung einiger Fragen ähnlichen Charakters schliesst die inhaltreiche Abhandlung. Schg.

T. P. Kirkman. Solution of questions 8886 and 9009. Ed. Times XLVII. 125-127.

Beide Aufgaben, deren Lösungen vom Verfasser gegeben werden, betreffen die Theorie der Polyeder. Die erste lautet: Zwei 28-Flache haben die folgenden Dreiecke, wenn die Ecken mit a, b, c, ..., n, p, q bezeichnet werden:

abg, *abc*, *acd*, *ade*, *aef*, *afg*, *bjc*, *bih*, *bjh*, *big*, *cjl*, *clk*, *ckd*, *dkm*, *dfm*, *def*, *fmq*, *fgq*, *ghq*, *ghi*, *hpj*, *hpq*, *jlk*, *jkp*, *mnq*, *mnp*, *mpk*, *pqn*.

abg, *afg*, *afe*, *aed*, *abc*, *acd*, *bhg*, *bhi*, *bci*, *cji*, *cdj*, *djk*, *dkl*, *dfl*, *def*, *fkl*, *fkm*, *fgm*, *ghm*, *ijq*, *ihp*, *ipn*, *inq*, *jkn*, *jnq*, *kmn*, *hmn*, *hpn*.

Gesucht wird die ganze Symmetrie beider.

Die zweite ist die folgende. P und Q sind ein regelmässiges Ikosaeder und Oktaeder. K, L, M, N sind Tetraeder, jedes über einer Grundfläche, die mit einer Fläche von P oder Q zusammenfällt. Gesucht wird die Anzahl der Polyeder, von denen keines die Wiederholung oder das Spiegelbild eines anderen ist, und

die dadurch entstehen, dass man ein oder mehrere *K*, *L*, *M*, *N* auf ebenso viele Flächen von *P* oder *Q* stellt; ferner eine Beschreibung der Ecken und der Symmetrie der construirten Körper.

In einem Nachwort erhebt der Verfasser in scharfer Form Prioritätsansprüche gegen Herrn C. Jordan's Aufsätze „Recherches sur les polyèdres" im J. für Math. LXVI und LXVIII (1866 und 1868), und gegen den Aufsatz von Reiss ebenda LVI. 326 (1859). Wenn Hr. Kirkman eingesteht, dass er erst jüngst (recently) die Existenz der Aufsätze des Hrn. Jordan erfahren habe, so dürfte er nicht mit der Ansicht durchdringen, dass andere Autoren eine grössere Pflicht der Literaturkenntnis hätten und von ihm des bewussten Plagiats beschuldigt werden könnten.

Lp.

K. Rudel. Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension. Fürth. Essmann. (S.-Abdr.) 32 S.

Von den drei Reihen regelmässiger Körper, welche sich bis in Räume mit beliebiger Dimensionenzahl fortsetzen lassen, hatte der Verfasser schon in einer früheren Abhandlung (Vom Körper höherer Dimension, s. F. d. M. XIV. 1882. 437) die beiden ersten behandelt, welche mit den Gliedern: Dreieck, Tetraeder, bezw. Viereck, Hexaeder beginnen. In der vorliegenden Arbeit gelangt er auf analogem Wege zu der dritten Reihe (Viereck, Oktaeder etc.). Bei dieser Gelegenheit ergeben sich auch Sätze über die Zahlen der Grenzgebilde an den Körpern der beiden vorhergehenden Reihen.

Schg.

Sir W. Thomson. On the division of space with minimum partitional area. Phil. Mag. (5) XXIV. 503-514.

Die Aufgabe wird hauptsächlich um des dynamischen Kriteriums willen behandelt, dass, wo drei oder mehr Zwischenflächen zwischen den Zellen, in welche der Raum geteilt angenommen ist, in einer Curve oder geraden Linie sich schneiden, ihre Tangentialebenen durch jeden Punkt der Trefflinie sich unter solchen

Winkeln schneiden, dass gleiche Kräfte in diesen Ebenen senkrecht zu ihrer Schnittlinie sich im Gleichgewicht halten. Das Rhombendodekaeder wird als eine Lösung nachgewiesen, aber die Tetraederwinkel sind wesentlich instabil. Die Betrachtung dieser Instabilität an idealen Zellen aus Seifenschaum führt zu dem Theoreme, dass der Raum in gleiche und ähnliche tetrakaidekaedrische Zellen eingeteilt werden kann, jede begrenzt durch zwei kleine, zu einander parallele ebene Vierecke, durch vier grosse Vierecke in Ebenen, die parallel zu den Diagonalen der kleinen sind, und durch acht nicht ebene Sechsecke; jedes hat zwei Kanten mit den kleinen Vierecken und vier Kanten mit den grossen gemeinschaftlich. Die Anweisung zur Construction eines Modells des Minimal-Tetrakaidekaeders wird gegeben, ebenso eine Lösung zur ersten Annäherung für die mathematische Aufgabe über die Berechnung der Formen der ebenen Bogenkanten und der gekrümmten Oberfläche der sechseckigen Flächen dieses Tetrakaidekaeders. Gbs. (Lp.)

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie.)

J. S. Mackay. The Elements of Euclid: Books I to VI and parts of Books XI and XII. London and Edinburgh. W. & R. Chambers. VI + 406 S. (1888).

H. S. Hall and F. H. Stevens. A textbook of Euclid's Elements: Books I-VI. London. Macmillan and Co. XIII + 332 S. (1888).

H. Deighton. The Elements of Euclid. Books I-VI and parts of Books XI and XII. London. George Bell and Sons. VI + 419 S.

Diese drei Ausgaben bezeugen das grosse Ansehen der Elemente des Euklid im englischen mathematischen Unterrichte.

Zur Anbequemung an die Bedürfnisse der Studirenden der Neuzeit ist die Behandlung solcher Gegenstände wie Potenzlinie, Pol und Polare, Transversalen, geometrische Oerter, u. dgl. m. hinzugefügt worden, und wenn auch die euklidische Folge der Sätze beibehalten ist, so hat eine Vereinfachung bei der Herleitung Eingang gefunden, indem man die neuere Terminologie gebraucht und in einzelnen Fällen mehrere Beweise zur Auswahl gegeben hat. In allen drei Ausgaben sind zahlreiche Uebungen beigebracht, um Gewandtheit in der Handhabung der in die Sätze gekleideten Lehren zu verschaffen. Hrn. Mackay's Ausgabe ist in Sonderheit reich an historischen Noten, deren Genauigkeit durch seine ausgebreitete Kenntnis der euklidischen Geometrie verbürgt wird. In Hrn. Deighton's Ausgabe liegt eine neue Uebersetzung aus dem griechischen Texte vor. Eine eingehende Charakterisirung der drei Ausgaben ist in einer kurzen Anzeige für das Jahrbuch kaum möglich. Alle sind mit klarem Drucke ausgestattet und mit guten Figuren versehen, so dass ein Schüler in Besitz irgend einer derselben aller Beihülfe teilhaftig ist, die billiger Weise für eine Einführung in die „Elemente des Euklid" verlangt werden kann. Gbs. (Lp.)

E. D'OVIDIO. Il libro primo di Euclide esposto dal Prof. E. d'O. Napoli. Pellerano. 112 S.

Bei der Abfassung der im Titel genannten Broschüre hat der Verf. einen Auszug aus denjenigen Teilen der von ihm und Herrn Sannia verfassten „Elementi di Geometria" gemacht, in welchen die im ersten Buche des Euklid gelehrten Theorien dargelegt werden, indem er dieselben überarbeitet und nebengeordnet hat. Der Grund dieser Veröffentlichung ist in einer Ministerial-Verfügung zu suchen, welche den Gymnasien die Durchnahme des ersten Buches vorschreibt. Wir begnügen uns mit dieser Mitteilung, da wir uns im nächsten Jahrgange der F. d. M. mit der siebenten Auflage der Elementi di Geometria der Herren Sannia und d'Ovidio zu beschäftigen haben werden.

La. (Lp.)

H. Seeger. Die Elemente der Geometrie. 3te Aufl. Wismar. Hinstorff. 211 S.

Der erste, theoretische Teil dieses Buches behandelt in fünf Abschnitten 1) die geometrischen Grundgebilde und ihre elementaren Eigenschaften, 2) die Lehre von der Congruenz, 3) die Lehre von der Aehnlichkeit, 4) Anwendung der Algebra auf die Geometrie, 5) Bruchstücke aus der neueren Geometrie und giebt im Anhange einige für den systematischen Zusammenhang nicht notwendige Sätze, wie den Bertrand'schen Beweis für das XI. Euklidische Axiom, das grösste gemeinschaftliche Mass zweier Strecken etc. Der Lehrgang ist von Anfang bis zu Ende durchaus eigenartig und anregend, so namentlich die Art, wie durch die Congruenz und Aehnlichkeit die Collineationslehre vorbereitet wird, ferner die Auflösung des Apollonischen Tactionsproblems, bei welcher auch die speciellen Fälle nach der Steiner'schen Methode behandelt werden. Didaktisch richtig ist es, dass die vier Congruenzsätze unmittelbar hintereinander erledigt und die vier Aehnlichkeitssätze gleichmässig an derselben Figur bewiesen werden. Ueberflüssig erscheinen neben den guten deutschen Ausdrücken die veralteten Fremdwörter Triangel, Perpendikel, Diameter, Multiplum etc. — Im zweiten Teile sind 333 geschickt ausgewählte Aufgaben so zusammengestellt, „dass es dem Schüler in die Augen springt, wie mit der Verallgemeinerung der Untersuchungen auch das Gebiet der lösbaren Probleme sich erweitert und wie man allmählich die Mittel gewinnt, immer allgemeineren Bedingungen Genüge zu thun.“ Bemerkenswert ist hier neben dem Berührungsproblem die (von Steiner gelöste) allgemeine Schlussaufgabe: Unter der Voraussetzung, dass in der Ebene ein vollständig construirter Kreis samt seinem Mittelpunkte gegeben ist, jede geometrische Aufgabe, die mittels Lineals und Zirkels gelöst werden kann, allein mit Hülfe des Lineals zu lösen. Im Anhang werden noch sieben Aufgaben als Musterbeispiele auf verschiedene Weisen behandelt und zum Schluss des Ganzen ein Verzeichnis der im Buche definirten Ausdrücke gegeben. Lg.

E. Glinzer. Lehrbuch der Elementargeometrie. I. Teil Planimetrie. 3te Aufl. Hamburg. Nestler & Melle. 118 S.

Die erste Auflage dieses Buches ist im Jahrbuch XII S. 417 besprochen. Der unterzeichnete Referent kann dem dort gefällten günstigen Urteile nur zustimmen. Das Buch ist einfach und verständlich, dabei frisch und lebendig geschrieben und behandelt die Geometrie bis zur Kreisberechnung. Hervorgegangen aus dem Unterricht, den der Verfasser seit langen Jahren an den vereinigten gewerblichen Bildungsanstalten Hamburgs erteilt, ist es zunächst für diese Art von Schulen geschrieben; es genügt aber auch weiter gehenden Ansprüchen durch zahlreiche und geschickt gewählte Aufgaben sowie durch die Beigabe der Sätze über harmonische Teilung, Pol und Polare am Kreise etc. Das Bestreben, fremde Ausdrücke durch deutsche zu ersetzen, ist zwar zeitgemäss, geht aber doch oft über das Ziel hinaus, z. B. wenn „Geviert" für Quadrat gesagt wird; letzterer Ausdruck ist bei den Einheiten „Quadratmeter" etc. gesetzlich eingeführt. Verbesserungsfähig scheint auch an manchen Stellen der Ausdruck zu sein, X 7c Anm. „Man beschreibe mit EC um E einen Bogen, welcher in X schneidet" (wen?), oder Anhang I 4 „Ueber BC Halbkreis, Berührende von A ziehen, $DE \perp BC$." So darf kein Schüler sich ausdrücken. Seite 117, Aufgabe 258 ist statt des siderischen Jahres zu 365,25637 Tagen das tropische zu 365,2422 Tagen zu setzen. Der vierte Congruenzsatz ist noch weiter als in andern Lehrbüchern von den übrigen getrennt, bei geringer Aenderung des Stoffes lässt er sich sehr gut auch früher geben. Lg.

F. W. Fischer. Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Zweite Ausgabe. Freiburg im Breisgau. Herder'sche Verlagshandlung.

Dieses Werk enthält drei Teile in einem Bande, nämlich: Planimetrie, Stereometrie und ebene und sphärische Trigonometrie. Es findet sich darin alles dasjenige, was auf höheren Schulen in den angegebenen Disciplinen verlangt werden kann, in guter Ausführlichkeit und ohne Weitschweifigkeit dargestellt. Auch

zum Selbstunterricht wird dies Buch brauchbar sein. Es enthält ausserdem eine grosse Zahl von Uebungsbeispielen. Druck und Figuren lassen gleichfalls nichts zu wünschen übrig. Besonders zu loben ist es, dass die Lehrsätze durch grossen Druck hervorgehoben sind. (Vgl. das Referat über die erste Auflage F. d. M. XVI. 1884. 477). Mz.

H. Lieber und F. von Lühmann. Leitfaden der Elementar-Mathematik. Erster Teil: Planimetrie mit sechs Figurentafeln. Fünfte Auflage. Berlin. Leonhard Simion.

In diesem Bande ist der Unterrichtsstoff der elementaren Planimetrie klar, ohne Weitschweifigkeit, aber andrerseits auch wieder in nicht zu knapper Form gegeben; so dass dasselbe sich zum Gebrauche in der Schule vorzüglich eignet. Der billige Preis und die gute Ausstattung dienen dem Buche gleichfalls zur Empfehlung. Mz.

Greve. Lehrbuch der Mathematik. (Stereometrie.) Bielefeld und Leipzig. Velhagen und Klasing.

In diesem Buche ist der Cursus der Stereometrie, soweit sie auf höheren Schulen gelehrt wird, gegeben. Es zeichnet sich durch Klarheit und Vollständigkeit der Darstellung, sowie durch eine reiche Anzahl von Uebungsaufgaben aus. 120 sehr gute in den Text gedruckte Figuren, sowie ein sehr deutlicher Druck gereichen dem Buche zur Empfehlung. Mz.

R. Foth. Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössen-Lehre. Dritte Auflage. Hannover. Carl Meyer.

Dieses Buch ist im Auftrage der Königlich Preussischen Generalinspection der Artillerie bearbeitet worden zum Gebrauch bei dem mathematischen Unterricht in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte. Es enthält 284 Seiten und 135 in den Text gedruckte Holzschnitte.

Der erste Teil, die Zahlenlehre, giebt die vier Grundrechnungsarten mit unbenannten, später mit benannten Zahlen, dann die Proportionslehre, Potenzen, Wurzeln und das Wurzelausziehen; dann einfache Bestimmungsgleichungen. Der zweite Teil, die Geometrie, giebt die Planimetrie bis zur Ausmessung des Kreises einschliesslich und in der Stereometrie die Erklärung der wichtigsten Körperformen und Berechnung der Körper. In einem Anhang wird das Abstecken von Linien und Winkeln auf dem Felde, sowie das Elementare aus der Vermessungskunst gelehrt. Eine sehr grosse Zahl von Beispielen aus dem praktischen Leben, und besonders solche, die auf militärische Dinge Bezug haben, zieht sich durch das ganze Buch. Mz.

J. Menger. Grundlehren der Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen an Realschulen. Wien. Alfred Hölder.

Dieses durch Erlass des K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht vom 30. Juni 1887 zum Unterrichtsgebrauche an Realschulen zugelassene Buch enthält auf 163 Seiten mit 132 in den Text eingedruckten Figuren den Lehrgang der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes. Auch sind die ersten Sätze aus der Projectionslehre und am Schluss die Kegelschnittslinien in synthetischer Darstellung behandelt. Zahlreiche Uebungsaufgaben dienen zum eingehenderen Studium des Inhalts. Mz.

O. Baer. Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du Collège Royal Français. Berlin. Georg Reimer. IV + 113 S. 8°.

Für das französische Gymnasium zu Berlin hatte einst Joachimsthal die Elemente der Planimetrie in französischer Sprache bearbeitet. Da dieses Werkchen vergriffen ist, so hat Herr Baer eine Neubearbeitung der Planimetrie erscheinen lassen, welche zwar in vielen Einzelheiten von dem Joachimsthal'schen Lehrbuche sich unterscheidet, die ganze Auffassung und Einteilung des Stoffes jedoch im wesentlichen beibehält, von den in

neuerer Zeit gemachten Abänderungsvorschlägen daher unberührt geblieben ist. Die neun Capitel sind betitelt: I. Vorbegriffe. II. Lage gerader Linien. III. Dreiecke. IV. Vierecke und Vielecke. V. Kreis. VI. Gleichheit. VII. Proportionalität von Linien. VIII. Vergleichung und Ausmessung der Vielecke. IX. Ausmessung des Kreises. Lp.

LACROIX. Éléments de géométrie, suivis de notions sur les courbes usuelles. 23e édition, revue par E. Prouhet. Paris. Gauthier-Villars.

H. BÖRNER. Geometrischer Anschauungs- und Zeichenunterricht für die Quinta höherer Lehranstalten. Pr. Realgymn. Elberfeld (No. 446). 31 S. 8°.

Der Verfasser verknüpft in dem propädeutischen Cursus den Anschauungsunterricht mit den Zeichenübungen, wie dies aus den Ueberschriften der einzelnen Abschnitte erhellt: I. Kugel und Kreis. II. Würfel und Quadrat. III. Gerade Quadratsäule, gerade Oblongsäule und Rechteck. IV. Das Rhomboeder und der Rhombus. V. Schiefe Rhombsäule, schiefe Rhomboidsäule und Rhomboid. VI. Das Parallelogramm. VII. Das Dreieck. VIII. Flächenmessung. IX. Körpermessung. Lp.

A. ANDRIANI. Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo. Napoli. B. Pellerano. XVI + 369 S.

Referat in Besso Per. mat. II. 125.

G. V. SICILIANI. Trattato elementare di geometria piana e solida pei Licei. 1 vol. in 8°.

R. RUSCH. Sammlung von Aufgaben aus der Geometrie und zwar aus der Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie und analytischen Geometrie der Ebene. Wien. Pichler's Wittwe u. Sohn. 147 Seiten.

Nur im ersten Teile finden sich auf ungefähr 25 Seiten zu beweisende Lehrsätze und Constructionsaufgaben, alle übrigen sind Rechenaufgaben und zwar durchschnittlich einfache und in bestimmten Zahlen gegebene. Die Geometrie wird nur bis zur Kreislehre vorausgesetzt. Die Sammlung ist für österreichische Mittelschulen bestimmt und empfiehlt sich im übrigen durch den billigen Preis. Lg.

O. Rausenberger. Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Leipzig. Teubner.

Der Verfasser geht davon aus, dass die im Titel genannte Geometrie nur für den elementaren Unterricht ausser der geraden Linie auch den Kreis als grundlegendes Gebilde zu nehmen hat, dass aber eine wissenschaftliche Darstellung der Raumlehre nur Punkt, Strahl und Ebene als grundlegende Elemente zu betrachten hat. Dies ist eine Forderung, welche die Verfasser wissenschaftlicher Entwickelungen der Raumlehre vielleicht als berechtigt kennen, grösstenteils aber nicht consequent genug durchführen, sodass man noch gar zu häufig mitten unter moderngeometrischen Betrachtungen ein fossiles Stück Euklid durchschimmern sieht. Der Verfasser entwickelt mit äusserster wissenschaftlicher Strenge. Ganz naturgemäss sieht man den die Planimetrie behandelnden Teil in die folgenden Paragraphen zerfallen: die begrenzte Gerade; der Winkel; Dreiseit und Dreieck; die zwei ersten Gleichheitssätze; parallele Gerade; Sätze über die Seiten und Winkel eines Dreiecks; zwei weitere Gleichheitssätze, Punkt und Gerade, der fünfte Gleichheitssatz; Dreiecke, welche nur in einzelnen Stücken übereinstimmen; mögliche Constructionen von Dreiecken; das Parallelenaxiom; die unendlich fernen Punkte; Vierseit und Viereck, Allgemeineres; das Parallelogramm; das Paralleltrapez, die Aehnlichkeit; der Satz des Menelaos; der pythagoreische Lehrsatz; die dritte metrische Relation beim Vierseit; die metrischen Relationen beim Viereck; Flächeninhalt und Flächenverwandlung; Flächenmessung; Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln des Dreiecks (ebene Trigonometrie); Allgemeineres über Strecken und Winkelrela-

tionen; die Doppelverhältnisse; die harmonische Teilung; das erste Fundamentalgebilde der Geometrie der Lage; das zweite Fundamentalgebilde der Geometrie der Lage; die Collineation; die Reciprocität, das Princip der Dualität. Das erste der beiden erwähnten Fundamentalgebilde der Geometrie der Lage, auf welche die systematische Entwickelung des Verfassers führt, ist die den folgenden Satz enthaltende bekannte Figur: „Liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten zweier Dreiecke auf derselben Geraden, so gehen die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Eckpunkte durch denselben Punkt.“ Dieser Satz wird natürlich nicht stereometrisch, sondern aus dem Menelaos erkannt. Das zweite Fundamentalgebilde ist die Figur des Pascal'schen Lehrsatzes. Der zweite stereometrische Teil des Buches zerfällt in die folgenden Paragraphen: Fundamentalverhältnisse; senkrechte Geraden und Ebenen, Neigungswinkel; Einführung des Parallelenaxioms; die unendlich ferne Ebene; der Strahlenbündel; die dreiseitige Ecke; metrische Relationen bei der dreiseitigen Ecke; der Inhalt der Ecken; vier und mehr Ebenen oder Strahlen im Strahlenbündel; vier Ebenen und Punkte, die Pyramide; fünf sich schneidende Ebenen und fünf Punkte; die Polyeder; der Rauminhalt; die räumliche Geometrie der Lage; die Collineation räumlicher Systeme, das Princip der Dualität. Da der Verfasser in dieser eleganten systematischen und kritischen Behandlung der Elementargeometrie von Punkt, Strahl und Ebene auch die einschlägige Literatur, namentlich alles, was sich auf Begründungsstrenge bezieht, ausführlich citirt, so dürfte das Buch wohl Verbreitung finden. Scht.

O. Rausenberger. Vortrag über die metrischen Relationen bei geradlinigen Figuren. Ber. d. Freien Deutschen Hochstiftes. 233-241.

Bei Annahme des Parallelenaxioms bestimmen n Gerade stets $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkte und $\frac{1}{2}n(n-1)$ Winkel. Es handelt sich um Beziehungen zwischen den letzteren und den $n(n-2)$ von Schnittpunkten begrenzten Strecken, von denen $n-2$ nicht un-

mittelbar linear abhängige auf jeder der n Geraden angenommen sind. Da die gegenseitige Lage von drei Geraden durch drei Strecken, die jeder folgenden aber durch zwei Strecken völlig festgelegt werden kann, so bestehen zwischen Strecken allein $(n-1)(n-3)$, zwischen Strecken und Winkeln $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Beziehungen. Da weiter die Winkel, unter denen eine Gerade die übrigen schneidet, alle übrigen bestimmen, so ergeben sich $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ von einander unabhängige lineare Winkelrelationen, von denen jede ausdrückt, dass die Winkel eines vorkommenden Dreiecks zwei Rechte betragen. Beim Viereck treten zuerst metrische Relationen zwischen Strecken allein auf, und zwar drei verschiedene. Zwei von ihnen liefert der Satz des Menelaos, die andere kann aus der Vergleichung der Werte gefunden werden, welche sich für den Cosinus des irgend zwei Dreiecken gemeinsamen Winkels ergeben.

Referent meint aber, dass diese Relation vom vierten und nicht, wie Herr R. angiebt, vom dritten Grade ist. Auch die andere Methode, welche auf mehrmaliger Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes und der Proportionslehre beruht, liefert nicht eine Relation dritten Grades.

Die im allgemeinen vorkommenden Beziehungen sind algebraisch in den Strecken und, wenn Winkel vorkommen, in den trigonometrischen Functionen derselben. Lässt sich eine trigonometrische Beziehung durch eine andere zwischen Winkeln selbst ersetzen, so muss letztere die Form haben

$$\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\cdots = \text{const.}$$

E. K.

C. Rodecki. Anwendung geometrischer Zeichnungen zum Auflösen algebraischer und arithmetischer Aufgaben. Prog. Lemberg. (Polnisch.)

Constructive Lösung einiger der bekannten arithmetischen Schulaufgaben. Dn.

A. Andreini. Alcuni teoremi sulla equivalenza stabiliti col metodo intuitivo. Besso Per. mat. II. 6-13.

Wenn eine beliebige endliche Fläche gegeben ist, und wenn man auf ihr Figuren so verteilt, dass sie nicht teilweise zusammenfallen, so lassen die frei bleibenden Flächen bei jeder Verteilung jener Figuren den gleichen Flächenraum unbedeckt. Sind für zwei verschiedene Verteilungen die übrig bleibenden Stücke leicht zu berechnen, so kommt man durch Niederschreiben ihrer Gleichheit leicht zu einem Satze der Flächengleichheit. Dies giebt eine Methode zum Beweise von Sätzen, die unter diese Theorie fallen, eine Methode, die der Verf. zur Ableitung einiger meistens ganz bekannter Sätze verwendet.

La. (Lp.)

A. Andreini. Dimostrazione del teorema di Tolomeo col metodo intuitivo. Besso Per. mat. II. 175-178.

Anwendung der im vorigen Berichte erläuterten Methode auf den Lehrsatz des Ptolemäus. La. (Lp.)

G. Weill. Condition d'égalité de deux figures symétriques. C. R. CV. 1237-1238.

Sind zwei Figuren symmetrisch, so decken sie sich im allgemeinen nicht. Wohl aber, wenn sie ein Centrum oder eine Symmetrie-Ebene haben. Diese Bedingung ist aber keine notwendige. Es gilt vielmehr folgender Satz: „Damit eine Figur mit der ihr symmetrischen entsprechenden sich decken kann, ist es notwendig und hinreichend, dass jedem Punkte M ein anderer Punkt P symmetrisch entspreche, der erhalten wird, indem man M um eine feste Gerade d dreht, sodass der Drehungswinkel constant ist, und indem man dann zu dem neuen Punkte den Punkt construirt, der ihm bezüglich einer festen, zu d senkrechten Ebene symmetrisch entspricht.“ Scht.

D. Besso. Di alcune proprietà del triangolo. Besso Per. mat. II. 1-6.

Man wähle auf den Seiten eines Dreiecks ABC drei Punkte A', B', C' derart, dass

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = m$$

ist. Setzt man den Inhalt des Dreiecks ABC gleich Δ, den des Dreiecks, dessen Seiten AA', BB', CC' sind, gleich Δ' und endlich den des Dreiecks $A'B'C'$ gleich Δ'', so ist

$$\frac{\Delta}{(m+1)^2} = \frac{\Delta'}{m^2+m+1} = \frac{\Delta''}{m^2-m+1}.$$

Ausserdem haben die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ denselben Schwerpunkt. Bezeichnet man noch

$$A_1 \equiv BB'.CC', \quad B_1 \equiv CC'.AA', \quad C_1 \equiv AA'.BB'$$

und nennt Δ_1 den Inhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$, so ist

$$\frac{\Delta}{m^2+m+1} = \frac{\Delta_1}{(m-1)^2},$$

und die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ haben denselben Schwerpunkt.

La. (Lp.)

G. Pesci. Trasversali nel triangolo. Besso Per. mat. II. 65-71.

Es seien B_1, B_2, B_3 drei beliebige Punkte der Seiten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$, ferner setze man, unter i, k, l eine Permutation von 1, 2, 3 verstehend,

$$N_i \equiv A_kB_k . A_lB_l; \quad B_i' \equiv A_kA_l . B_kB_l; \quad \frac{A_kB_i}{A_iA_l} = \frac{p_i}{q_i},$$

so finden die Beziehungen statt (wobei Δ den Inhalt des betreffenden Dreiecks bezeichnet):

$$\frac{\Delta N_1N_2N_3}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{(p_1p_2p_3 - q_1q_2q_3)^2}{(p_2p_3+q_2q_3+p_2q_3)(p_3p_1+q_3q_1+p_3q_1)(p_1p_2+q_1q_2+p_1q_2)},$$

$$\frac{\Delta B_1B_2B_3}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{p_1p_2p_3 + q_1q_2q_3}{(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)},$$

$$\frac{\Delta B_1'B_2'B_3'}{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{p_1^2p_2^2p_3^2 - q_1^2q_2^2q_3^2}{(p_2p_3-q_2q_3)(p_3p_1-q_3q_1)(p_1p_2-q_1q_2)},$$

Verallgemeinerungen der von Hrn. Besso bewiesenen Eigenschaften (in dem eben besprochenen Artikel: „Di alcune proprietà del triangolo").

La. (Lp.)

W. J. C. Miller, G. de Longchamps. Solution of question 8814. Ed. Times XLVII. 59-60.

Das Dreieck, dessen Ecken in den Mitten der drei Höhen eines Dreiecks liegen, ist ein Viertel vom Fusspunktendreieck. Derselbe Satz gilt für drei beliebige Ecktransversalen durch einen Punkt der Dreiecksebene. Lp.

M. d'Ocagne. Quelques propriétés du triangle. Mathesis VII. 265-271.

Verschiedene Eigenschaften der Figur, die man durch Verlängerung der Seiten eines Dreiecks um eine und dieselbe veränderliche Strecke in bestimmtem Sinne erhält.

Mn. (Lp.)

Kr. Birkeland. En Generalisation af Sylvesters skjäve Pantograf. Zeuthen T. (5) V. 17-18.

Ueber den Seiten eines Parallelogramms $ACEG$ sind Dreiecke construirt, ABC über AC, CDE über CE, EFG über EG, GHA über GA, so dass

$$\angle HAB = \angle BCD = \angle DEF = \angle FGH,$$

und

$$AH:AB = DC:CB = DE:EF = HG:GF.$$

Dann sind die Dreiecke ähnlich:

$$HAB \sim DCB \sim DEF \sim HGF.$$

Ist das Parallelogramm beweglich, so dass seine Winkel sich ändern können, während seine Seiten ungeändert bleiben, so ist das Viereck $HBDF$ in allen Stellungen sich selbst ähnlich. Wird eine Ecke des Vierecks festgehalten, während eine andere eine gegebene Curve durchläuft, so beschreiben die zwei übrigen Ecken Curven, die der gegebenen Curve ähnlich sind. V.

A. S. Bang. Lösning af nogle Konstruktionsopgaver. Zeuthen T. (5) V. 153-155.

Es wird der Satz bewiesen: Ein Viereck sei einem Kreise

umschreibbar; die Seiten des Vierecks sind gegeben. Die eine Seite ist unbeweglich, dann ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises ein Kreis, dessen Centrum auf der festen Seite liegt.

Später werden verschiedene Constructionsaufgaben gelöst, deren Lösung auf dem genannten Satz beruht. V.

W. J. Macdonald. Proof of a geometrical theorem. Edinb. M. S. Proc. V. 51.

Beweis des Satzes: Die Mitten der Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden. Gbs. (Lp.)

R. E. Allardice. The equilateral and the equiangular polygon. Edinb. M. S. Proc. V. 28-38.

R. E. Allardice. Geometrical notes. Edinb. M. S. Proc. V. 78-83.

Da ein n-Eck durch $2n-3$ Bedingungen bestimmt ist, und $n-1$ durch die Bedingung der Gleichseitigkeit gegeben sind, so bleiben $n-2$ noch zur Bestimmung übrig. Diese $n-2$ können nicht alle in Winkelbeziehungen gegeben sein; es müssen 3 unabhängige Beziehungen vorhanden sein, welche die Winkel eines jeden gleichseitigen n-Ecks verbinden. In dem vorliegenden Artikel werden die Bedingungen durch Projection des Umfangs auf drei Seiten des n-Ecks hergeleitet. In ähnlicher Art müssen für das gleichwinklige n-Eck zwei unabhängige, die Seiten des n-Ecks verbindende Beziehungen vorhanden sein. Verschiedene Formen der Beziehungen werden gegeben und besondere Fälle betrachtet. Gbs. (Lp.)

L. Certo. Sull' n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato. Annuario 1886 d. R. Ist. Tecn. di Bari.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Erweiterung des Billardproblems auf ein beliebiges n-Eck, und zeigt zuerst, dass, wenn im Innern eines Polygons zwei Punkte A, B gegeben sind, die

zwischen ihnen gezogene gebrochene Linie $A \dots B$, deren Abschnitte mit den Seiten des Polygons gleiche Winkel bilden, unter allen dem Polygon einbeschriebenen Linien $A \dots B$ den kleinsten Umfang hat. Die Aufgabe, in ein gegebenes n-Eck ein anderes n-Eck mit Seiten gleicher Neigung zu beschreiben, hat eine Lösung, wenn n ungerade, keine oder unendlich viele, wenn n gerade ist. Die derartig einbeschriebenen Polygone besitzen ebenfalls Minimumseigenschaft. Hieran schliesst sich eine specielle Untersuchung dieser verschiedenen Fälle. Zum Schluss werden die von gewissen Hülfspunkten der Construction gebildeten Polygone betrachtet und Sätze über dieselben abgeleitet. Auf verwandte Arbeiten von Steiner, Sturm u. a. wird Bezug genommen. Schg.

C. Reinhardt. Ueber die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise. Schlömilch. Z. XXXII. 183-185.

Sieben einfache Sätze, die der Verfasser beim Schulunterricht gefunden hat, und die ihm neu zu sein scheinen. Wer ein Dreieck z. B. aus $b+c$, ϱ_b und ϱ_c zu zeichnen hat, kann dieselben unmöglich übersehen, sie finden sich auch teilweise in Lehrbüchern; z. B. V heisst bei Spieker § 129: „Legt man an zwei Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten, so sind die Abschnitte der innern zwischen den äussern Tangenten gleich den Abschnitten der äussern zwischen den Berührungspunkten“. VII. „Die Mittelpunkte der Centralen der sechs Berührungskreise liegen auf dem Umkreise“ ist die Fundamentaleigenschaft des Neunpunktekreises und findet sich u. a. bei Spieker § 220. Die hieraus und aus der symmetrischen Lage der Berührungspunkte auf den Seiten sich ergebenden Vorteile bei der Construction der Berührungskreise wird sich kein praktischer Schulmann entgehen lassen. Lg.

M. Rembacz. Ein Beitrag zu den Apollonischen Berührungsaufgaben. Progr. d. Realschule in Stanislau. (Polnisch). D.

B. NIEWENGLOWSKI. Application d'un théorème de Stewart.
Nouv. Ann. (3) VI. 173-175.

Der Satz des Stewart, von welchem hier eine Anwendung gezeigt wird, ist folgender: Hat man drei Punkte A, B, C in gerader Linie, und einen vierten Punkt O, so ist:

$$(1) \qquad \overline{OA}^2.BC+\overline{OB}^2.CA+\overline{OC}^2.AB+AB.BC.CA = 0,$$

wo die Segmente AB, BC, CA in dem einen Sinne positiv, im andern negativ zu nehmen sind. Denkt man sich nun O als Centrum eines Kreises mit dem Radius R und setzt

$$\overline{OA}^2 = \alpha+R^2; \quad \overline{OB}^2 = \beta+R^2; \quad \overline{OC}^2 = \gamma+R^2,$$

so sind α, β, γ die Potenzen von A, B, C in Bezug auf diesen Kreis, und Gleichung (1) geht über in:

$$(2) \qquad \alpha.BC+\beta.CA+\gamma.AB+AB.BC.CA = 0.$$

Soll nun durch die Punkte A, B ein Kreis gelegt werden, der den um O angenommenen berührt, so sei C der Punkt, in welchem AB von der im Berührungspunkte beider Kreise an den einen construirten Tangente geschnitten wird, so ist $\gamma = CA.CB$.

Führt man dies in Gleichung (2) ein, so kommt:

$$\alpha.BC+\beta.CA = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

wonach C construirt werden kann. Der Stewart'sche Satz ist hier also auf eine Kreisaufgabe angewandt. Mz.

T. P. KIRKMAN, S. TEBAY. Solution of questions 8584, 8687.
Ed. Times XLVI. 65-67.

1) Eine gerade Linie zu ziehen, auf welcher durch zwei gegebene Kreise drei gleiche Strecken ausgeschnitten werden. 2) Gegeben sind zwei beliebige Kreise, durch welche eine durch keinen der Mittelpunkte gehende Gerade $\mathfrak{L}$ in drei Strecken geschnitten wird, die der Reihe nach zu A, B, C proportional sind. Gesucht wird eine zweite Gerade, nicht gleich $\mathfrak{L}$, deren drei Abschnitte in derselben Folge dasselbe Verhältnis haben. Lp.

F. Giudice. Lemmi per la misura della circonferenza e dell' area del circolo. Besso Per. mat. II. 75-77.

I. Der Unterschied zwischen den Umfängen des einem Kreise umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks ist kleiner als die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete das Achtfache des Radius und dessen spitzer, dieser letzteren anliegender Winkel $\gtreqless 2\pi/n$ ist.

II. Jede beliebig kleine Strecke ist grösser als der Unterschied zwischen den Umfängen des einem Kreise umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, falls n hinlänglich gross ist.

III. Der Unterschied zwischen den Inhalten des einem Kreise umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks ist kleiner als der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete das Achtfache des Radius und dessen spitzer ihr anliegender Winkel $\gtreqless 2\pi/n$ ist.

IV. Jede beliebig kleine Fläche ist grösser als der Unterschied zwischen den Inhalten des einem Kreise umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks, falls n genügend gross ist. La. (Lp.)

J. Kürschak. Ueber dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke. Math. Ann. XXX. 578-581.

Der Beweis des Satzes: „Bei den einem Kreise eingeschriebenen (umgeschriebenen) regelmässigen Polygonen bilden die Inhalte und Umfänge eine steigende (abnehmende) Reihe", welcher bei der elementaren Kreismessung auf den Fall der Verdoppelung der Seitenzahl beschränkt wird, ist hier allgemein gegeben. Lg.

G. Kerschbaum. Beweis, dass es eine Quadratur des Kreises giebt, und dass die bisher zur Berechnung des Kreises benutzte Ludolph'sche Zahl etwas zu klein ist. Coburg. Riemann jr. 13 S. 8° u. 1 Taf.

W. F. Lolling. Die Quadratur des Zirkels. Sichere Lösung einer bislang als Problem betrachteten wissenschaftlichen Frage. Hamburg. G. Kramer. 15 S. 8°.

Nach der ersten Schrift, bei welcher der Fehlschluss in der weitläufigen Betrachtung einer complicirten Figur versteckt ist, ergiebt sich $\pi = 3,1446054$. Die zweite Schrift beherrscht nicht die Elemente der Mathematik; unter heftigen Ausfällen gegen die Mathematiker ermittelt der Verfasser nach einer Reihe von Trugschlüssen $\pi = 3,0976$. Lp.

W. G. Zbierschowski. Ueber die Richtungszahl im mathematischen Unterrichte an Mittelschulen. Progr. Jaroslau. (Polnisch).

Die Theorie der Richtungszahlen, die im Grunde genommen mit der der complexen Zahlen identisch ist, wird an den vier Operationen entwickelt und auf das Potenziren und Radiciren sowie auf die trigonometrische Auflösung der Gleichungen dritten Grades angewandt. Dn.

J. B. Lock. A treatise on elementary trigonometry. Stereotyped edition. London. Macmillan and Co. VII + 306 S.

J. B. Lock. A treatise on higher trigonometry. Second edition. London. Macmillan and Co. VIII + 199 S.

J. Casey. A treatise on elementary trigonometry. Second edition. Dublin. Hodges, Figgis and Co. VIII + 144 S.

J. Casey. Plane trigonometry; containing an account of the hyperbolic functions. Dublin. Hodges, Figgis and Co. (1888).

Im zweiten und vierten Werke werden die Eigenschaften der Hyperbelfunctionen vorgetragen. In anderer Hinsicht sind die abgehandelten Teile der Trigonometrie im wesentlichen die gewöhnlich in Lehrbüchern befindlichen. Gbs. (Lp.)

J. Plath. Darstellung der elementaren Trigonometrie auf Grund des Ptolemaeischen Satzes. Pr. Klosterschule Rossleben (No. 232). S. 9-16. 4°.

Eine Skizze für die „Grundlegung der Trigonometrie in demjenigen Umfange, in welchem sie Unterrichtsgegenstand eines Gymnasiums ist“, unter enger Verknüpfung mit der Geometrie, sowie dies auch in manchen Lehrbüchern der Trigonometrie durchgeführt ist. Lp.

Fabri. Elementi di trigonometria piana, ad uso degli studenti degli Istituti tecnici, dei Licei e degli aspiranti all' Accademia militare. 8° con tavole.

F. Meyer. Ueber die Gleichung $l\sin x + m\cos x = n$. Hoffmann Z. XVIII. 108-109.

Eine für Schulzwecke brauchbare geometrische Construction des Winkels x aus der Gleichung $l\sin x + m\cos x = n$ und des Hülfswinkels φ in der Gleichung $\cos(x-\varphi) = \frac{n}{m}\cos\varphi$, welche aus der ersteren vermittelst der Substitution $l = m\,\text{tang}\,\varphi$ hervorgeht. Lg.

C. A. Laisant. Théorèmes de trigonométrie. S. M. F. Bull. XV. 198.

Der Herr Verfasser beginnt mit folgendem Lehrsatz: Hat man gleichzeitig die beiden linearen Relationen unter den Cosinus beliebig vieler Winkel:

$$(1)\quad \begin{cases} A_1\cos x_1 + A_2\cos x_2 + \cdots + A_n\cos x_n = 0, \\ A_1\cos(x_1+\alpha) + A_2\cos(x_2+\alpha) + \cdots + A_n\cos(x_n+\alpha) = 0, \end{cases}$$

so ist auch:

$$A_1\cos(x_1+\vartheta) + A_2\cos(x_2+\vartheta) + \cdots + A_n\cos(x_n+\vartheta) = 0,$$

wo ϑ ein beliebiger Winkel ist. Zum Beweise braucht man nur in den Gleichungen (1) die Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ als Strecken aufzufassen: dann drücken diese Gleichungen aus, dass die Projectionen eines gewissen Umfangs auf zwei verschiedene

Richtungen Null sind, woraus folgt, dass der Umfang geschlossen ist, und daher seine Projection auf jede beliebige Richtung den Wert Null hat. Auch muss α von $k\pi$ verschieden sein, wo k ganzzahlig ist, da sonst die beiden Relationen (1) in eine einzige übergehen würden. Von diesem Satze werden weitere Anwendungen gemacht; die Formeln für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ werden aus ihm abgeleitet; ebenso der Sinussatz. Zum Schluss werden diese Betrachtungen auf die hyperbolischen Functionen $\mathrm{Ch}\,x$ und $\mathrm{Sh}\,x$ ausgedehnt. Mz.

F. Panizza. Nota su alcuni triangoli dipendenti da un triangolo dato. Besso Per. mat. II. 149-152.

Es seien A_1, A_2, A_3 die Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks, a_1, a_2, a_3 die Seitenlängen, Δ der Inhalt. Man beschreibe über den Seiten dieses Dreiecks Kreisbogen von 60° mit den Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 und nenne die Mitten der complementaren Bogen M_1, M_2, M_3. Das Dreieck $O_1\,O_2\,O_3$ ist bekanntlich gleichseitig, und es ist:

$$6\overline{O_iO_k}^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+4\Delta\sqrt{3},$$
$$3(\overline{O_iO_k}^2+\overline{M_iM_k}^2) = a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$
$$3(\overline{O_iO_k}^2-\overline{M_iM_k}^2) = 4\Delta\sqrt{3}.$$

Bezeichnet man mit Δ' und Δ'' die Inhalte der Dreiecke $O_1O_2O_3$ und $M_1M_2M_3$, so findet die sehr einfache Beziehung statt

$$\Delta'-\Delta'' = \Delta.$$ La. (Lp.)

W. M. Thornton. Solution of an exercise. Annals of Math. III. 61.

Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises auf der Peripherie des eingeschriebenen liegt, so gilt die Relation:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos^2 A+\cos\tfrac{1}{2}B\cos^2 B+\cos\tfrac{1}{2}C.\cos^2 C = 0.$$ Schn.

A. Cayley. Note on the two relations connecting the distances of four points on a circle. Mess. (2) XVII. 94-95.

Es sei *BACD* ein Kreisviereck, dessen Seiten *BA*, *AC*, *CD*, *DB* und Diagonalen *BC*, *AD* bezw. mit *c*, *b*, *h*, *g* und *a*, *f* bezeichnet werden mögen. Dann ist bekanntlich

$$\Delta = af+bg+ch = 0,$$
$$V = abc+agh+bhf+cfg = 0.$$

Die Abstände von vier Punkten auf einem Kreise sind also durch die beiden Gleichungen $\Delta = 0$, $V = 0$ verbunden. Sieht man nun a, b, c, f, g, h als die gegenseitigen Abstände von vier beliebigen Punkten in der Ebene an, so ist

$$\Omega = a^2f^2(-a^2-f^2+b^2+g^2+c^2+h^2)+b^2g^2(a^2+f^2-b^2-g^2+c^2+h^2)$$
$$+c^2h^2(a^2+f^2+b^2+g^2-c^2-h^2)-a^2b^2c^2-a^2g^2h^2-b^2h^2f^2-c^2f^2g^2=0.$$

Es wird gezeigt, dass die Gleichung $\Omega = 0$ eine Folge der Gleichungen $\Delta = 0$, $V = 0$ ist. Glr. (Lp.)

M. Baker. Generalization of exercise 97. Annals of Math. III. 51-53.

Es wird die Aufgabe behandelt: In einem Dreiecke *ABC* sind zwei gerade Linien durch *C* gezogen, welche *AB* in *M* und *M'* treffen. Man kennt nun die Verhältnisse unter den Segmenten auf *AB*; und es sei:

$$AM:M'B:AB = m:m':1.$$

Ferner kennt man den Dreieckswinkel *C* und den Winkel $MCM' = a$. Man soll die übrigen Winkel der Figur finden. Die Auflösung ist folgende: Setzt man:

$$\angle ACM = \varphi \quad \text{und} \quad \frac{(1-m)(1-m')}{mm'} = k,$$

so bekommt man für $\operatorname{tang}\varphi$ folgende Gleichung:

$$\operatorname{tang}^2\varphi - \frac{(1-k)\sin(C-a)}{\cos a\cos C-k\cos(C-a)}\cdot\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin a\sin C}{\cos a\cos C-k\cos(C-a)}.$$

Sind dann A und B die Dreieckswinkel bei A und B, so ist:

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin C}{\left(\frac{m}{1-m}\right)\frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi} - \cos C},$$

$$\operatorname{tang} B = \frac{\sin C}{\frac{1-m}{m}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(C-\varphi)} - \cos C}.$$

Auch ist eine sehr einfache geometrische Construction beigefügt, die ganz unabhängig von der trigonometrischen Berechnung ist. Zuletzt werden specielle Fälle betrachtet: Erstens, wenn der Winkel C ein Rechter ist; und zweitens, wenn $m = m'$ ist.

Mz.

A. Dahmen. Beziehungen der Halbirungslinien der Winkel im Dreieck. Progr. Ob. Realschule Köln. 20 S

Es werden die übrigen Stücke eines Dreiecks durch die Winkelhalbirenden und die Verhältnisse q_1, q_2, q_3 ausgedrückt, nach welchen sich jene Linien im Inkreiscentrum gegenseitig teilen.

Lg.

H. Stade. Ein merkwürdiges Dreieck. Hoppe Arch. (2) V. 223-224.

Wenn in einem Dreieck $h_a = \varrho_a - \varrho$, $h_b = \varrho_b + \varrho$ ist, so sind die trigonometrischen Functionen der Dreieckswinkel nur aus den Grössen $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ gebildet, und zwischen den übrigen Stücken finden einfache Beziehungen statt, z. B.

$$h_c = r\sqrt{2}, \quad \Delta = 2r \operatorname{cotg}\beta\sqrt{2}.$$

Lg.

A. Pellet. Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas. C. R. CV. 1119-1120.

Die Construction geht von der Teilung des Sinus des Winkels nach dem gegebenen Verhältnis aus und nähert sich dem gesuchten Teilpunkte des Bogens durch eine Reihe von

Hülfspunkten, die innerhalb eines eng beschränkten Teilbogens liegen. Dabei wird das Verhältnis zweier Linien benutzt:

$$r = \frac{m \sin a \operatorname{cotg} ma - \cos a}{\cos ma - \cos a},$$

worin a den zu teilenden Winkel, m den abzuschneidenden Bruch bedeutet ($a < \frac{1}{2}\pi$), welches Verhältnis nahezu constant gleich $\frac{2}{3}$ ist. Lp.

E. Collignon. Sur une méthode approximative pour la trisection de l'angle, imaginée par M. E. Fortin. Ass. Franç. (Toulouse) 141-164.

P. Aubert. Composition de mathématiques élémentaires proposée au concours d'agrégation de 1886. Edinb. M. S. Proc. V. 23-28.

Herr Aubert giebt die Lösung der folgenden Aufgabe: Ein Kreis und zwei Punkte P und Q, die auf einem Durchmesser liegen, sind gegeben. Man verbindet die Punkte P und Q mit den Endpunkten A und B eines Kreisdurchmessers durch die Geraden PA und QB, die sich im Punkte M treffen mögen. Man dreht den Durchmesser AB und fordert I. eine Untersuchung der Aenderungen des Verhältnisses $MA:MB$ und eine Construction der Figur, wenn das Verhältnis einen gegebenen Wert hat; II. eine Untersuchung der Aenderungen des Winkels AMB und eine Construction der Figur, wenn dieser Winkel einen gegebenen Wert hat; III. wenn A' und B' die zweiten Schnittpunkte der Geraden MA und MB mit dem gegebenen Kreise sind, den Ort für den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $MA'B'$ zu finden.

Gbs. (Lp.)

W. Harvey. Geometrical proof of the tangency of the inscribed and nine-point circles. Edinb. M. S. Proc. V. 102-103. Gbs.

S. ROBERTS. Note on certain theorems relating to the polar circle of a triangle and Feuerbach's theorem on the nine-point circle. Mess. (2) XVII. 57-60.

Man bezeichne die Mittelpunkte des Um- und Inkreises mit O und I, den Höhenschnitt mit P, die Radien dieser Kreise und des polaren Kreises mit R, r, ϱ; dann ist bekanntlich

$$\overline{OP}^2 = R^2+2\varrho^2, \quad \overline{IP}^2 = 2r^2+\varrho^2.$$

Der Beweis der zweiten Gleichung wird für schwieriger gehalten als derjenige der ersten; dagegen weist die Vergleichung beider Ausdrücke darauf hin, dass sie beide durch ganz ähnliche oder correlativ verschiedene Methoden ableitbar sein müssen. Solche Beweise gewinnt der Verfasser in dieser Note, indem er sich der folgenden beiden Sätze bedient, welche zwar einen Teil der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte bilden, aber in Bezug auf Kreise der Geometrie der Geraden und des Kreises angehören.

1. Wenn ein Dreieck einem Kreise eingeschrieben und in Bezug auf einen anderen Kreis ein conjugirtes Dreieck ist, so bestimmt und bildet jeder Punkt auf dem ersten Kreise eine Ecke eines dem ersten einbeschriebenen und in Bezug auf den zweiten Kreis conjugirten Dreiecks. 2. Wenn ein Dreieck einem Kreise umbeschrieben und in Bezug auf einen anderen Kreis ein conjugirtes Dreieck ist, so bestimmt und bildet jede Tangente am ersten Kreise eine Seite eines dem ersten Kreise umbeschriebenen und in Bezug auf den zweiten Kreis conjugirten Dreiecks.

Glr. (Lp.)

R. LACHLAN. On poristic systems of circles. Mess. XVI. 152-162.

Im XIX. Bande von Gergonne's Annalen legte Steiner die Aufgabe zur Lösung vor: Die Bedingung zu finden, dass, wenn zwei beliebige Kreise gegeben sind, eine endliche Reihe von Kreisen gezeichnet werden kann, welche die gegebenen Kreise berühren, und von denen jeder seine Nachbaren der Reihe berührt. (Steiner, Ges. Werke I. 225). Er giebt als diese Bedingung an:

$$(R \pm r)^2 \pm 4Rr \operatorname{tang}^2 \frac{n\pi}{m} = d^2,$$

wo R, r die Radien der beiden gegebenen Kreise, d ihre Centrale, n die Anzahl der Kreise in der Reihe, m die Anzahl der Umläufe der Reihe um den kleineren Kreis bedeuten, und wo das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem einer der beiden gegebenen Kreise innerhalb oder ausserhalb des anderen liegt.

Diese Aufgabe wurde von Herrn H. M. Taylor in Mess. (2) VII. 148 besprochen und eine gleichwertige Bedingung ermittelt, und Herr W. W. Taylor gab einige weitere Resultate in demselben Bande des Mess. S. 167-170 an. [Die Lösung der Aufgabe durch das Princip der reciproken Radien ist lange bekannt; vergl. Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie (1869) und von den neueren Arbeiten Ad. Schumann, F. d. M. XV. 1883. 411. D. Uebers.]. In dem vorliegenden Aufsatze erörtert der Verfasser den allgemeineren Fall, wenn jeder Kreis der Reihe seinen Nachbar unter einem constanten Winkel schneidet und ebenso jeden der beiden gegebenen Kreise unter constanten Winkeln. Der Artikel schliesst mit einer Ausdehnung der Betrachtung auf die Geometrie der Kugel, wenn also die Kreise auf einer Kugelfläche liegen. Glr. (Lp.)

D. Besso. Di una serie di punti notevoli nel triangolo.
Besso Per. mat. II. 53-54.

Man wähle auf den Seiten eines Dreiecks ABC drei solche Punkte A', B', C', dass

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^\mu}{b^u}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{a^u}{c^u}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{b^\mu}{a^u}$$

ist, wobei a, b, c die Seitenlängen bedeuten. Die drei Geraden AA', BB', CC' schneiden sich in einem Punkte, für den die Summe der $\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\text{ten}}$ Potenzen seiner Abstände von den Seiten ein Kleinstes ist. La. (Lp.)

L. Kiepert. Ueber eine Aufgabe aus der Theorie der Maxima und Minima. Jordan Z. f. V. XVI. 5.

Der Ausdruck $K = \frac{PA\,.\,PB\,.\,PC}{p}$, in welchem P^2 die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Umkreis von ABC bedeutet, wird ein Minimum, wenn P das Inkreiscentrum ist. Lg.

H. Lieber. Ueber die Gegenmittellinie und den Grebe'-schen Punkt. Ueber den Brocard'schen Kreis. Pr. Realgymn. Stettin.

Die Arbeit giebt die Fortsetzung der Programmabhandlung von 1886. Als Ergänzung der letzteren werden zunächst ein Beispiel zweier Gegentransversalen, dann die beiden Lemoine'-schen Kreise angeführt und berechnet. Letztere gehen durch je sechs Punkte, in welchen die durch den Grebe'schen Punkt K zu den Seiten gezogenen Parallelen resp. Antiparallelen dieselben schneiden. Der Abschnitt IV untersucht Beziehungen der Gegenmittellinien und des Grebe'schen Punktes zu gewissen Kegelschnitten: den Parabeln, welche je zwei Seiten in den Endpunkten der dritten berühren, den eingeschriebenen Ellipsen, deren Brennpunkte je zwei Winkelgegenpunkte sind, z. B. Umkreiscentrum und Höhenpunkt, Schwerpunkt und Grebe'scher Punkt K etc., endlich dem Kegelschnitte, welcher K zum Mittelpunkt hat und die Seiten in den Fusspunkten der Höhen berührt. Der Abschnitt V handelt über den Brocard'schen Kreis und beginnt mit Angabe der benutzten Literatur. Zu Grunde gelegt wird die Figur von Brocard, welche derselbe dem 15. Jahrgang von Hoffmann's Zeitschrift beigegeben hat. Die Beweise sind wie die vorhergehenden möglichst elementar gehalten und bei den Sätzen ihre Autoren namhaft gemacht. Eine genauere Inhaltsangabe ist hier nicht möglich. Abschnitt VI enthält Sätze über die sechs Kreise, welche sich zu je dreien in den Brocard'schen Punkten O und O' schneiden. Abschnitt VII endlich behandelt den Tucker'schen Kreis. Lg.

W. Fuhrmann. Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. Hoppe Arch. (2) VI. 1-38.

Eine einheitliche Zusammenstellung der auf den Brocard'schen Winkel bezüglichen Eigenschaften des Dreiecks, auf elementar trigonometrischem Wege abgeleitet. Der erste Teil der Arbeit bezieht sich auf symmetrische Relationen zwischen den Winkeln des Dreiecks und dem Brocard'schen Winkel. Der zweite giebt Längen und Grössen des Dreiecks, die sich durch diesen Winkel ausdrücken lassen, so wie einige sich daran anschliessende Eigenschaften, also immer nur solche, welche mit dem Winkel in Verbindung stehen. Die als Einleitung gegebene geschichtliche Darstellung enthält einen Irrtum. Nicht in den Grondbeginsels der Meetkunde door J. H. van Swinden (1816) kommt der Brocard'sche Winkel vor, sondern in den vortrefflichen Anhängen, welche C. F. A. Jacobi denselben bei der Uebersetzung 1834 hinzugefügt hat. Vorher aber hat schon Jacobi in seiner Schrift de triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, Naumburg 1825 und noch früher Crelle in seinem Werk: Ueber einige Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks, Berlin 1816, das Thema behandelt. Lg.

E. Lemoine. Questions diverses sur la nouvelle géométrie du triangle. Ass. Franç. Toulouse. 1-30.

§ 1 behandelt die Aufgabe: Wenn über MA, MB, MC als Durchmesser Kreise construirt sind und M so liegt, dass die Summe der Potenzen je einer Ecke in Bezug auf die nicht durch diese gehenden Kreise für alle drei Ecken gleich gross ist, so liegt M auf der Euler'schen Geraden und zwar vom Umkreiscentrum gerade soweit entfernt wie der Schwerpunkt; § 2 verschiedene Eigenschaften der Segmentärpunkte; § 3 die Punkte, deren Abstände von den Seiten je dreien von den 4 Grössen s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ proportional sind; § 4 über gewisse dreifach perspectivisch liegende Dreiecke. § 5. Gehen die Ecktransversalen AA', BB', CC' durch einen Punkt O, so genügt der Höhenpunkt allein der Bedingung $AA'.BC = BB'.CA = CC'.AB$. Fasst

man OA', OB', OC' als Lichtstrahlen auf, welche von den Seiten reflectirt werden etc., so ergeben sich die zum Schluss behandelten Aufgaben. Angefügt werden einige (nach Meinung des Verfassers) zu wenig bemerkte Relationen zwischen den Radien, Winkelfunctionen, Seiten und Seitenabschnitten des Dreiecks.

Lg.

E. Lemoine. Étude des points inverses. Paris. J. d. Math. spéc. 15 S.

Von den in Rede stehenden Punkten hat der eine die Coordinaten α, β, γ, der andere $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$. Es sind dieselben, welche wir Winkelgegenpunkte nennen (vergl. Kiehl, Bromberg 1881, Progr.). Die interessanteste der behandelten Aufgaben ist folgende: „Zwei Winkelgegenpunkte F_c, F'_c (oder die Brennpunkte eines eingeschriebenen Kegelschnitts) so zu bestimmen, dass $F_c F'_c$ von den drei Ecken aus unter gleichem Winkel erscheint. Sie hat im allgemeinen drei, mindestens aber zwei Auflösungen. Ist nämlich O das Inkreiscentrum, O_a ein Ankreiscentrum und über OO_a als Durchmesser ein Kreis construirt, so schneidet derselbe das Mittellot von AO_a in F_c und F'_c. Ausser dieser noch fünf andere Aufgaben.

Lg.

C. A. Laisant. Sur l'inversion d'un système de n points; construction de deux points remarquables du triangle. Ass. Franç. (Toulouse) 282-285.

Em. Vigarié. Sur les points complémentaires. Mathesis VII. 6-12, 57-62, 84-89, 105-110.

I. Vorbegriffe. Wenn ein Punkt M die trilinearen Coordinaten (α, β, γ) hat, so heisst der Punkt M_1 mit den Coordinaten $(\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta)$ sein complementarer, und M ist der anticomplementare zu M_1. Der Punkt $L(\alpha=\beta=\gamma)$ ist sein eigener complementarer, ebenso jeder Punkt der Geraden l $(\alpha+\beta+\gamma=0)$. Die Punkte M, M_1, L liegen auf einer und derselben Geraden,

welche l in einem Punkte m so schneidet, dass das Doppelschnittsverhältnis $(MM_1Ll) = -2$ ist. Sucht man die unbegrenzte Reihe der Punkte M, M_1, M_2, ..., M_n auf, von denen jeder der complementare des vorangehenden ist, so findet man, dass M_∞ mit L zusammenfällt. Wenn die betrachteten trilinearen Coordinaten barycentrisch sind, so ist L der Schwerpunkt G des Bezugsdreiecks, und man hat $2MG = GM_1$, sodass die complementare Figur einer gegebenen Figur zu dieser letzteren ähnlich und ähnlich liegend mit dem Aehnlichkeitsverhältnisse -2 ist.

II. Nagel'scher Punkt. Der Gergonne'sche Punkt ist der Schnittpunkt der Geraden, welche die Ecken des Bezugsdreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten und des Inkreises verbinden; seine Coordinaten sind

$$[1:(-a+b+c)],\quad [1:(a-b+c)],\quad [1:(a+b-c)].$$

Der Punkt, dessen Coordinaten die reciproken Werte hiervon sind, ist der Nagel'sche Punkt; sein complementarer ist der Mittelpunkt des Inkreises. Der Gergonne'sche und der Nagel'sche Punkt, sowie die entsprechenden Punkte bezüglich der Ankreise besitzen zahlreiche Eigenschaften.

III. Der anticomplementare Punkt vom Lemoine'schen Punkte. Der Lemoine'sche Punkt (a^2, b^2, c^2) besitzt als anticomplementaren: $(-a^2+b^2+c^2, a^2-b^2+c^2, a^2+b^2-c^2)$. Die durch diesen Punkt parallel zu den Seiten gezogenen Geraden sind den Kuben der Seiten proportional.

IV. Anticomplementarer Kreis zum conjugirten Kreise. Um die Ecken des Bezugsdreiecks als Mittelpunkte beschreibe man mit den Gegenseiten als Halbmessern drei Kreise; der Kreis, welcher sie rechtwinklig schneidet, ist anticomplementar zum autopolaren Kreise von ABC. Mn. (Lp.)

E. Cesaro. Sur la droite de Simson. Nouv. Ann. (3) VI. 257-266.

Zieht man von einem Punkt P drei Linien, welche die Seiten eines Dreiecks in X, Y, Z a) rechtwinklig, b) unter demselben Winkel ϑ schneiden, und liegen X, Y, Z in einer Geraden, so heissen

dieselben a) eigentliche, b) uneigentliche Simson'sche Gerade. Mit Hülfe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt und dessen Axen die Hauptträgheitsaxen des Dreiecks sind („Trägheitscoordinaten"), wird der bekannte Satz abgeleitet: Die eigentlichen Simson'schen Geraden umhüllen eine Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten (Steiner J. für Math. LIII.), die uneigentlichen eine dieser ähnliche Hypocykloide. Lg.

E. Cesaro. Remarques sur la géométrie du triangle. Nouv. Ann. (3) VI. 215-243.

Mit Benutzung der „Trägheitscoordinaten" und der „Schwerpunktscoordinaten" (bei welchen jeder Punkt als Schwerpunkt dreier in den Ecken angebrachten Massen μ_1, μ_2, μ_3 mit der Summe 1 angesehen wird) werden folgende merkwürdige Punkte und Curven der Untersuchung unterworfen: 1) Die Steiner'sche Ellipse E, welche durch die Ecken geht und den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat; 2) der Steiner'sche Punkt R, d. i. der vierte Schnittpunkt von E mit dem Umkreis; 3) der Tarry'sche Punkt N, d. i. der Gegenpunkt von R auf dem Umkreis; 4) der Grebe'sche Punkt K; 5) die Simson'schen Geraden, welche durch jene Punkte gehen; 6) die Kiepert'sche Hyperbel; 7) die Punkte J und J', von denen aus die Seiten unter Winkeln von 120° und 60° erscheinen; 8) die Segmentärpunkte, der Brocard'sche Kreis und das Brocard'sche Dreieck. Lg.

R. Tucker. Sur le cercle triplicateur. Mathesis VII. 12-14.

J. Casey. Propriétés de trois figures semblables. Mathesis VII. 14-15.

Cl. Thiry. Sur les médianes, les bissectrices et les symédianes d'un triangle. Mathesis VII. 116-117.

J. Neuberg. Centre isologique du triangle. Mathesis VII. 117.

Van Dorsten. Applications des propriétés de trois figures semblables. Mathesis VII. 161-162.

J. **Neuberg.** Transmutations d'un triangle. Mathesis VII. 180-181.

A. **Emmerich.** Problèmes de construction se rapportant à la géométrie du cercle de Brocard. Mathesis VII. 246-248.

Beiträge zur neueren Geometrie des Dreiecks, die sich zu einem eingehenderen Berichte nicht eignen. Mn (Lp.)

A. **Emmerich.** Constructionsaufgaben zur Geometrie des Brocard'schen Kreises. Pr. Realgymn. Mülheim (Ruhr). No. 450.

T. C. **Simmons.** A theorem in conics. Lond. M. S. XVII. 418-419.

T. C. **Simmons**, R. F. **Davis**, H. **Brocard.** Solution of question 8528. Ed. Times XLVI. 30-32.

Man bezeichne mit K den Lemoine'schen Punkt eines Dreiecks, mit ω, ω' die Brocard'schen Punkte, mit Σ und Σ' den Umkreis und die Brocard'sche Ellipse. 1) Wird irgend eine Linie durch K gezogen, so fallen ihre Pole in Bezug auf Σ und Σ' zusammen; daher lassen sich 2) Σ und Σ' als zwei Kegelschnitte projiciren, welche die Projection von K als gemeinschaftlichen Brennpunkt und die Projectionen der Polare von K als gemeinschaftliche Leitlinien besitzen, und deren Excentricitäten bezw. $2\varrho'/R$ und ϱ'/R sind. 3) Dreht sich Σ' um K um 180°, so teilt die mit Σ gemeinschaftliche Sehne den Abstand zwischen K und der Polare von K orthogonal in drei gleiche Teile. 4) Die Linien $K\omega$, $K\omega'$ bilden die Diagonalen eines dem Σ einbeschriebenen Vierecks, das Σ' in den Endpunkten der kleinen Axe berührt. 5) Die Sehne von Σ durch K parallel zu $\omega\omega'$ wird von Σ' in vier gleiche Teile geteilt. Lp.

R. **Tucker**, A. **Mukhopâdhyây.** Solution of question 8449. Ed. Times XLVI. 40-42.

Man ziehe die Lemoine'schen Geraden DKE', $D'KF$, EKF', d. h. Parallele zu den Seiten durch den Lemoine'schen Punkt K eines

Dreiecks. 1) K ist der Schwerpunkt für die Lemoine'schen Punkte der Dreiecke $BD'F$, CDE', $AF'E$. 2) Sind Ω, Ω' die Brocard'schen Punkte und ϱ_1, ϱ'_1, ... die Radien der Umkreise für $B\Omega C$, $B\Omega' C$, ..., so ist $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = R^3 = \varrho'_1 \varrho'_2 \varrho'_3$. 3) Ist $A'B'C'$ das erste Brocard'sche Dreieck, so schneiden sich AA', BB', CC' auf der Kiepert'schen Hyperbel, da wo sie von $P\pi$ getroffen wird. 4) Das Dreieck, dessen Seiten gleich den Schwerpunktslinien von ABC sind, hat denselben Brocard'schen Winkel wie ABC, und sind A_1, B_1, C_1 die Winkel dieses Dreiecks, so ist

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} A_1 = \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B_1 = \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C_1 = \tfrac{4}{3} \operatorname{cotg} \omega,$$

und sein Brocard'scher Radius verhält sich zu dem von ABC wie $m_1 m_2 m_3$ zu $3abc$, wo m_1, m_2, m_3 die drei oben erwähnten Schwerpunktslinien sind. 5) Ist $A''B''C''$ das zweite Brocard'sche Dreieck, Δ'' sein Inhalt, ϱ'_1 der Brocard'sche Radius, R der Umkreisradius des von den Schwerpunktslinien gebildeten Dreiecks, so ist $\Delta'' R_1^4 / \Delta^2 \varrho_1'^2$ proportional mit $\operatorname{cotg}^2 \omega$. Lp.

J. Neuberg, Ch. A. Scott. Solution of question 8185. Ed. Times XLVI. 52-55.

Die Basis BC eines Dreiecks sei fest gegeben, die Ecke A bewege sich auf einer durch B gehenden Geraden. Dann ist 1) der Ort des Schwerpunktes und des Mittelpunktes des Feuerbach'schen Kreises je eine Gerade; 2) die Hüllcurve der Geraden, welche diese Punkte verbindet, ist ein Kegelschnitt; 3) die Oerter der Ecken A', B', C' des Dreiecks, welches von den Tangenten in A, B, C am Umkreise von ABC gebildet wird, sind eine Parallele zu BC und ein Kegelschnitt; 4) die Hüllcurve von $B'C'$ ist eine Parabel mit dem Brennpunkte C; 5) die Hüllcurve der Symmediane AA' ist ein Kegelschnitt mit einem Brennpunkte in C; 6) der Ort des Centrums K der Symmedianen ist ein Kegelschnitt; 7) die von den Brocard'schen Punkten beschriebenen Oerter sind ein Kreis und die Fusspunktscurve eines Kegelschnitts.

Lp.

H. Brocard, G. de Longchamps. Solution of question 8613. Ed. Times XLVI. 99-101.

D und *D'* seien die Punkte, deren Abstände von den Seiten eines Dreiecks den Kuben dieser Seiten umgekehrt oder direct proportional sind. Bekanntlich ist *D* das Collineationscentrum des gegebenen Dreiecks *ABC* und des ersten Brocard'schen Dreiecks *A'B'C'*, und *D'* ist der Pol von $\Omega\Omega'$ in Bezug auf den Brocard'schen Kreis. Ausserdem liegt nun aber auch noch der Pol von *DD'* in Bezug auf denselben Kreis auf der Collineationsaxe der Dreiecke *ABC* und *A'B'C'*. Lp.

R. Tucker. Geometrical note. Ed. Times XLVI. 104.

Bemerkungen zu den Aufsätzen: „The symmedian-point axis of an associated system of triangles" in Quart. J. und Ed. Times (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 489, XVII. 1885. 554). Lp.

R. Tucker. The „cosine" orthocentres of a triangle and a cubic through them. Mess. (2) XVII. 97-103.

Analytische, mit der Geometrie des Dreiecks zusammenhängende Untersuchungen. Die Gleichung der betrachteten Curve dritter Ordnung ist in trilinearen Coordinaten:

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma)(bc\beta\gamma+ca\gamma\alpha+ab\alpha\beta) = kabc\alpha\beta\gamma.$$ Glr. (Lp.)

R. Tucker. Geometrical notes. Lond. M. S. Proc. XVII. 430-431, XVIII. 393-400.

Beiträge zur Geometrie des Dreiecks, welche sich auf den Grebe'schen und die Brocard'schen Punkte beziehen. Am Schlusse sind die dem Verfasser in den Jahren 1886 und 1887 zugegangenen Schriften über den Gegenstand angeführt. Lg.

J. Neuberg, R. F. Davis, S. Aiyar. Solution of question 8755. Ed. Times XLVII. 55-56.

Man verlängere die Höhen eines Dreiecks *ABC* über die Ecken hinaus um die Strecken *AA'* = *BC*, *BB'* = *CA*, *CC'* = *AB*. Dann haben die Dreiecke *ABC* und *A'B'C'* denselben Schwer-

punkt. Sind α, α' die Brocard'schen Winkel dieser Dreiecke, so ist

$$A'B'C' = 2ABC(2+\operatorname{cotg}\alpha), \quad \operatorname{cotg}\alpha' = \frac{2\operatorname{cotg}\alpha+3}{\operatorname{cotg}\alpha+2},$$

$$(A'B')^2+(B'C')^2+(C'A')^2 = 8ABC(3+2\operatorname{cotg}\alpha).$$

Ferner sind A, B, C die Mittelpunkte der nach innen über den Seiten von $A'B'C'$ construirten Quadrate. Endlich sind die Mitten der Seiten von $A'B'C'$ die Mittelpunkte der nach aussen über den Seiten von ABC gezeichneten Quadrate. Lp.

E. Bordage, R. F. Davis. Solution of question 8468. Ed. Times XLVI. 33-34.

Ein Punkt M in der Ebene eines Dreiecks ABC wird mit den Ecken A, B, C verbunden. Dann schneiden sich die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke MAB, MBC, MCA in einem Punkte R auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks ABC. Liegt M auf dem Umkreise von ABC, so gehen die Simsonlinien bezüglich der Dreiecke MAB, MBC, MCA, ABC und der zugehörigen Punkte C, A, B, M durch den Punkt R. Die Schwerpunkte der vier Dreiecke liegen auf einer Kreislinie. Lp.

H. Brocard, D. Biddle, G. de Longchamps. Solution of question 8816. Ed. Times XLVII. 22-24.

Es seien Ω, Ω' die Brocard'schen Punkte, S die Mitte von $\Omega\Omega'$, S' der Punkt, welcher dem S bei symmetrischen Geraden entspricht, R der Steiner'sche Punkt. Dann liegt R auf der Geraden SS'. Lp.

A. M. Nash, R. F. Davis. Solution of question 8875. Ed. Times XLVII. 131-133.

R. F. Davis. Note on the Brocardal ellipse. Ed. Times XLVII. 134-135.

R. F. Davis. Geometrical construction for the Brocardal angle etc. Ed. Times XLVII. 135-136.

Beiträge zur neueren Dreiecksgeometrie, von denen besonders der erste Artikel manche neuen Beziehungen aufdeckt. Lp.

H. Schoute. Ein geometrisches Problem. Schlömilch Z. XXXII. 59-62.

Sind λ, μ, ν die mit Vorzeichen versehenen Abschnitte, welche die Ecktransversalen PA, PB, PC eines Punktes P auf den Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten bestimmen, so findet zwischen denselben eine Beziehung statt; soll diese auch bei Umkehrung der Zeichen von λ, μ, ν bestehen bleiben, d. h. dem Punkte P ein andrer P' entsprechen, so liegen P und P' entweder auf der Euler'schen Geraden und bilden auf ihr eine Involution, deren Doppelpunkte Höhenschnitt und Schwerpunkt sind und der z. B. Umkreiscentrum und Mittenkreiscentrum als entsprechende Punkte P und P' angehören; oder der Ort für P und P' ist die Kiepert'sche gleichseitige Hyperbel, welche durch die Eckpunkte A, B, C, den Höhenschnitt und den Schwerpunkt geht. Lg.

M'Cay. Sur l'hyperbole de Kiepert. Mathesis VII. 208-220.

Ueber den drei Seiten eines Dreiecks ABC als Grundlinien construirt man drei ähnliche gleichschenklige Dreiecke $BC\alpha$, $CA\beta$, $AB\gamma$. Die Geraden $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ schneiden sich in einem Punkte P, der mit dem Winkel $\theta = \alpha BC$ sich ändert; der Ort von P ist die Kiepert'sche Hyperbel, die trilineare Inverse derjenigen Geraden, welche den Mittelpunkt des Umkreises mit dem Lemoine'schen Punkte verbindet. Diese Hyperbel besitzt eine Menge Eigenschaften, die grösstenteils aus der folgenden grundlegenden fliessen: Eine beliebige Gerade schneidet die Kiepert'sche Hyperbel und die trilineare inverse Gerade, die eben erwähnt wurde, in drei solchen Punkten, dass die zugehörigen Winkel θ als Summe ein Vielfaches von π haben. Mn. (Lp.)

C. A. Laisant. Sur les asymptotes de l'hyperbole de Kiepert. Ass. Franç. (Toulouse) 113-114.

E. LEMOINE. Solution de la question 1565. Nouv. Ann. (3) VI. 582.

Die Gleichung einer dem Dreieck ABC umbeschriebenen Hyperbel, welche durch die Brocard'schen Punkte geht, nämlich $\frac{c^2b^2-a^4}{a\alpha}+\frac{a^2c^2-b^4}{b\beta}+\frac{a^2b^2-c^4}{c\gamma}=0$, wird durch die Coordinaten des Steiner'schen Punktes

$$\frac{1}{a(b^2-c^2)},\quad \frac{1}{b(c^2-a^2)},\quad \frac{1}{c(a^2-b^2)}$$

für $\alpha\beta\gamma$ befriedigt, dieser Punkt liegt also auf derselben Hyperbel.

Lg.

W. GLASER. Ueber einige Punkte des Vierecks. Progr. Homburg v. d. Höhe. 18 S.

Der Punkt P, für welchen $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ ein Minimum wird, liegt im Schnittpunkt O der drei Mittellinien, welche die Mitten der Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ verbinden. Ist $PA^2+PB^2-PC^2-PD^2$ constant, so liegt P auf einem Lote zur Mittellinie von AB und CD. Die Schnittpunkte der Mittellote je zweier Gegenseiten bilden ein Dreieck, dessen Seiten auf je einer Mittellinie senkrecht stehen und von je zwei Mittelloten harmonisch geteilt werden. Die sechs harmonischen Teilpunkte sind die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten auf OA, OB, OC, OD senkrecht stehen. Die Function $\alpha.PA^2+\beta.PB^2+\gamma.PC^2$, in welcher α, β, γ beliebige Coefficienten, ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt ist, bestimmt eindeutig die Lage eines anderen Punktes Q und wird auf die merkwürdigen Punkte des Dreiecks und deren Seitengegenpunkte angewandt. Mit den entsprechenden Formeln werden dann beim Viereck Sätze hergeleitet, welche mit den aus den Umkreiscentren, Schwerpunkten und Höhenschnitten der Dreiecke EAB, EBC, ECD, EDA (E Schnittpunkt von AC und BD) gebildeten Parallelogrammen, den aus den Höhenschnitten der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB gebildeten Vierecken, den durch die Ecken zu den Diagonalen parallel gezogenen Linien etc. in Verbindung stehen.

Lg.

T. C. Simmons. A new method for the investigation of harmonic polygons. London M. S. Proc. XVIII. 289-304.

Ein Polygon ist ein harmonisches, wenn die von einem innerhalb gelegenen Punkte auf die Seiten gefällten Lote diesen proportional sind. Solche Polygone behandelte namentlich Casey (Proc. R. J. Acad. 2. Ser, Vol. IV, No. 5) und neuerdings Tarry und Neuberg (Assoc. Franç. Nancy 1886). Zur Auffindung der Eigenschaften dieser Polygone geht Herr Simmons zweckmässig von der Verallgemeinerung seines in den London M. S. Proc. XVII. 418 (vgl. oben S. 551) aufgestellten Satzes über Kegelschnitte aus. Scht.

Le Pont. Note de géométrie. Ass. Franç. (Toulouse) 119-122.

R. C. J. Nixon. Geometry in space, containing parts of Euclid's eleventh aud twelfth books and some properties of polyhedra and solids of revolution, with exercises. Oxford. Clarendon Press. VIII + 101 S. (1888.)

Dieses Buch kann als die Fortsetzung von „Euclid revised“ (F. d. M. XVIII. 1886. 459) angesehen werden und besitzt dieselben Vorzüge. Bei der Behandlung der Flächen- und Körper-Inhalte ist die Grenzmethode für die euklidische gesetzt worden. Viele interessante Theoreme, welche nebst zahlreichen Uebungen ausser den in Euklid's Elementen enthaltenen gegeben sind, vergrössern den Wert des Buches. Es muss für diejenigen, welche Euklid als Lehrbuch aufgegeben haben, einigermassen wunderbar sein, die Anstrengungen zu beobachten, welche gemacht werden, um Anhänger seines Systems zu bleiben und gleichzeitig neuere Methoden und Begriffe einzuführen, wie dies in höherem oder niederem Grade in allen besseren Ausgaben in England geschehen ist. Gbs. (Lp.)

F. Porta. Geometria solida, con 123 fig. nel testo, in 12^{0}. Torino. Fratelli Bocca.

G. Hauck. Ueber die Systematik in der Stereometrie mit Beziehung auf Heinze's „Genetische Stereometrie“. Hoffmann Z. XVIII. 81-93.

Der Herr Verfasser äussert mehrere Bedenken gegen das Heinze'sche System der Stereometrie, welches von anderer Seite sehr gerühmt wurde. Er sagt und weist dies auch ausführlicher nach, dass der Missgriff des Heinze'schen Systems darin besteht, dass es für die Specificirung und Systematisirung der geometrischen Formenwelt die Inhaltsformel als massgebend nimmt, während hierfür ganz andere Rücksichten in Betracht kommen. Ein Fortschritt der stereometrischen Methodik kann nur durch Annäherung an die darstellende Geometrie geschehen. Ferner lässt sich nicht die Mannigfaltigkeit der geometrischen Formen aus einem einzigen Centralkörper durch fortgesetzte Specialisirung entwickeln, wie dies im Heinze'schen System angestrebt wird.

Dagegen enthält das Heinze'sche Buch hübsche und anregende Einzelentwickelungen; unter diesen namentlich die Darstellung des Inhalts des Antiprismas als Function des Drehungswinkels. (Vgl. auch S. 55 dieses Bandes). Mz.

H. Lieber. Stereometrische Aufgaben. Berlin. L. Simion. 141 S.

Die vorliegende Aufgabensammlung schliesst sich der vom Verfasser und v. Lühmann herausgegebenen Sammlung geometrischer Aufgaben an und geht von demselben Grundsatz aus wie diese, „dass die Aufgaben, wenn die Gesamtheit der Schüler im stande sein soll, sie zu lösen, systematisch behandelt und in bestimmte Gruppen geteilt werden müssen, für welche die Grundzüge der Lösung anzugeben sind.“ Die Aufgaben erstrecken sich über das ganze Gebiet der auf dem Gymnasium gelehrten Stereometrie, sind der Hauptsache nach Rechenaufgaben, erfordern aber zu ihrer Lösung gründliche Uebung in der räumlichen Anschauung. In 48 Paragraphen ist der Stoff übersichtlich geordnet, schwierige Figuren werden genau beschrieben und der Zusammenhang der zu betrachtenden Stücke durch For-

meln festgelegt. §§ 1 bis 16 behandeln Prisma, Pyramide, die regulären Hexaeder, Tetraeder und Oktaeder, Cylinder, Kegel und Kugel und die durch Ebenen von diesen abgeschnittenen Stücke; in § 17 bis 43 treten diese Körper zu zweien und dreien zusammen, die letzten Paragraphen behandeln Rotationskörper und Schwerpunktsbestimmungen mittels der Guldin'schen Regel. Maxima und Minima sowie kubische Gleichungen sind nicht gesondert, sondern in der verwandten Gruppe mit aufgeführt, was nur zu billigen ist, da ja sehr oft die Discriminante der kubischen Gleichung die betreffenden Maxima und Minima mit bestimmt. Das Buch wird von Lehrern und Schülern gern benutzt werden.

Lg.

WEINMEISTER. Ueber die Körper, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene quadratische Functionen ihres Abstandes sind. Hoffmann Z. XVIII. 321-343, 401-417 und 496.

„Im Abschnitt A wird zunächst für die in der Ueberschrift gekennzeichneten Körper ohne jede Rücksicht auf die Gestalt eine Formel abgeleitet und verwertet, welche den Inhalt durch drei beliebige Schnittflächen ausdrückt; dem folgt, wiederum auf Grund jener Formel, eine Discussion der möglichen Gestalten (Abschnitt B); und da zeigt es sich, dass alle hierher gehörigen Körper in sechs Klassen zerfallen, die sich den verschiedenen Flächen zweiter Ordnung auf das ungezwungenste anschliessen; welcher dieser Klassen ein Körper zugehört, lässt sich aus den Grundflächen und dem Mittelschnitt erkennen (C). Nun werden die den einzelnen Klassen entsprechenden Formeln durchgeführt und auf Körperschichten angewandt, deren Mäntel entweder (D) von Flächen zweiter Ordnung, oder (E) von Ebenen, oder (F) von Regelflächen gebildet werden. Dies liefert mancherlei geschmeidige Formeln, z. B. für den ellipsoidischen und hyperboloidischen Kegel die Formel $\frac{2}{3}\pi' r^2 h$ genau wie für den Kugelkegel, wobei nur π', r und h eigenartig aufzufassen sind. Dass auch die ebenflächigen Körper (Prismatoide, Spheniske etc.) sich wie von selbst in jene sechs Klassen einfügen, macht ihre Ueber-

sicht wesentlich leichter. Im Abschnitt F dürfte der Satz 46 interessiren, der sich bei der Betrachtung der windschiefen Flächen ergab und einen Steiner'schen Satz beträchtlich erweitert, nämlich: „Liegen in zwei unter dem Abstand $2r$ parallelen Ebenen zwei beliebige gerade oder krumme, nicht geschlossene Linien, und werden dieselben von den Endpunkten einer Strecke, deren Länge unveränderlich $= 2l$, so durchlaufen, dass eine geschlossene krumme Fläche entsteht, so ist der von dieser begrenzte Körper $= \frac{4}{3}\pi r(l^2 - r^2)$." Endlich wird im Schlussabschnitt die Martus'sche Inhaltsbestimmung kegelschnittkantiger Körper in die voraufgegangene Betrachtung hineingezogen. Die Simpson'sche Regel, welche als besonderer Fall in den entwickelten Formeln enthalten ist, gilt bekanntlich auch für solche Körper, deren Schnittflächen parallel zu einer Ebene kubische Functionen ihres Abstandes sind; ob dies noch für andere jener Formeln gilt, wird in einer nachträglichen Bemerkung erörtert. Lg.

S. Tebay, W. J. C. Sharp, J. Beyens. Solution of question 8927. Ed. Times XLVII. 110-111.

Die Seitenflächen eines Tetraeders mögen die Flächeninhalte Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 haben, der Radius der Umkugel sei R, die Radien der Umkugeln durch den Mittelpunkt der ersteren und die Ecken von Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 seien R_1, R_2, R_3, R_4, dann ist das Volumen V des Tetraeders:

$$V = \frac{1}{6}R^2\left(\frac{\Delta_1}{R_1} + \frac{\Delta_2}{R_2} + \frac{\Delta_3}{R_3} + \frac{\Delta_4}{R_4}\right).$$

In einer Bemerkung wird die Gültigkeit einer entsprechenden Formel für einen mehrdehnigen Raum angezeigt. Lp.

S. Tebay, W. J. C. Sharp. Solution of question 8888. Ed. Times XLVII. 161-162.

D_1, D_2, D_3 seien die kürzesten Abstände der Gegenkanten (a, a), (b, b), (c, c) eines Tetraeders, V sein Volumen, Δ der Inhalt der gleichen Seitenflächen, dann ist:

$$V = \tfrac{1}{3}(D_1 D_2 D_3), \quad \Delta^2 = \tfrac{1}{8}(D_1^2 a^2 + D_2^2 b^2 + D_3^2 c^2),$$
$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = D_1^2 + a^2 = \text{etc.}$$

Man vergleiche übrigens die allgemeineren Betrachtungen von Herrn Ad. Schmidt: „Das gleichseitige Tetraeder“ (F. d. M. XVI. 1884. 500) und von Herrn D. Besso: „Sul tetraedro a facce eguali“ (F. d. M. XVIII. 1886. 491). Lp.

T. R. Terry, R. Lachlan, W. W. Taylor. Solution of questions 7987 and 8036. Ed. Times XLVII. 46-48.

Die von Herrn Terry als Aufgabe 7987 aufgeworfene Frage nach dem Radius einer Kugel, welche vier von aussen sich gegenseitig berührende Kugeln mit den Radien a, b, c, d berührt (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 493), war für Herrn Lachlan Veranlassung dazu, den Ausdruck für den Radius der Orthogonalkugel jener vier Kugeln:

$$\frac{4}{r^2} = 2\Sigma\left(\frac{1}{ab}\right) - \Sigma\frac{1}{a^2}$$

zum Beweise vorzulegen. Herr Taylor leitet diesen Ausdruck her. Ausserdem wird die Bemerkung hinzugefügt, dass der allgemeine Ausdruck für den Radius einer Kugel, die fünf gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln schneidet, in Clifford's Mathematical papers steht. Ferner ist die Arbeit des Herrn Lachlan „On systems of circles and spheres“ zu vergleichen (F. d. M. XVIII. 1886. 491). Lp.

S. Tebay, J. Wolstenholme. Solution of question 8804. Ed. Times XLVII. 31-32.

Bei einem Tetraeder seien a, b, c drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten, ferner x, y, z die bez. Gegenkanten, A, X, B, Y, C, Z die entsprechenden Flächenwinkel, V das Volumen. Dann ist:

$$\frac{ax}{\sin A \sin X} = \frac{by}{\sin B \sin Y} = \frac{cz}{\sin C \sin Z}.$$

Sind die Inhalte der vier Seitendreiecke gleich, so ist

$$a = x,\quad b = y,\quad c = z,\quad A = X,\quad B = Y,\quad C = Z,$$
$$V = \tfrac{1}{12}\{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\}^{\frac{1}{2}},$$
$$(b-c)\sin A+(c-a)\sin B+(a-b)\sin C = 0.$$

Lp.

D. Biddle. Solution of question 8325. Ed. Times XLVI. 58-59.

T. P. Kirkman. Solution of question 8801. Ed. Times XLVII. 24-26.

Ein Tetraeder *ABCD* stehe mit der Basis *BCD* auf einer horizontalen Ebene; *E* sei ein Punkt der Kante *AB*. Auf den Kanten *AC* und *AD* zwei Punkte *P* und *Q* so zu bestimmen, dass die drei Geraden *EP*, *PQ*, *QB* gleiche Neigung gegen die horizontale Basis besitzen. Durch die Frage des Herrn Biddle angeregt, welcher den Weg als den von einer hinunter kriechenden Fliege bezeichnet hatte, giebt Herr Kirkman ähnliche Fragen, die er an die ägyptischen Pyramiden anknüpft, indem er mehrere derartige Wege nach der Plattform eines unregelmässigen Pyramidenstumpfes anzulegen vorschreibt, den einen für Pharao und seinen Hofstaat, den anderen für das gemeine Volk. Eine ähnliche Aufgabe für ein ebenes Polygon stellt und löst Herr Kirkman in Ed. Times XLVII. 58-59 (No. 8843). Lp.

A. Höfler. Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Cylinderstutzes und der Kugel. Hoffmann Z. XVIII. 1-26.

Die Arbeit enthält Anwendungen von Eigenschaften der Sinuscurve und des Cavalieri'schen Princips und „giebt Begriffsbestimmungen und Entwickelungen, so dass bloss planimetrische und stereometrische Kenntnisse vorausgesetzt, dagegen weder goniometrische Symbole noch Curvengleichungen verwendet werden“. Letztere sind ebenso wie die betreffenden Integrationen in Anmerkungen zugefügt. In § 1 und 2 werden demgemäss die einfache und die allgemeine Sinuscurve $y = \sin x$ und $y = a \sin \frac{x}{b}$ definirt, sowie ihr Flächeninhalt berechnet. § 3 bis 5 behandeln

den Cylinderstutz und sein Netz, Inhalt des Mantels und Quadranten eines Stutzes. §§ 6 bis 11 sind der Kugel gewidmet. Deren Netz wird aus Zweiecken construirt, die nicht, wie in manchen Lehrbüchern üblich, von Kreisbogen, sondern von allgemeinen Sinuscurven begrenzt sind. Erstere liefern nämlich, wie gezeigt wird, bei Zugrundelegung von 12 Zweiecken für den vollen Winkel um den Pol der Netzkugel 94° zuviel, letztere dagegen nur 8° zu wenig. Oberfläche und Inhalt der Netzkugel sind dieselben wie die der wirklichen Kugel. Zum Schlusse lässt sich der Verfasser über die didaktische Verwendung der behandelten Aufgaben aus. Lg.

H. Simon. Elementar-stereometrische Quadratur der Ellipse. Hoffmann Z. XVIII. 421-422.

Die Ellipse wird als Schnitt eines geraden Kreiscylinders aufgefasst und dann der Satz von der Orthogonalprojection $F = F_1 \cos \alpha$ verwertet. Lg.

W. Kretkowski. Construction der Kugel, welche gegebene Kugeln unter gleichem Winkel schneidet, und analoge Aufgaben. Krak. Denkschr. XIII. (Polnisch.)

Die Schrift behandelt das von Herrn B. Alvord im Amer. Journ. of Math. V. (siehe F. d. M. XIV. 1882. 526) untersuchte Problem und berichtigt die dort unrichtig angegebene Anzahl der Lösungen. Der Verfasser entwickelt seine Rechnung gleichzeitig für Kugeln und Kreise mittels Formeln der m-dimensionalen Geometrie und im schiefwinkeligen Coordinatensystem. Er zeigt, dass die Construction der Kreise, welche vier gegebene unter gleichem Winkel treffen, auf acht und nicht, wie Herr Alvord behauptet, auf 96 Arten möglich ist, und dass ebenfalls die Construction der Kugeln, welche fünf fest gegebene unter demselben Winkel schneiden, nur 16, aber nicht, wie bei Herrn Alvord, 640 Auflösungen zulässt. Dn.

W. KRETKOWSKI. Ueber einige Aufgaben der sphärischen Geometrie. Krak. Denkschr. XIII. (Polnisch.)

Algebraische Lösung der beiden folgenden Aufgaben:

1) Construction des Kreises, der vier oder mehr gegebene, auf einer Kugel liegende Kreise unter gleichem Winkel schneidet, d. h. Bestimmung des Halbmessers des Kreises und des genannten Winkels.

2) Construction des Kreises, der die gegebenen auf einer Kugel liegenden Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet, d. h. Bestimmung des Halbmessers des ersten Kreises. Dn.

W. J. M'CLELLAND and THOMAS PRESTON. A treatise on spherical trigonometry with applications to spherical geometry and numerous examples. Part I, second edition. XII + 176 S. (1887). Part II. XVI + 186 S. (1886). London. Macmillan and Co.

Teil I behandelt die sphärische Trigonometrie bis zur Auflösung sphärischer Dreiecke; in Teil II wird die sphärische Geometrie mit einer in englischen Büchern ungewöhnlichen Vollständigkeit vorgetragen. Gbs. (Lp.)

H. B. GOODWIN. Plane and spherical trigonometry. London. Longmans, Green and Co. X + 236 S. (1886.)

Gbs.

M. JENKINS. On the order of proof of the principal equations of spherical trigonometry. Mess. (2) XVII. 30-34.

Der Verfasser wählt als die drei Grundformeln:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c};\quad \frac{\sin(A+B)}{\sin C}=\frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}.$$

Diese werden durch die ersten Betrachtungen abgeleitet, und aus ihnen werden alle anderen Formeln der sphärischen Trigonometrie gefolgert. Glr. (Lp.)

F. J. VAN DEN BERG. Over een vraagstuk van bolvormige driehoeksmeting. Nieuw Arch. XIV. 78-94.

Die Aufgabe, welche hier behandelt wird, ist die folgende: Wenn a, A, a_1, A_1, a_2, A_2 unveränderlich sind, während θ, θ_1, θ_2 sich ändern, kann dann (und wenn ja, auf welche Weise) die Elimination von θ zwischen:

$$\cos\theta_2 \cos\theta + \sin\theta_2 \sin\theta \cos A_1 = \cos a_1,$$
$$\cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos A_2 = \cos a_2$$

eine Beziehung zwischen θ_1 und θ_2 von derselben Form:

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos A = \cos a$$

geben? Mit andern Worten: Können drei sphärische Dreiecke, jedes mit gegebener Basis und gegebenem Winkel an der Spitze, aber mit veränderlichen anliegenden Seiten je zwei und zwei dieser Seiten gleich haben? Die Bedingungen werden durch Elimination erhalten, und ihre geometrische Bedeutung wird untersucht. G.

D. RAGONA. Nuove formule relative alla risoluzione dei triangoli sferici. Modena Mem. (2) V. 53-119.

Zu der zahlenmässigen Bestimmung des Wertes eines Winkels sind bekanntlich die Tangentenformeln vorzuziehen, weil durch dieselben die grösste Genauigkeit erreichbar ist. Aus diesem Grunde lehrt der Verf. die Auflösung aller Fundamentalaufgaben für die sphärischen Dreiecke durch Tangentenformeln. Zunächst werden die Lösungen der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ($A = 90°$), von denen zwei (mit α, β bezeichnete) Stücke gegeben sind, durch die folgenden beiden Systeme von Formeln bewirkt:

$$\text{I.}\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(45° - \tfrac{1}{2}\alpha)\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}},\quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2(45° - \frac{1}{2}\alpha)},$$

$$X = \varphi' + \varphi,\quad Y = \varphi' - \varphi,$$

$$\operatorname{tg}(45° - \tfrac{1}{2}Z) = \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(45° - \frac{1}{2}\alpha)} = \pm\operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}(45° - \tfrac{1}{2}\alpha).$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{tg} M = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},\quad \operatorname{tg} M' = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$X = M'+M,\quad Y = M'-M,$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}Z = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\frac{\cos M'}{\cos M} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\frac{\sin M'}{\sin M}.$$

Für das System I diene das Beispiel: Gegeben a, b; dann setze man $a=\alpha$, $b=\beta$. Gefunden C, c, B aus $\varphi' = \frac{1}{2}(C+c)$, $\varphi = \frac{1}{2}(C-c)$, $Z = B$. Für das zweite System seien gegeben $b(=\alpha)$, $c(=\beta)$; man findet B, C, a aus $M' = \frac{1}{2}(B+C)$, $M = \frac{1}{2}(B-C)$, $Z = a$. Die Aufgaben über die schiefwinkligen sphärischen Dreiecke werden durch Zerlegung mittels der sphärischen Höhen auf rechtwinklige zurückgeführt; doch sind hierzu viele Nebenrechnungen nötig, bei denen auch andere Hülfslinien benutz twerden. Der Gebrauch der Formeln wird durch Zahlenbeispiele erläutert, für deren Berechnung alle Zahlen ausführlich und weitläufig abgedruckt sind. Lp.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

Chr. Wiener. Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II. Bd. Krumme Linien (2. Teil) und krumme Flächen. Beleuchtungslehre, Perspective. Mit Figuren im Text. Leipzig. Teubner. XXX u. 649 S.

Der II. Band dieses hervorragenden Werkes, in welchem der Verfasser die Forschungsresultate und Lehrerfahrungen eines an Erfolgen reichen Gelehrtenlebens in gründlichster Durcharbeitung und klarem bündigem Vortrag zum Gemeingut aller macht, ist der Untersuchung und Darstellung der krummen Flächen und Raumcurven gewidmet. Die grundsätzliche Untersuchungsmethode ist die synthetische, mit voller Ausnutzung der Hülfsmittel der projectivischen Geometrie. Betrachtungen analytischer Natur sind

möglichst vermieden. Die wohlthuende Schärfe in der Behandlung des Unendlichkleinen ist besonders hervorzuheben. Auf die Bestimmung der ausgezeichneten Punkte der zu construirenden Curven, ihrer Tangenten und Krümmungshalbmesser wird besonderes Gewicht gelegt, wobei elegante und praktisch-einfache Constructionen entwickelt werden. Die Darstellung bewegt sich vorzugsweise in Grund- und Aufriss (für geradlinige Flächen sind mitunter zwei parallele Spurebenen, für die topographischen Flächen cotirte Projectionen benutzt). Auch cavalierperspectivische Darstellungen kommen zur Anwendung. Die parallelperspectivische und centralperspectivische Darstellung wird besonders behandelt. Den Schatten- und Beleuchtungsverhältnissen (letzteren nach dem einfachen cos-Gesetz für eine Lichtrichtung parallel der Würfeldiagonale) wird bei allen Flächenarten besondere Berücksichtigung zu Teil. Die dem Text eingedruckten 237 Figuren sind klar und übersichtlich gezeichnet. — Es kommen der Reihe nach zur Besprechung: die krummen Flächen im allgemeinen, Cylinder, Kegel, Umdrehungsfläche, abwickelbare Fläche im allgemeinen. Hierauf folgen in Specialbehandlung: die Flächen zweiten Grades, die Umdrehungsflächen, der Durchschnitt krummer Flächen, die Schraubenlinie, die abwickelbaren Flächen, die topographische und die Umhüllungsfläche, ferner die windschiefen Flächen, die Krümmung der Flächen, endlich die Parallelperspective, Centralperspective und Reliefperspective krummer Flächen. Die Fassung des ausführlichen Inhaltsverzeichnisses ermöglicht eine leichte und rasche Orientirung über den reichhaltigen Stoff. — Das viele Eigenartige und Neue, das sich sowohl in den allgemeinen theoretischen Untersuchungen als in der Specialbehandlung findet, im einzelnen aufzuzählen, ist unmöglich. Referent beschränkt sich darauf, einige Abschnitte hervorzuheben, die ihm selbst besonderes Interesse eingeflösst haben. Dahin gehören namentlich: die allgemeine Untersuchung über Abwickelbarkeit (mit einem Beispiel einer nicht geradlinigen abwickelbaren Fläche), die schon im I. Bd. vorbereitete und jetzt erweiterte Imaginärprojection und deren theoretische und constructive Verwertung, die Bemerkungen über die Herstellung von Faden-

modellen, die Betrachtung der windschiefen Regelflächen in nach Stoff und Behandlung vielfach eigenartiger Weise (darunter die Untersuchung der Raumcurve vierter Ordnung, zweiter Art), die schöne Behandlung der Theorie der Krümmung und deren constructive Ausbeutung, die Perspective des menschlichen Blickes (nach Wollaston). Die nach dem ursprünglichen Plane vom Verfasser für den II. Bd. in Aussicht gestellte Mitteilung seiner eingehenden photometrischen Untersuchungen musste, als zu ausgedehnt, einer besonderen Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

Hk.

Chr. Beyel. Axonometrie und Perspective. Stuttgart. Metzler. V u. 57 S.

Dem Buche liegt die erfolgreiche Tendenz zu Grunde, zwei methodisch getrennte Gebiete unter einheitlichem Gesichtspunkte zu betrachten und durch Verallgemeinerung zu vereinfachen. In diesem Sinne wird die Centralperspective und die Parallelperspective unter dem allgemeinen Gesichtspunkt der axonometrischen Methode behandelt. Verfasser begnügt sich jedoch nicht mit der blossen theoretischen Durchführung des Gedankens, sondern macht denselben in der Ausbildung von einfachen zeichnerischen Methoden für die praktische Perspective nutzbar.

Nachdem zunächst die allgemeine Centralprojection axonometrisch behandelt ist, wird durch Annahme der Projectionsebene parallel der z-Axe zur praktischen Perspective weiter geschritten. Dabei wird der Bestimmung des Objectes durch zwei Risse besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Es wird dann die Ausführung von geometrischen Constructionen an perspectivischen Bildern gelehrt und die Anwendung der entwickelten Methoden an einer Reihe von praktischen Beispielen illustrirt. Hierauf folgt in analoger Behandlung die schiefe Parallelprojection (Pohlke's Satz) mit ihren zwei Specialfällen der orthogonalen und zur z-Axe parallelen Stellung der Projectionsebene. Der leichtverständliche, durch neun gut gezeichnete Figurentafeln unterstützte Vortrag wendet sich durchweg an die unmittelbare

räumliche Anschauung und hält sich von überflüssiger Rechnung frei. Hk.

Ch. Brisse. Cours de géométrie descriptive. IIe partie, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales. Paris. Gauthier-Villars.

Das erste Heft dieses Teiles, welches 1887 erschienen ist, handelt vom Kegel und Cylinder, nämlich von ihren Tangentialebenen, ihren ebenen und gegenseitigen Durchschnitten. (Verlagskatalog von Gauthier-Villars. 1886, III et IV trimestre.) Lp.

C. F. A. Leroy. Traité de stéréotomie, comprenant les applications de la géométrie descriptive à la théorie des ombres, la perspective linéaire, la gnomonique, la coupe des pierres et la charpente. 11e éd., par E. Martelet. Paris. Gauthier-Villars.

J. de la Gournerie. Supplément au Traité de stéréotomie de Leroy. Théorie et construction de l'appareil hélicoïdal des arches biaises. Rédigées par E. Lebon. Paris. Gauthier-Villars.

Nach einem früheren Hefte und einer Nachschrift der Vorlesung über den Gegenstand gearbeitet. Lp.

D. Regis. Corso di applicazioni della geometria descrittiva. Fasc. 1°. Contorni di ombra e linee di eguale illuminazione. Torino. Bocca.

R. Klette. Das perspectivische Zeichnen. 3te Aufl. Braunschweig. Bruhn. 42 S. Hk.

W. Butz. Ueber Wert, Ziel und Methode des Zeichenunterrichts an höheren Lehranstalten. Pr. Realprogymn. Lauenburg a. d. Elbe.

Für den Unterricht im constructiven Zeichnen, dessen Wichtigkeit einerseits in seiner lebendigen und fruchtbringenden Wechselwirkung mit dem mathematischen Unterricht, andererseits in der Bedeutung des constructiven Zeichnens an sich als Sprache der Technik begründet ist, wird als Lehrziel an Realgymnasien bezeichnet: „Die darstellende Geometrie bis zu Körperdurchdringungen und Abwickelungen, die Centralperspective bis zur Darstellung von Zimmern und einfachen Gebäuden und im Anschluss hieran die Schattenconstruction, ferner die einfacheren Aufgaben der Parallelperspective (Axonometrie)." Der Unterricht, welcher als Massenunterricht zu erteilen ist, soll in Untertertia beginnen. Dass er dem Mathematiker allein übertragen werde, soll (aus äusseren und inneren Gründen) unzulässig sein.

Hk.

Fr. Graberg. Stufenfolge der Massräume. Wolf Z. XXXII. 191-216.

Verfasser sucht seine Anschauungen, über welche in F. d. M. XVII. 1885. 583 berichtet worden ist, durch ihren Zusammenhang mit den Blickbewegungen besser zu begründen. „Die Massverhältnisse sind Vorstellungsweisen, nach welchen wir die Blickbewegungen lenken, um einerseits in den Linien des Gesichtsfeldes uns zurechtzufinden, andererseits nach Bedürfnis neue Linien auf dem kürzesten Wege hervorzubringen." „Bedarf es nur der Bezeichnung einer Richtung, um die Teilung des Raumes zu überschauen", so hat man den linearen Massraum. Die Massverhältnisse, welche die gegenseitige Bewegung von 2, 3 oder 4 Linien (Ebenen) regeln, bestimmen den polaren, trilinearen oder bipolaren Massraum. Um sodann die Anwendung dieser Auffassung auf Curven und Flächen zu zeigen, werden diejenigen des trilinearen und bipolaren Massraumes (Curven und Flächen dritter und vierter Ordnung) betrachtet, und wird an ihnen de-

monstrirt, wie man durch stetige Blickbewegung, mit der eventuell die Vorstellung der Reliefgestalt der gezeichneten Gebilde verbunden wird, „Curven und Flächen erkennen und deren Gestaltenwechsel verfolgen kann.“ Ob das von dem Gewohnten sehr abweichende Gewand, in das Verfasser seine Gedanken hüllt, der Propagation derselben förderlich sein wird, muss dahingestellt bleiben. Hk.

J. Bazala. Allgemeine Theorie der Isophoten-Tangenten und Construction derselben für Flächen zweiten Grades. Hoppe Arch. (2) V. 113-130.

Die vorgetragenen Constructionen beruhen auf folgendem Princip: Will man für eine Lichtstrahlenrichtung l in einem Punkte i einer Fläche F die Tangente der durch ihn gehenden Isophote darstellen, so hat man l auf die — F in i berührende Ebene orthogonal zu projiciren und für diese Projection l' als Lichtstrahlenrichtung die durch i gehende Tangente t der Selbstschattengrenze darzustellen; t ist dann die verlangte Isophoten-Tangente. Verfasser zeigt die Anwendung dieses Princips an den einzelnen Typen der Flächen zweiten Grades unter Anlehnung an die früher von ihm veröffentlichten Beleuchtungsconstructionen und mit Illustration durch drei gut ausgeführte Figurentafeln. Hk.

A. Brambilla. Nuovo metodo per determinare le linee egualmente illuminate sulle superficie di rotazione per raggi luminosi paralleli. Genova G. 213-216.

Herr Neu hat im S. M. F. Bull. XIV. (F. d. M. XVIII. 1886. 510) eine sehr einfache Methode zur Construction derjenigen Linien angegeben, welche die beleuchtete Gegend einer Umdrehungsfläche von der dunklen trennt, sobald die Construction der Tangente in einem beliebigem Punkte des Meridians bekannt ist.

Der Zweck der Note des Herrn Brambilla ist eine Verallgemeinerung der Methode von Herrn Neu, damit dieselbe, wenn

die Lichtstrahlen mit einer gegebenen Richtung parallel sind, die Linien gleich starker Beleuchtung ergebe. Der Verf. führt die Aufgabe auf die Auffindung der Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit einem Kreise zurück. La. (Lp.)

M. Rembacz. Eine neue Methode zur Construction des Neigungswinkels zweier Ebenen in orthogonaler Projection. Progr. d. Realschule in Stanislau (Polnisch).

Dn.

W. S. B. Woolhouse. Solution of question 5643. Ed. Times XLVII. 26-30.

Zwei beliebige Dreiecke sind gegeben; das eine orthogonal so zu projiciren, dass die Projection dem zweiten ähnlich wird. Die Grösse des projicirten Dreiecks durch einfache Construction mit Zirkel und Lineal zu finden. Drei Methoden hierfür werden angegeben. Lp.

Chr. Beyel. Ueber Schnitt und Schein eines windschiefen Vierecks. Schlömilch Z. XXXII. 301-309.

Der Aufsatz enthält interessante Untersuchungen über die Ebenen, welche zwei Paare von Gegenseiten eines windschiefen Vierecks in Punkten eines Kreises schneiden, sowie über diejenigen Punkte des Raumes, von denen aus sich zwei Paare von Gegenseiten so auf eine Ebene projiciren, dass die Projectionen der vier Seiten in deren Schnittpunkten mit der Ebene einen Kegelschnitt berühren. Hk.

L. Klug. Ueber mehrfach perspective Tetraeder. Hoppe Arch. (2) VI. 93-104.

Es werden die Bedingungen für die einfach-, zweifach- und vierfach-perspective Lage zweier Tetraeder, die keine gemeinschaftliche Ecke oder Fläche haben, und deren gegenseitige Beziehungen untersucht. Bei vierfach perspectiver Lage bilden die vier Collineationscentren und -ebenen die Ecken und Flächen

eines dritten Tetraedes, welches zu den beiden ursprünglichen in der nämlichen vierfach perspectiven Beziehung steht wie diese unter sich; die Kanten der drei Tetraeder liegen in 12 Ebenen und gehen durch 12 Punkte, welche die Flächen und Ecken von drei neuen Tetraedern bilden, denen dieselbe gegenseitige Lage zukommt wie den drei ersten; u. s. w. Es gelangt dann die Möglichkeit der mehrfach perspectiven Lage von zwei Tetraedern mit gemeinschaftlichen Ecken und Flächen zur Erörterung, ferner die Möglichkeit der verschiedenartigen Zuordnung der Ecken und die mögliche Anzahl der perspectiven Lagen bei zwei Tetraedern ohne gemeinsame Elemente. Endlich werden drei paarweise perspective Tetraeder mit den durch sie bestimmten weiteren Tetraedergruppen und deren Eigenschaften besprochen. Hk.

J. Solin. Construction der Axen einer Kegelfläche zweiten Grades. Casop. XVI. 1. (Böhmisch).

Die Kegelfläche ist durch einen (wirklich dargestellten) Kegelschnitt Γ_1 als Grundlinie, sodann durch die Projection des Centrums auf die Grundebene und dessen Entfernung h von dieser Ebene gegeben. Die Fusspunkte x, y, z der gesuchten Axen in der Grundebene bilden ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf die Grundlinie Γ_1 und einen imaginären Kreis Γ_2, dessen Mittelpunkt die oben erwähnte Projection des Kegelcentrums und dessen Radius $h\sqrt{-1}$ ist. Die den Punkten einer Geraden P in Bezug auf die Kegelschnitte Γ_1, Γ_2 conjugirten Punkte liegen auf einem Kegelschnitt Π; den sämtlichen Geraden P der Grundebene entspricht in dieser Weise ein Kegelschnittnetz, dessen Grundpunkte eben die fraglichen Punkte x, y, z sind. Um dieselben zu bestimmen, werden diejenigen Kegelschnitte Π_0, K des Netzes benutzt, welche durch die Schnittpunkte von Γ_1, beziehungsweise Γ_2 mit der unendlich fernen Geraden der Grundebene hindurchgehen, also den Kegelschnitten Γ_1, Γ_2 homothetisch sind. Es werden entsprechende Bestimmungselemente der Kegelschnitte Π_0, K abgeleitet und, um keinen

allgemeinen Kegelschnitt zeichnen zu müssen, Π_0 auf die dargestellte Grundlinie Γ_1 perspectivisch-ähnlich bezogen. Dem Kreise K, welcher als dem Systeme (Π_0) angehörig betrachtet wird, entspricht im Systeme (Γ_1) ein leicht zu bestimmender Kreis K_1, welcher durch einen bestimmten Punkt von Γ_1 geht und diesen Kegelschnitt noch in drei Punkten x_1, y_1, z_1 schneidet, denen im Systeme (Π_0) die gesuchten Fusspunkte x, y, z der Axen entsprechen. Die Construction wird sowohl für den Fall, wo der Mittelpunkt der Grundlinie im Endlichen liegt, als auch für eine parabolische Grundlinie gezeigt.

Eine andere Construction gründet sich auf die Benutzung einer Curve dritter Ordnung. Den Geraden P, welche durch einen Punkt q gehen, entsprechen in der oben angeführten Weise in Bezug auf die Curven Γ_1, Γ_2 Kegelschnitte Π, welche einem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten x, y, z, q' (q' ist dem Punkte q conjugirt) angehören; der Strahlenbüschel $(P, \ldots)$ und der Kegelschnittbüschel $(\Pi, \ldots)$ sind projectivisch und erzeugen eine Curve Φ dritter Ordnung. Wählt man als q die unendlich fernen Punkte u_∞, v_∞ der Axen der gegebenen Grundlinie, so ergeben sich zwei Curven Φ_u, Φ_v dritter Ordnung, welche sich in den Punkten x, y, z rechtwinklig schneiden. Auf Grund dessen kann insbesondere die innerhalb der Kegelfläche liegende Axe X rasch construirt werden. Man bestimmt den innerhalb der Grundlinie liegenden Bogen z. B. von Φ_u durch einige Punkte, zeichnet diesen Bogen und führt an denselben durch v_∞ die Tangente; der in dieser Tangente liegende Punkt von Φ_v ist der fragliche Fusspunkt x der Axe X. Die Construction der beiden übrigen Axen Y, Z ist sodann eine Aufgabe zweiten Grades. Std.

C. M. Jessop. The mechanical tracing of curves. Quart. J. XXII. 151-156.

Der Grundgedanke des beschriebenen mechanischen Apparates zur Verzeichnung jeder beliebigen algebraischen Curve geht aus von der in Cremona's „Elementen des graphischen Calculs“ gegebenen (übrigens von Lill herrührenden) graphischen

Auflösung der numerischen Gleichungen. Die bezügliche geometrische Construction des Ausdrucks

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

kann in einen Mechanismus umgesetzt werden, welcher aus zwei Systemen von n und $n+1$ in einander verschiebbaren geradlinigen Gliedern besteht, von denen je zwei benachbarte zu einander rechtwinklig sind (entsprechend den zwei rechtwinkligen Polygonen der Lill'schen Construction). Hat man nun eine algebraische Curve, deren Gleichung

$$(1)\qquad y^n + \mathfrak{F}_1(x) y^{n-1} + \mathfrak{F}_2(x) y^{n-2} + \cdots + \mathfrak{F}_n(x) = 0$$

ist, wo

$$\mathfrak{F}_1(x) = a_1 x + b_1,$$
$$\mathfrak{F}_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2, \text{ u. s. w.}$$

ist, so können zur mechanischen Bestimmung von $\mathfrak{F}_1(x)$, $\mathfrak{F}_2(x)$ u. s. f. ebensoviele derartige Mechanismen angeordnet und in einen der Gleichung (1) entsprechenden (geschlossenen) Hauptmechanismus eingeschaltet werden, welch letzterer den Zeichenstift führt. Hk.

W. M. Thornton. On compound and reverse curves. Annals of Math. III. 39-46.

Curven, welche aus einer Reihe von Kreisbogen zusammengesetzt sind, von welchen jeder den vorhergehenden berührt, finden beständig Anwendung in den constructiven Aufgaben des Maschinenbaus und der Architectur; auch bei Eisenbahnen, Hochstrassen u. s. w. In dieser vorliegenden Arbeit werden nun die einfachsten Principien dargelegt, die für die Construction von Eisenbahncurven massgebend sind. Die hierbei vorkommenden mathematischen Deductionen sind elementar. Mz.

K. Jost. Ueber einen neuen Ellipsenzirkel. Wien. Ber. XCV. 251-252.

Der beschriebene Ellipsenzirkel ist identisch mit dem von Sidersky in Hoppe Arch. LXV. 420 veröffentlichten und findet

sich bereits in Fr. à Schooten, Organica conicarum sectionum in plano descriptio (Liber IV der Exercitationes math. Leyden 1657.) Hk.

F. Paterno. Un teorema sulle h_i di un certo fascio e le sue applicazioni in un sistema generale di assi obliqui. Giorn. di scienze nat. ed econ. di Palermo. XVIII. 342-360.

M. L. Neu. Rectification. S. M. F. Bull. XV. 33.

Enthält die Berichtigung eines Versehens in der in F. d. M. XVIII. 1886. 510 besprochenen Abhandlung. Hk.

J. Cardinaal. Applications des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive. Delft Annales de l'Éc. Pol. III. 151-194.

Die enge Verbindung zwischen den Grundlehren der synthetischen Geometrie und den Constructionen der descriptiven Geometrie erläutert der Verfasser näher dadurch, dass er einige Theorien und Constructionen der ersteren auf die letztere anwendet. Die behandelten Aufgaben beziehen sich auf die Construction und die Durchschnitte der Oberflächen zweiter Ordnung. Vorweg giebt er eine rein geometrische Erklärung der Eigenschaften, auf welche sich die Constructionen gründen. Dabei wird nachgewiesen, worin diese Betrachtungen von denen abweichen, die Reye und Schröter bei ähnlichen Aufgaben angestellt haben.

So behandelt der Verfasser in erster Linie die Curven der vierten Ordnung als Durchschnitte zweier willkürlichen Oberflächen zweiter Ordnung, deren Construction in einigen besonderen Fällen dargethan wird. Darauf wendet er sich zu der Projection der Curven, welche als Durchschnitte dieser Oberflächen entstehen, und geht die verschiedenen Formen derselben durch. In der dritten Abteilung werden die Construction und die Durchschneidung der ebenen Curven nach den Grundsätzen

der synthetischen Geometrie behandelt und an vielen Beispielen näher erklärt; dabei wird gezeigt, wie Reye's Methode auf Curven höherer Ordnung angewandt werden kann. Endlich werden in der letzten Abteilung noch einige schwierigere Aufgaben durchgenommen, welche die Construction und die Durchschnitte von Oberflächen zweiter Ordnung zum Gegenstand haben. Die verwickelten Constructionen, welche sie fordern, werden mehr angedeutet als ausgeführt, wobei von der orthogonalen Projection Gebrauch gemacht wird. So behandelt der Verfasser zwölf Aufgaben und zeigt, wie die Auflösung vieler anderer ebenso durch Anwendung dieser Methode gefunden werden kann.

G.

K. Emes. Zur Photogrammetrie. Mit Benutzung einiger Publicationen der „Photographischen Mitteilungen" bearbeitet. Mitt. über Art. u. Genie. XVIII_2. 135-142.

Der Artikel enthält neben den technischen Einzelheiten auch eine kurze theoretische Betrachtung über die Berechnung der Lage des Augpunktes in den Aufnahmen.

Lp.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

E. Kötter. Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. Eine von der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Juli 1886 gekrönte Preisschrift. Berl. Abh. 303 S. 4°, auch sep. bei Georg Reimer.

Im Jahre 1882 hat die Berliner Akademie gemäss den Bestimmungen der Steiner'schen Stiftung die folgende Preisaufgabe gestellt:

„Die bis jetzt zur Begründung einer rein geometrischen Theorie der Curven und Flächen höherer Ordnung gemachten Versuche sind hauptsächlich deswegen wenig befriedigend, weil man sich dabei (ausdrücklich oder stillschweigend) auf Sätze gestützt hat, welche der analytischen Geometrie entlehnt sind und grösstenteils allgemeine Gültigkeit nur bei Annahme imaginärer Elemente geometrischer Gebilde besitzen. Diesem Uebelstande abzuhelfen, giebt es, wie es scheint, nur ein Mittel: es muss der Begriff der einem geometrischen Gebilde angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dass an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, Ebenen, wirklich existirende Elemente treten, und dass dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und geometrisch bewiesen werden können. Für die Curven und Flächen zweiter Ordnung hat dies von Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ mit vollständigem Erfolge ausgeführt. Die Akademie wünscht, dass in ähnlicher Weise auch das im Vorstehenden ausgesprochene allgemeine Problem in Angriff genommen werde.“

Da diese Aufgabe 1884 keinen Bearbeiter gefunden hatte, dessen Schrift den gestellten Anforderungen genügend entsprochen hätte, so beschloss die Akademie, die in Rede stehende Aufgabe als Steiner'sche Preisfrage für das Jahr 1886 zu erneuern. In Folge dieser Anregung ist die Arbeit des Herrn Kötter entstanden, welche am 1. Juli 1886 gekrönt wurde. Die Preisschrift besteht aus einer Einleitung und fünf Capiteln, von denen das letzte (dem Wunsche der Akademie entsprechend) analytische Erläuterungen zu den geometrischen Entwickelungen enthält; sie sollen von uns nach einander betrachtet werden.

Die Einleitung ist einer kurzen Darlegung der berühmten Untersuchungen gewidmet, durch welche von Staudt die Grundlagen der Theorie des Imaginären in der Geometrie gelegt hat.

Nachdem der Verfasser im ersten Capitel an die v. Staudt'sche Erklärung von imaginären Punkten und Geraden (erster Art) erinnert und einige Hülfssätze bewiesen hat, erörtert er die

reelle Darstellung der imaginären Elemente eines einförmigen Grundgebildes, die er als Hülfsmittel zu gebrauchen beabsichtigt. Die Strahlen eines Büschels mit imaginärem Centrum werden durch die reellen Punkte seiner Ebene repräsentirt, nämlich jeder definirt eindeutig den imaginären Strahl, welchem er angehört; die Darstellung der Punkte einer imaginären Geraden entspricht obiger Darstellung nach dem Dualitätsgesetze. Um die Punkte einer reellen Geraden und die Geraden durch einen reellen Punkt darzustellen, projicirt man erstere von einem imaginären Centrum aus und schneidet letztere durch eine imaginäre Gerade; das imaginäre Element eines der ersteren Gebilde wird dann durch den reellen Träger des entsprechenden Elementes in dem zugehörigen zweiten Gebilde eindeutig definirt. (Wir bemerken, dass ein Speciallfall dieser Darstellung allgemein bekannt ist. Werden nämlich die Punkte einer reellen Geraden von einem Kreispunkte aus projicirt und die reellen Punkte der projicirenden Strahlen betrachtet, so bekommt man die gewöhnliche geometrische Darstellung der imaginären Zahlen durch die reellen Punkte einer Ebene).

Da zwei einförmige Gebilde projectiv sind, wenn sie die Anfangs- und Endglieder einer Reihe von Gebilden ausmachen, von denen je zwei aufeinander folgende perspectiv sind, so hat man zur Klarlegung der allgemeinen projectiven Beziehung den Zusammenhang unter den reellen Gebilden der Ebene festzustellen, die ein Strahlenbüschel und eine dazu perspective Gerade repräsentiren. Diese Untersuchung ist nicht ohne grosse Schwierigkeiten; aber nachdem sie beendet ist, kann man aus ihr mit Leichtigkeit den grössten Teil der Sätze über die Projectivität im binären Gebiete ableiten, welche v. Staudt im § 16 der „Beiträge“ auf andere Weise bewiesen hat. Wir können nicht behaupten, die neue Beweismethode habe deshalb einen Vorzug vor der älteren, weil einige durch v. Staudt vermiedene Continuitätsbetrachtungen, welche der Verfasser anzustellen gezwungen wurde, sehr verwickelt oder etwa nicht ganz befriedigend sind: aber sie muss für bemerkenswert gehalten werden, weil sie (wie der Verfasser klar legt) auf andere verwandte Fragen angewandt werden kann.

Den Gegenstand des zweiten Capitels bilden die „Involutionen". Der Verfasser fängt mit dem Beweise des folgenden bekannten Lehrsatzes an: „Wenn in zwei projectiven einförmigen Gebilden desselben Trägers irgend zwei Elemente einander wechselseitig entsprechen, so entsprechen je zwei zusammengehörige Elemente einander wechselseitig". Er fährt mit der folgenden Erzeugung einer Involution fort: „Wenn in zwei projectiven Gebilden desselben Trägers den festen Elementen A_1, B_1 des einen stets die festen Elemente B_2, A_2 des anderen entsprechen, einem dritten Elemente C aber andere und andere $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ... zugeordnet werden, so sind die jedesmaligen Doppelpunkte Paare der Involution $A_1 A_2$; $B_1 B_2$". Jedem Paar der Involution gehört bei der bestimmten Erzeugungsweise ein Element $\mathfrak{C}$ zu. Die verschiedenen Reihen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, ... und $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}'_2$, $\mathfrak{C}'_3$, ..., welche einer gegebenen Anordnung der Involution entsprechen, sind sämtlich unter einander projectiv; zu ihnen wird daher die Involution projectiv gesetzt. Sind ein Strahlenbüschel und eine Strahleninvolution unter einander projectiv, so stehen die beiden Repräsentationsebenen derselben in einer ein- zweideutigen Verwandtschaft, deren Studium auf eine rein geometrische Darstellung der quadratischen Inversion führt.

Die Wichtigkeit obiger Erzeugung der Involutionen (zweiter Ordnung) besteht in ihrer Verallgemeinerungsfähigkeit. In der That kann man zuerst sagen: Wenn wir auf alle Arten die projective Beziehung zwischen einer Involution AA_1, BB_1, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, ... und einer Punktreihe B_2, A_2, $\mathfrak{C}'_2$, ... desselben Trägers herstellen, wo nur $\mathfrak{C}'_2$ beweglich ist, und jedesmal die Coincidenzelemente eines solchen Reihenpaares zusammenfassen, so erhalten wir die Gruppe einer Involution dritter Ordnung. Dieselbe enthält die Tripel $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$. Die Elemente der Reihe $\mathfrak{C}'_2$, $\mathfrak{C}''_2$, $\mathfrak{C}'''_2$, ... und die Gruppen der kubischen Involution sind in eindeutiger Beziehung; und da an die Stelle von $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ zwei beliebige Involutionsgruppen gesetzt werden können, so kann man unendlich viele Elementenreihen herstellen, die in eindeutiger Beziehung zur kubischen Involution stehen: alle sind unter einander projectiv; zu ihnen wird die kubische Involution projectiv

gesetzt. Nachdem die Projectivität zwischen einem einförmigen Grundgebilde und einer Involution zweiter oder dritter Ordnung erklärt ist, erhellt von selbst, was man unter projectiven Involutionen (zweiter oder dritter Ordnung) verstehen muss.

Wie man aus der quadratischen die kubische Involution erhalten hat, so kann man aus der letzteren die biquadratische ableiten, und allgemein aus der Involution n^{ter} Ordnung diejenige $(n+1)^{ter}$ Ordnung. Man kann sogar die Involutionen n^{ter} Ordnung auf verschiedene Weise aus zwei projectiven von den Ordnungen $m < n$ und $n-m$ erhalten.

Ohne alle die Sätze zu besprechen, welche der Verfasser grösstenteils durch die vollkommene Induction über die Involutionen beweist, führen wir als bemerkenswert an das Studium der $(1, n)$-Beziehung zwischen den Repräsentationsebenen eines Strahlenbüschels und einer dazu projectiven Strahleninvolution n^{ter} Ordnung, ferner die zugehörigen Stetigkeitsbetrachtungen, welche ihren analytischen Ausdruck in dem Satze finden, dass mit den Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades die Wurzeln sich stetig ändern.

Eine Involution ist ein eindimensionaler linearer Raum. Durch eine Involut on n^{ter} Ordnung und eine n-punktige Gruppe kann man nach dem bekannten Riemann'schen Verfahren zur Erzeugung linearer Räume ein zweifaches System von n-punktigen Gruppen herstellen, welches Involutionsnetz n^{ter} Ordnung und zweiter Stufe genannt wird. Aus diesem erhält man auf eine ähnliche Weise ein Involutionsnetz n^{ter} Ordnung und dritter Stufe; und allgemein ein Involutionsnetz n^{ter} Ordnung und μ^{ter} Stufe aus einem von derselben Ordnung aber von der $(\mu-1)^{ten}$ Stufe. (Ein Involutionsnetz μ^{ter} Stufe ist nichts anderes als die Weyr'sche Involution μ^{ter} Stufe). Diese aus Punktgruppen bestehenden Systeme haben die projectiven Eigenschaften aller linearen Räume; Herr Kötter beweist die wichtigsten unter denselben im ersten Abschnitt des dritten Capitels seiner Arbeit.

Aber dies sind nicht die einzigen Folgerungen, welche man aus der Bemerkung ableiten kann, dass eine Involution (erster Stufe) ein linearer einfacher Raum ist, wie man aus Folgendem

ersehen kann. Zwei projective Strahlenbüschel in derselben Ebene erzeugen einen Kegelschnitt, den Ort der Punkte, in denen entsprechende Gerade sich schneiden; in analoger Weise erzeugen zwei projective Büschel von Involutionen n^{ter} Ordnung, wenn sie demselben Involutionsnetz angehören, ein einfaches System n-punktiger Gruppen, deren jede der Durchschnitt zweier entsprechenden Involutionen der Büschel ist. Ein solches System heisst Involution „zweiten Ranges". Liegen ferner in zwei Ebenen zwei projective Punktreihen zweiter Ordnung, so kann man die ∞^1 Geraden betrachten, welche Paare entsprechender Punkte verbinden; ähnlicherweise, sind zwei projective nicht demselben zweistufigen Netze angehörigen Involutionen n^{ter} Ordnung gegeben, so kann man die ∞^1 Schar von Involutionen (ersten Ranges) betrachten, deren jede durch zwei entsprechende Gruppen der gegebenen Involutionen bestimmt wird. Dem Studium der Involutionen zweiten Ranges und dieser Scharen ist der zweite Abschnitt des Capitels III gewidmet. Dasselbe enthält in der That eine geometrische Untersuchung einer algebraischen rationalen ganzen Function zweier Veränderlichen und zwar von der n^{ten} Ordnung in der einen, von der zweiten in der anderen.

Eine ähnliche Untersuchung für Functionen derselben Art, aber von den Ordnungen n und μ, enthält der folgende Abschnitt desselben Capitels. In ihm betrachtet Herr Kötter die Involutionen n^{ter} Ordnung und μ^{ten} Ranges, die auf folgende Weise erklärt werden: Durch irgend $\mu+3$ Gruppen $U_i (i = 1, \ldots, \mu+3)$ eines Netzes μ^{ter} Stufe und n^{ter} Ordnung $(n \geqq \mu)$, von denen keine $\mu+1$ demselben Netze $(\mu-1)^{ter}$ Stufe angehören, ist eine Involution n^{ter} Ordnung und μ^{ten} Ranges eindeutig bestimmt. Bezieht man die μ aus $(\mu-1)$-stufigen Netzen bestehenden Büschel mit den Trägern $U_1, U_2, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_\mu (i = 1, \ldots, \mu)$ so projectiv, dass $U_{\mu+1}, U_{\mu+2}, U_{\mu+3}$ je μ entsprechenden Netzen gemeinsam sind, so treffen sich in jeder Gruppe der Involution μ entsprechende Netze der Büschel. Die Benennung „μ^{ten} Ranges" ist daraus entsprungen, dass mit keinem Netze $(\mu-1)^{ter}$ Stufe die Involution mehr als μ Gruppen gemeinsam hat.

Verbindet man jedes Paar entsprechender Gruppen zweier

Involutionen derselben Ordnung und desselben Ranges mit einer Involution (ersten Ranges), so bekommt man eine Schar von ihnen. Die vom Verfasser bewiesenen Eigenschaften der Involutionen höheren Ranges und dieser Scharen sind allen rationalen Normalcurven eines μ-dimensionalen Raumes und allen Regelflächen gemeinsam, die aus den Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier solcher in projectiver Beziehung stehenden Curven erzeugt werden. In Folge dessen wird es für den Leser leicht sein, dieselben herzustellen, ohne dass wir dabei verweilen, dieselben abzudrucken. Mit diesen Sätzen schliesst der Verfasser seine geometrische Darstellung der Theorie der binären Formen, welcher er die für die Erreichung seines Zweckes nötige Ausdehnung gegeben hat.

In Capitel IV wendet er dieselbe an, um die Grundlagen einer synthetischen Theorie der algebraischen Curven zu gewinnen. Im ersten Abschnitt stellt er die ersten Eigenschaften der (durch projective Strahlenbüschel definirten) Kegelschnitte zusammen; er beweist, dass zwei solche Curven im allgemeinen und höchstens vier Punkte gemein haben; er erklärt einen Kegelschnittbüschel als den Inbegriff aller Curven zweiter Ordnung, die durch dieselben vier Punkte gehen, und ermittelt endlich die hauptsächlichsten Eigenschaften der linearen Systeme von Kegelschnitten. Um von diesen Sätzen auf die analogen überzugehen, welche für höhere Curven gelten, wendet Herr Kötter wieder das Bernoulli'sche Inductionsverfahren an und gelangt dadurch zu einer Reihe von Wahrheiten, welche teilweise bekannt sind, aber von jetzt an als rein geometrisch bewiesen angesehen werden können. Die folgenden sind die wichtigsten: Zwei zu einander projective Büschel von Curven r^{ter} und $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugen eine Curve n^{ter} Ordnung, auf der sich nämlich je zwei entsprechende Curven der beiden Büschel schneiden. Wenn n in die Form $2m+\varepsilon$ gesetzt wird ($\varepsilon = 0$ oder 1), so sind m verschiedene Arten der Erzeugung von Curven n^{ter} Ordnung zu unterscheiden. Von diesen m Klassen sind die beiden ersten ($r = 1$ und $r = 2$) mit einander identisch und umfassen alle übrigen; jedoch kann nicht behauptet werden, dass auch jede

andere Klasse alle übrigen umfasst. Wählt man auf einer Curve n^{ter} Ordnung einen Punkt S beliebig aus, so giebt es unendlich viele Büschel von Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die, projectiv auf den Strahlenbüschel bezogen, mit ihm die Curve n^{ter} Ordnung erzeugen. Die Grundpunkte eines jeden derartigen Büschels gehören sämtlich der Curve an; man kann von ihnen im allgemeinen willkürlich einen Punkt mehr annehmen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung ausreichend ist.

Durch irgend vier Punkte der Curve, von denen keine drei in einer Geraden liegen, kann man einen Kegelschnittbüschel legen, der mit unendlich vielen auf ihn projectiv bezogenen Büscheln von Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung die Curve n^{ter} Ordnung erzeugt. Die Grundpunkte des letzteren Büschels liegen alle auf ihr, und man kann von ihnen im allgemeinen einen willkürlich mehr wählen, als zur Bestimmung einer Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung ausreichend ist.

Zwei Curven von den Ordnungen m und n haben im allgemeinen und höchstens mn gemeinschaftliche Punkte. Irgend zwei verschiedene Curven U und V n^{ter} Ordnung bestimmen einen Büschel $UVWZ\ldots$ von Curven n^{ter} Ordnung, dessen Curven sämtliche Schnittpunkte von U und V mit einander gemeinsam haben. Ist S irgend ein U und V gemeinschaftlicher Punkt, und sind U und V die Erzeugnisse des Strahlenbüschels S mit den Büscheln $U_1 U_2 \ldots$ und $V_1 V_2 \ldots$ von Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, so bestimmen die Büschel $W_1 W_2 \ldots$, $Z_1 Z_2 \ldots$, ... der durch $U_1 U_2 \ldots$ und $V_1 V_2 \ldots$ bestimmten Schar mit S die übrigen Curven des Büschels $UVWZ\ldots$. Irgend ein Punkt, der nicht beiden Curven U und V gleichzeitig angehört, bestimmt eine durch ihn gehende Curve des Büschels. U. s. f.

Am Schluss der Abschnitte II und III setzt der Verfasser die Haupteigenschaften der linearen Curvensysteme auseinander. Die zwei folgenden Abschnitte enthalten eine Reihe von Schnittpunktsätzen (Jacobi's, Plücker's, Cayley's u. s. w.). Um sie durch Induction zu beweisen, ist Herr Kötter gezwungen, die bekanntesten Lehrsätze über die Polaren eines Punktes in Bezug auf eine algebraische Curve zu beweisen. Ihre Definition giebt er

auf folgende Weise (vgl. den Kohn'schen Aufsatz: „Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte“ Wiener Berichte 1883): Lässt man eine Gerade p sich um einen beliebigen Punkt P drehen und sucht in jeder Lage die Doppelpunkte der Involution auf, welche in P einen n-fachen Punkt hat, und von der eine zweite Gruppe stets p mit einer Curve n^{ter} Ordnung C gemeinsam ist, so erhält man eine Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung, welche die Polare von P hinsichtlich C ist. Die Beweismethode der betreffenden Lehrsätze ist teilweise dem Beck'schen Aufsatze entnommen: „Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen“ (Math. Ann. XIV). Im letzten Abschnitt seiner Arbeit erinnert Herr Kötter zuerst an die Grassmann'sche Erzeugung einer algebraischen Curve; eine leichte Umwandlung derselben leitet ihn zu folgenden Resultaten:

Man kann n beliebige Strahlenbüschel so in Beziehung setzen, dass zu $n-1$ beliebig ausgewählten Strahlen von irgend $n-1$ Büscheln im allgemeinen ein einziges Element des letzten gehört; werden irgend $n-2$ dieser Strahlen festgehalten, so beschreiben die beiden anderen projective Strahlenbüschel. Jede Curve n^{ter} Ordnung kann auf mehrfache Art als Erzeugnis der n auf diese Art bezogenen Strahlenbüschel dargestellt werden; die Centren dieser Büschel können auf der Curve beliebig gewählt werden; in jedem Curvenpunkte treffen sich die n zusammengehörigen Strahlen einer Gruppe. Umgekehrt erzeugt jedes derartige Strahlenbüschelsystem eine Curve n^{ter} Ordnung. Diese Sätze werden vom Verfassser benutzt, um die Aufgabe der linearen Construction einer durch Punkte bestimmten algebraischen Curve gegebener Ordnung zu lösen.

Trotz der Länge dieses Referates dürfen wir gewiss nicht glauben, ein richtiges Bild alles dessen gegeben zu haben, was die Kötter'sche Preisschrift enthält. Denn ihr Inhalt widerstrebt — wie bei allen denjenigen, in welchen die überwundenen Schwierigkeiten den Aufgaben der Methodik angehören — der Verdichtung der Gedanken durch den Berichterstatter in einem hohen Grade. Jedoch hoffen wir genug über dieselbe gesagt zu haben, um den Leser zu überzeugen, dass die in Rede stehende Arbeit ein wichtiger Beitrag zur reinen Geometrie ist. Demnach wird der

Freund der synthetischen Geometrie das Lesen derselben unternehmen und trotz der unaufhörlichen Anstrengungen, welche zum Verständnisse der verwickelten Schlussfolgerungen des Verfassers nötig sein werden, bis zu Ende fortfahren. La.

B. KLEIN. Ueber den Fundamentalsatz der Geometrie der Lage. Marburg. Ber. 1-20.

In dieser Abhandlung begründet der Verfasser die Lehre von der Projectivität lediglich mit Hülfe perspectivischer Beziehungen, ohne Doppelverhältnisse oder harmonische Gebilde zu benutzen. Jeder Strahl a eines Strahlenbüschels A schneidet ein Geradenpaar (s_1, s_2) in einem Punktepaare (A_1, A_2). Hierdurch wird eine Perspectivität der beiden Geraden s_1 und s_2 begründet. Indem nun bezüglich dieser Geraden jedem Strahlenbüschel A eine Perspectivität, und jedem Strahl a ein Punktepaar A_1, A_2 zugeordnet wird, lässt sich aus der Geometrie der Strahlenbüschel und Punktreihen in ähnlicher Weise eine solche der Perspectivitäten und Punktepaare ableiten, wie aus der Geometrie der Punkte und Geraden einer Ebene diejenige der Strahlenbüschel und Punktreihen. Wie durch zwei Punkte eine Punktreihe, so ist durch zwei Perspectivitäten eine Perspectivitätsreihe bestimmt. Das ganze „Perspectivitätsgebiet“ der Geraden s_1 und s_2 kann entweder von der Perspectivität A aus dargestellt werden, insofern A der Träger von unendlich vielen Perspectivitätsreihen ist, oder von der Perspectivitätsreihe a aus, insofern dieselbe Träger unendlich vieler Büschel ist. Zwei Perspectivitäten (s_1, a) und (s_2, a), hervorgebracht durch die resp. Strahlenbüschel S_1 und S_2, begründen eine Projectivität der Geraden s_1 und s_2, wenn je zwei durch denselben Punkt von a gehende Strahlen der beiden Büschel auf einander bezogen werden. Wie die ∞^2 perspectivischen Beziehungen der Büschel S_1 und S_2 ihr Perspectivitätsgebiet, so bilden die entsprechenden Projectivitäten der Geraden s_1 und s_2 ein „Projectivitätsnetz“, dessen Träger das Punktepaar (A_2, A_1) ist, in welchem die Geraden s_1 und s_2 von $S_1 S_2$ geschnitten werden. Lässt man den Punkt A_2 alle beliebigen

Lagen auf der Geraden s_2 annehmen, so bilden die so entstehenden Netze das Gebiet, d. h. die Gesamtheit aller Projectivitäten zwischen s_1 und s_2. Mit diesen Hülfsmitteln beweist nun der Verfasser, dass, wenn auf den Geraden s_1 und s_2 zwei weitere Punktepaare B_1, B_2 und C_1, C_2 gegeben sind, die hierdurch bestimmte Projectivität auch erhalten wird, wenn man von B_1 statt von A_1 ausgeht, eine Behauptung, die sich mit der des Fundamentalsatzes der Geometrie der Lage deckt. Es folgen dann noch weitere Untersuchungen über Projectivitätsnetze und ein Ueberblick über die Geometrie des Projectivitätsgebietes.

Die vorstehend skizzirten Untersuchungen finden in drei weiteren inzwischen publicirten Aufsätzen des Verfassers ihren Abschluss. In denselben handelt es sich auch um den hier noch fehlenden Nachweis, dass bei der Ueberführung von S_1, S_2 in zwei neue Strahlenbüschel X_1, X_2 die Zuordnung des Punktes D_2 von s_2 zum Punkte D_1 von s_1 bestehen bleibt. Ueber diese Arbeiten wird später im Zusammenhange berichtet werden.

Schg.

Ch. Ruchonnet. Exposition géométrique des propriétés générales des courbes. 5e éd., augmentée. Paris. Gauthier-Villars.

V. Martinetti. Sulle configurazioni piane μ_3. Annali di Mat. (2) XV. 1-26.

Eine Configuration (Cf.) μ_3 in der Ebene besteht aus μ Punkten und μ Geraden in solcher Lage, dass jede der μ Geraden drei von den μ Punkten enthält und durch jeden der μ Punkte drei von den μ Geraden gehen (Reye, Acta Math. II. 94). Der Inbegriff der Punkte der Cf., von denen ein beliebiger nicht mit einem bestimmten Punkte P der Cf. auf einer Geraden der Cf. liegt mit den Geraden der Cf., welche obige Punkte enthalten, heisst Restfigur der Cf. in Bezug auf P. Wenn man die Punkte der Cf. durch die Folge der Zahlen 1, 2, ..., μ bezeichnet, so kann man die Cf. darstellen, indem man in μ aufeinander folgenden Columnen diejenigen Ternen von Zahlen einträgt, welche den in geraden Linien

liegenden Ternen von Configurationspunkten angehören. Eine und dieselbe Cf. kann hiernach auf mehrere Arten dargestellt werden. Damit zwei verschiedene Bezeichnungen dieselbe Cf. darstellen, ist es notwendig und hinreichend, dass die Zahlen 1, 2, ..., μ einer Substitution fähig sind, welche die Columnen der ersten in die der zweiten umwandelt. Die Substitutionen, welche die Bezeichnung einer Cf. nicht verwandeln, bilden die auf die Cf. „bezügliche Gruppe". Verteilt man die Zahlen 1, 2, ..., μ derartig in μ Ternen, dass jede Zahl dreimal wiederholt wird, ohne in jeder Terne mehr als einmal vorzukommen, und ohne dass ein und dasselbe Paar in zwei verschiedenen Ternen auftritt, so besitzt man damit die Bezeichnung einer Cf. μ_3, deren Construction danach eine Aufgabe zweiten Grades ist. Mithin ist die Aufsuchung der Cff. μ_3 nicht von derjenigen ihrer Bezeichnungen unterschieden.

Zu ihrer Ermittelung setzt der Verf. die Cff. $(\mu-1)_3$ als bekannt voraus und sucht daraus die μ_3 zu erlangen. Ein Verfahren zur teilweisen Lösung dieser Aufgabe besteht im folgenden: Es seien α, β zwei Punkte einer Cf. $(\mu-1)_3$, die nicht auf derselben Configurationsgeraden liegen; ferner $\alpha\alpha_1\alpha_2$ und $\beta\beta_1\beta_2$ zwei bezw. von den Punkten α und β ausgehende Geraden der Cf., welche sich in einem ausserhalb der Cf. gelegenen Punkte schneiden. Ersetzt man in der betrachteten Cf. $(\mu-1)_3$ die Ternen

$$\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{matrix} \quad \text{durch} \quad \begin{matrix}\mu & \mu \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{matrix} \quad \text{und fügt hinzu} \quad \begin{matrix}\mu \\ \alpha, \\ \beta\end{matrix}$$

so gelangt man zu der Bezeichnung einer Cf. μ_3. Dieses so oft wie möglich angewandte Verfahren führt zu einer gewissen Anzahl von Cff. μ_3, welche man „reductibel" nennt. Es giebt andere Cff., zu denen man so nicht gelangen kann, und die „irreductibel" heissen. Und es giebt genau eine solche für jeden Wert von μ, der nicht ein Vielfaches von 10 oder kleiner als 11 ist; es giebt auch eine derartige, wenn $\mu = 8$; dagegen giebt es zwei für $\mu = 9$, $\mu = 10$ und für jeden Wert von μ, der ein Vielfaches von 10 ist.

Nach diesen allgemeinen Ueberlegungen erforscht der Ver-

fasser die Cff. 8_3, 9_3, 10_3, indem er besonders die Art ermittelt, wie die Transformationen der Gruppe der Cf. auf ihre verschiedenen Punkte wirken. Schliesslich bestimmt er, unter Benutzung der von Herrn Kantor gewonnenen Ergebnisse betreffs der Cff. 10_3 (Wien. Ber. LXXXIV, F. d. M. XIII. 1881. 460-463), alle Cff. 11_3; von ihnen ist eine irreductibel, 30 sind reductibel. Der Verfasser verweist die Erforschung der Cff. 11_3 in eine andere Abhandlung; doch bemerkt er, eine erste Prüfung ihrer Bezeichnungen zeige schon, dass der Begriff der „Restfigur", obgleich er bei der Erforschung der Cff. sehr nützlich sei, dennoch nicht immer zur Herbeiführung einer Entscheidung darüber ausreiche, ob zwei Cff. identisch seien oder nicht. La. (Lp.)

A. Schönflies. Ueber einige ebene Configurationen und die zugehörigen Gruppen von Substitutionen. Gött. N. 410-417.

In der namentlich durch die Abhandlung des Herrn Reye im ersten Bande der Acta Math. hervorgerufenen Literatur über Configurationen hatte Herr Martinetti in den Ann. di Mat. (siehe d. vorstehende Referat) neuerdings Beiträge geliefert, welche interessante Sätze über die Configuration n_3 enthalten, d. h. über eine solche Gruppe von n Punkten und n Geraden, dass je drei Punkte auf einer Geraden liegen und je drei Gerade durch einen Punkt gehen. Da auch Herr Schönflies mehrere dieser Sätze gefunden hatte, so teilt er die Resultate seiner eigenen Untersuchung über die n_3 hier mit, mit dem Versprechen, eine ausführliche Abhandlung folgen zu lassen. Bezeichnen die Zahlen von 1 bis n zugleich die n Punkte einer Configuration n_3, so kann es Substitutionen der Zahlen von 1 bis n geben, welche nicht allein jeden Configurationspunkt in einen Configurationspunkt, sondern auch jede Gerade der Configuration wieder in eine solche Gerade überführen. Die Gesamtheit dieser Substitutionen soll die „Gruppe" der Configuration heissen. Ferner soll eine Configuration „regelmässig" heissen, wenn sie sich in Bezug auf alle Punkte und Geraden gleichartig verhält. Endlich soll „Configurationsdreieck" eine Gruppe von

drei Punkten der Configuration heissen, deren drei Verbindungsgerade zu den Configurationsgeraden gehören. Nach diesen drei Definitionen kann die Aufgabe, welche hier behandelt wird, so ausgesprochen werden: „Alle regelmässigen Configurationen mit Configurationsdreiecken zu finden, und die zugehörigen Gruppen aufzustellen“. Scht.

P. H. Schoute. Ein Steiner'sches Problem. J. für Math. CI. 154-161.

In dem Anhange von Steiner's berühmter „Syst. Entw. der Abh. geom. Gest.“ lautet die dritte Aufgabe: „Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade A, A_1 und in jeder irgend vier harmonische Punkte gegeben sind, so bestimmen die letztern, paarweise genommen, 16 Strahlen S, die sich in 72 Punkten P schneiden. ... Welche Eigenschaft haben die Strahlen S in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage und welche die Punkte P? Wie oft liegen von den letzteren drei und wie oft sechs in einer Geraden? u. s. w. (Giebt es z. B. acht Kegelschnitte, wovon jeder die gegebenen Geraden A, A' und vier Strahlen S berührt? Liegen unter anderen von den Punkten P acht mal sechs in einer Geraden, und schneiden sich von diesen vier und vier in einem Punkte? u. s. w.)“. Nachdem Herr Bauer in Stettin im Bande XIX des J. für Math. eine vollständige Lösung dieser Aufgabe gegeben hatte, entwickelt Herr Schoute im vorliegenden Aufsatze, dass die von Steiner eingeklammerten Fragen sich viel unmittelbarer erledigen lassen, und erkennt dabei eine von Steiner nicht angegebene und von Bauer nicht aufgedeckte Reciprocität. Scht.

A. Cayley. Note on the anharmonic ratio equation. Mess. (2) XVII. 95-96.

Bekanntlich ist die Gleichung, deren Wurzeln

$$\theta,\ \frac{1}{\theta},\ -(1+\theta),\ -\frac{1}{1+\theta},\ -\frac{\theta}{1+\theta},\ -\frac{1+\theta}{\theta}$$

sind, die folgende

$$(x^2+x+1)^3\,\theta^2(\theta+1)^2-(\theta^2+\theta+1)^3\,x^2(x+1)^2=0.$$

Hiervon wird ein leichter Beweis gegeben. Glr. (Lp.)

C. Le Paige. Sur les éléments neutres des involutions. Belg. Bull. XIV. 211-214.

Bisher haben die Geometer sich darauf beschränkt, bei den Involutionen I_k^n die singulären Elemente zu erforschen, die man neutrale Elemente erster Art nennen kann, d. h. solche, bei welchen den Gruppen von k Punkten eine einfache unendliche Schar von $n-k$ Punkten entspricht. Der Verfasser durchforscht die zwiefach, dreifach, ..., k-fach neutralen Gruppen und zeigt, wie ihre Eigenschaften die Untersuchung der von der Normalcurve verschiedenen rationalen Curven in einem beliebigen Raume ermöglichen. Mn. (Lp.)

Fr. Deruyts. Sur la représentation des involutions unicursales. Belg. Bull. (3) XIV. 322-345.

C. Le Paige. Rapport. Belg. Bull. (3) XIV. 199-202.

Eine Involution I_{n-1}^n sei gegeben durch:

$$\sum_1^n \lambda_i f_i = 0,\quad f_i = a_1^i x_1^n + a_2^i x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_{n+1}^i x_2^n.$$

Sieht man x_1^n, $x_1^{n-2} x_2$, ..., x_2^n als die Coordinaten eines Punktes in einem Raume von n Dimensionen an, so bestimmen die gleich Null gesetzten n Formen f in demselben einen Punkt, welcher der Repräsentant der Involution I_{n-1}^n sein kann. Damit diese Involution in ein festes Element und eine Involution I_{n-2}^{n-1} zerlegbar sei, muss der repräsentirende Punkt von I_{n-1}^n sich, wie der Verfasser beweist, auf der Normalcurve C_n des Raumes von n Dimensionen befinden. Dieses Ergebnis erstreckt sich auf eine Involution I_k^n. Ferner stellt Herr Deruyts die Involutionen durch mehrfach-lineare Formen dar; dann wendet er die erhaltenen Ergeb-

nisse auf einige interessante Fragen der Theorie der Involutionen an und insbesondere auf die Bestimmung der neutralen Elemente.

Mn. (Lp.)

Fr. Deruyts. Sur la théorie de l'involution. Belg. Bull. (3) XIV. 650-664.

C. Le Paige. Rapport. Belg. Bull. (3) XIV. 543-544.

Fortsetzung der im vorangehenden Berichte besprochenen Arbeit. Der repräsentirende Punkt einer Involution stellt auch die binäre Form dar, welche seine Coordinaten zu Coefficienten hat. Die Normalcurve wird dann der Ort der repräsentirenden Punkte binärer Formen, die genaue Potenzen sind. Diese neue Art der Darstellung ermöglicht es dem Verfasser, Sätze der Herren Rosanes, Le Paige, de Paolis über die neutralen Elemente der Involutionen, ihre kanonischen Formen u. s. w. in einfacher Weise auszusprechen und zu beweisen. Mn. (Lp.)

J. de Vries. Kwadrupelinvoluties op bikwadratische krommen. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 307-326.

Die Abhandlung ist in fünf Abschnitte eingeteilt. Im ersten behandelt der Verfasser die Involution I_4 auf der allgemeinen Curve K_4 vierten Grades, welche durch einen Büschel von Kegelschnitten erzeugt wird, dessen vier Basispunkte willkürlich auf der gegebenen Curve angenommen sind. Im zweiten Abschnitt werden einige besondere Fälle betrachtet, vor allem der merkwürdige, wenn ein Doppelpunkt von K_4 einer der vier Basispunkte des I_4 bestimmenden Kegelschnittbüschels ist. Im dritten Abschnitt untersucht der Verfasser den Fall, dass zwei corresiduale Involutionen I_4 und I'_4 ein Quadrupel gemein haben und also nicht mehr von einander verschieden sind; weiter betrachtet er die Involutions-Enveloppen, welche Hesse'sche und Cayley'sche Curven dritter Klasse oder dritten Grades sind. Im vierten Abschnitt geht er zu den Quadrupelinvolutionen über, die durch einen Büschel von Curven p^{ten} Grades auf K_4 erzeugt werden, wenn man $4p-4$ der Basispunkte dieses Büschels will-

kürlich auf K_4 annimmt. Er beweist, dass diese Involutionen im allgemeinen nicht durch Büschel von Kegelschnitten erzeugt werden können, und dass sie demnach als Quadrupelinvolutionen von grösserer Allgemeinheit als die vorhin untersuchten zu betrachten sind.

Im letzten Abschnitt untersucht der Verfasser die Involution I_s auf einer Curve K_n, die durch einen Büschel K_p bestimmt ist, wenn $np-s$ der Basispunkte dieses Büschels auf K_n liegen. Nachdem ihre Eigenschaften abgeleitet worden sind, beweist er, dass die Involution zweiten Ranges I_t^2, die durch ein Netz von Curven auf einer Curve vom Geschlecht g erzeugt wird, $\frac{1}{2}(t-1)(t-2)-g$ neutrale Paare hat.

Diese Abhandlung schliesst sich also an die von Weyr, Bobek und Ameseder entwickelte Theorie der Involutionen auf Curven an. G.

M. Pannelli. Sulle trasformazioni multiple involutorie di due spazi. Napoli Rend. (2) I. 153-161.

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit der mehrdeutigen Beziehung zweier Punkträume Σ und Σ' auf einander, welche so beschaffen ist, dass einem beliebigen Punkte von Σ' M Punkte in Σ und einem beliebigen Punkte von Σ M' Punkte in Σ' entsprechen. Das analoge Problem für zwei Ebenen hat Herr Christian Wiener (Math. Ann. III) behandelt, und der Herr Verfasser stellt sich die Aufgabe, die von Herrn Wiener erhaltenen Resultate auf den Raum auszudehnen.

Es sind in den Räumen Σ und Σ' Gruppen von M resp. M' Punkten, welche einander zugewiesen sind, zu bestimmen. Dies geschieht für den Raum Σ durch drei Flächenbüschel P, Q, R von den Ordnungen resp. p, q, r und mit den Grundcurven resp. A, B, C. Je drei Flächen dieser Büschel schneiden einander in M Punkten einer Gruppe. Ebenso werden in Σ' drei Flächenbüschel P', Q', R' gewählt. Sind nun die Büschel P, Q, R projectiv resp. zu P', Q', R', so entspricht jeder Punktgruppe in Σ von M Punkten eine solche in Σ' von M' Punkten.

Um das Problem in grösster Allgemeinheit zu behandeln, nimmt der Herr Verfasser an, dass die Grundcurven von P, Q, R gemeinsame Theile und gemeinsame Punkte haben, deren Zahl und Bedeutung für die Büschel durch Zahlen bestimmt werden. Das Analoge wird für die Büschel in Σ' festgesetzt. Dann wird die Fläche resp. Curve von Σ angegeben, welche einer beliebigen Fläche resp. Linie in Σ' entspricht. In jedem Raume befindet sich eine gewisse „Doppelfläche", der Ort derjenigen Punkte, in welchen sich zwei Punkte einer Gruppe vereinigen. Mit ihr ist eine zweite Fläche, welche die übrigen Punkte dieser Gruppen enthält, verbunden. Beiden entspricht in Σ' eine besondere Fläche, welche die „Grenzfläche" genannt wird. Die Eigenschaften und Beziehungen dieser Flächen gegenüber den Fundamentallinien und Punkten der betreffenden Räume werden aufgesucht.

W. St.

G. Loria. Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica. Genova Giorn. 53-80.

Von r in algebraische Beziehung gesetzten Formen s^{ter} Stufe mögen je r zusammengehörige Elemente ein geometrisches Gebilde bestimmen: es sollen die aus diesen Gebilden entstehenden Formen untersucht werden. Vorläufig beschränkt sich Herr L. auf ein-, zwei- und dreistufige Gebilde, welche letzteren jedoch weniger häufig angewandt werden. Da die gegebenen Eigenschaften alle aus einigen fundamentalen Anzahlen sich ableiten lassen, so konnten nähere Beweise fast überall unterdrückt werden, und Herr L. benutzt als vornehmstes Beweisprincip mit Recht die richtige stufenweise Aneinanderreihung der Resultate. Um eine möglichst vollständige Angabe aller Erzeugungsmethoden zu haben, hat er im ersten Abschnitte neben neuen auch eine Reihe bekannter Sätze aufgeführt. Eine besonders dankenswerte Zugabe bilden die überaus zahlreichen Literaturangaben.

Einstufige Gebilde werden in algebraischer Beziehung betrachtet; kommen mehr als zwei Gebilde vor, so wird angenommen, dass ein Hülfsgebilde zu dem i^{ten} in (m_i, n_i)-Correspondenz stehe;

wo es die Symmetrie gestattet, wird das Hülfsgebilde mit einem der erzeugenden identisch genommen. (Eine Ausnahme hiervon bildet freilich No. 11). Zweistufige Gebilde werden stets in Cremona'scher Verwandtschaft (mit einem Hülfsgebilde, wenn ihre Anzahl grösser als 2 ist) in Anwendung gebracht.

Von erzeugten Gebilden werden betrachtet ein algebraisches Nullsystem, Strahlen-Complexe und -Systeme, Regelflächen, allgemeine Flächen und Raumcurven. In den beiden letzten Fällen liefert die dualistische Erzeugungsweise allgemeine und abwickelbare Hüllflächen.

Bei der Fülle des Stoffes muss sich Referent damit begnügen, die verschiedenen Verknüpfungen anzugeben, welche Herr L. in Betracht zieht. Das Nullsystem entsteht, indem man jedem Punkt eines Raumes diejenige Ebene zuweist, welche zu ihm und den homologen Ebenen entsprechender Ebenenräume incident ist. (Nach Vorgang von Herrn Sturm will Referent eine Ebene zu allen ihren Punkten und Geraden, eine Gerade zu allen ihren Punkten und allen sie enthaltenden Ebenen, einen Punkt zu allen ihn enthaltenden Strahlen und Ebenen als incident bezeichnen). Complexe bilden diejenigen Strahlen, welche incident sind mit zugehörigen Elementen folgender Gebilde: zweier Punkträume (30), zweier Strahlenbüschel (2), dreier Strahlen-Ebenen oder -Bündel (26), einer Strahlen- und einer Punkt-Ebene (14). Die zweite Definition ergiebt eine einstufige Mannigfaltigkeit linearer Strahlensysteme, die dritte und vierte liefern zweistufige Mannigfaltigkeiten von Regelscharen bezw. Strahlenbüscheln. Um ein Beispiel zu geben, so resultirt ein Complex $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)^{\text{ter}}$ Klasse und Ordnung, wenn die drei Strahlenebenen in Cremona'schen Verwandtschaften n_1^{ter}, n_2^{ter}, n_3^{ter} Ordnung zu einem Hülfsgebilde stehen.

Zu Congruenzen gehören die Strahlen welche incident sind zu entsprechenden Elementen von: zwei Punktebenen oder Ebenenbündeln (12), drei Strahlenbüscheln (6), einer Punkt-, einer Strahlen-Ebene und einem Strahlenbündel (24), vier Strahlen-Ebenen oder -Bündeln (27). Die letzte Erzeugungsweise ergiebt ein System von der Ordnung und Klasse $\Sigma\Sigma n_i n_k$, wenn die einzelnen

Strahlen-Ebenen oder -Bündel durch Cremona'sche Verwandtschaften n_i^{ter} Ordnung ($i = 1, 2, 3, 4$) mit einem Hülfsgebilde verbunden sind.

Regelscharen werden von solchen Strahlen beschrieben, die sich als incident erweisen zu entsprechenden Elementen von: zwei Ebenenbüscheln oder zwei Punktreihen (1), einer Punktreihe oder einem Ebenenbüschel und zwei Strahlenbüscheln (9), einem Ebenenbüschel, einem Strahlenbüschel und einer Punktreihe (10), vier Strahlenbüscheln (11), fünf Strahlen-Ebenen oder -Bündeln (29).

Flächen erfüllen solche Punkte, die incident sind zu entsprechenden Elementen von: drei Ebenenbündeln (19), einem Ebenenbüschel und einem aus zwei Punktebenen entstehenden Strahlensystem (20), einem Strahlen- und einem Ebenen-Bündel (13), einem Strahlenbündel und der Ebenen-Mannigfaltigkeit, die aus einer Punkt- und einer Strahlenebene entsteht (22).

Hinsichtlich der ersten Fläche möchte Referent auf ein kleines Versehen aufmerksam machen. Sind die drei Ebenenbündel durch Cremona'sche Transformationen n_1^{ter}, n_2^{ter}, n_3^{ter} Ordnung auf eine Hülfsebene bezogen, so ist die Fläche, $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf die Ebene eindeutig abgebildet. Hierbei entsprechen den ebenen Schnitten der Fläche Curven nicht von der $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)^{\text{ten}}$ Ordnung, sondern von der $(n_1 + n_2 + n_3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Doppelcurve der Fläche ist daher auch von der Ordnung $\frac{1}{2}(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 2)(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 3)$, nicht von der Ordnung $\frac{1}{2}\{(n_1 - 1)(n_1 - 2) + (n_2 - 1)(n_2 - 2) + (n_3 - 1)(n_3 - 2)\}$, wie Herr L. angiebt. Die Flächen (13) und (22) werden als Monoide, als Flächen s^{ter} Ordnung mit einem $(s-1)$-fachen Punkte erkannt.

Die Punkte der betrachteten Curven sind incident zu entsprechenden Elementen von: drei Ebenenbüscheln (5), einem Ebenenbüschel und einer durch Punktreihen erzeugten Regelschar (7), zwei Strahlenbündeln (15), einem Strahlenbündel und dem durch zwei Punktebenen erzeugten Strahlensystem (21).

Man erkennt, wie diejenigen Erzeugungsweisen sämtlich erweitert erscheinen, welche auf die Raumcurve dritter Ordnung,

die Congruenz ihrer Secanten, auf hyperboloidische Regelscharen, auf Flächen zweiter und dritter Ordnung führen. E. K.

G. Castelnuovo. Studio sulla omografia di seconda spezie. Ven. Ist. Atti (6) V. 1041-1115.

Die Homographie-Beziehung zweiter Stufe zwischen drei einförmigen Grundgebilden ist nichts anderes als die von Herrn Schubert analytisch, von Herrn Benno Klein rein geometrisch untersuchte trilineare Beziehung. Herr C. verlegt die Gebilde auf dieselbe kubische Raumcurve Γ und nimmt an, dass drei zusammengehörige Punkte von den Sehnen a, b, c aus in denselben Punkt einer Ebene ω projicirt werden. Während ω als Träger der dreifachen Punkte P, Q, R festliegt, giebt es unendlich viele Axentripel. Bezeichnet man nämlich mit A, B, C und A_1, B_1, C_1 die Punkte, welche zwei Axentripel auf ω ausschneiden, so entsprechen entweder A, B, C und A_1, B_1, C_1 einander in einer collinearen Verwandtschaft mit dem Grunddreieck PQR, oder es sind ABC und $A_1B_1C_1$ die Grunddreiecke einer quadratischen Verwandtschaft mit den Doppelpunkten P, Q, R. „Neutrale“ (nach Herrn Schubert's Bezeichnung singuläre) Punkte erhält man, wenn A; B; C bezw. von b, c; c, a; a, b aus in B_a, C_a; C_b, A_b; A_c, B_c projicirt werden. Betrachtet man B_c und C_b, andererseits B_a und C_a als Punkte der zweiten und dritten Reihe, so wird der zugehörige der ersten Reihe ganz unbestimmt; es sind B_c, C_b; B_a, C_a; ... die neutralen bez. singulären Paare. Geht man zu einem anderen Axen-System über, so ergeben sich wieder die sechs singulären Punkte und Paare; war aber der Uebergang zu A_1, B_1, C_1 von der zweiten Art, so sind A_b und A'_c, A_c und A'_b, B_c und B'_a, B_a und B'_c, C_a und C'_b, endlich C_b und C'_a identisch. Als Axen kann man $a = B_cC_a$, $b = A_cC_b$, $c = C_aC_b$ wählen. Sind andererseits j, j' die Punkte, welche doppelt gewählt einen Punkt C_1 der dritten Reihe zu Tripeln ergänzen, so sind drei andere Axen $a = C_1B_a$, $b = C_1A_b$, $c = jj'$.

Um dies zu erweisen, knüpft Herr C. an die „Reihen“ des ersten und zweiten Systems an. Die Tripel einer Reihe gehören

zu Punkten einer Geraden ω, bez. eines A, B, C umschriebenen Kegelschnittes; die einzelnen Punkte ihrer Tripel beschreiben jedenfalls drei projectivische Punktreihen. Umgekehrt ergeben drei projectivische Punktreihen eine „Serie" des ersten oder zweiten Systems, wenn vier Tripel homologer Punkte der Homographie zweiter Stufe angehören. Da bei einem Uebergange zweiter Art zu einem neuen Axen-System jede Reihe des ersten Systems in eine solche des zweiten übergeht, so sind beide Systeme gleichwertig. Haben zwei Homographien eine Reihe gemeinsam, so haben sie und unendlich viele andere auch eine solche des anderen Systems gemeinsam.

In No. 13ff. wendet sich Herr C. zu den Involutionen 2. St. 3. O. Können drei Punkte 1, 2, 3 auf fünf verschiedene Arten als zusammengehörige Punkte in die gegebenen einförmigen Gebilde auf Γ eingeordnet werden, so ist dies auch auf die sechste mögliche Art zulässig, und es gehört zu irgend zwei Punkten von Γ derselbe dritte, in welche von den drei gegebenen Gebilden man sie einordnet, so dass jedes Tripel als ein Ganzes aufgefasst werden kann. Der Beweis beruht darauf, dass Γ mit den Sehnenpaaren b, c; c, a; a, b Hyperboloide bestimmt, die der Reihe nach AB, AC; BC, BA; CA, CB in den Punktepaaren B, C; C, A; A, B berühren, wenn ein solches Tripel vorkommt, und dass dieser Zusammenhang umgekehrt werden kann. Von den singulären Punkten fallen B_c, C_a, A_b mit M, dagegen C_b, A_c, B_a mit N zusammen. Die Ebenen, welche die einzelnen Tripel tragen, gehen durch den Schnittpunkt von MN mit ω. Hier läuft die Untersuchung in die gewöhnliche Methode aus, die Herr C. mit Benutzung der C^n im Raume n^{ter} Dimension auch auf allgemeine Involutionen n^{ter} O. angewandt hat (cfr. F. d. M. XVIII. 1886. 530). In ganz anderer Weise, ohne eine räumliche Versinnlichung zu benutzen, hat übrigens Herr Benno Klein den Uebergang von der trilinearen zur trilinearsymmetrischen Beziehung vollzogen (cfr. F. d. M. XIII. 1881. 464).

Bei den Constructionen der homographischen Beziehung zwischen drei einförmigen Gebilden, die Herr C. im § 2 giebt, wird immer mindestens ein neutrales Paar als gegeben betrachtet.

Ist z. B. neben fünf Tripeln ein neutrales Paar gegeben, so bezieht Herr C. die einförmigen Gebilde so auf eine Kubik, dass drei Tripeln dreifache Punkte entsprechen, die dann ω festlegen. Sind $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ die beiden anderen auf Γ entstehenden Tripel, ist $A_b B_a$ das neutrale Paar, so kann man als Axen a und b die Sehnen SA_b und SB_a benutzen. Ihnen zugehörig als c ergiebt sich die im allgemeinen einzige Sehne von Γ, welche zwei gewisse von C_1 und C_2 ausgehende Strahlen trifft. Liegen beide mit Γ auf demselben Hyperboloid, so ergeben sich unendlich viele Homographien 2. St., welche das neutrale Paar und neben den gegebenen unendlich viele Tripel mit einander gemein haben.

Im § 3 wird eingehend gezeigt, dass drei Strahlenbüschel, deren Centren auf einer ebenen Curve 3. O. C^3 beliebig sind, auf unendlich viele Arten durch eine Homographie zweiter Stufe so verknüpft werden können, dass jeder Punkt von C^3 ein Tripel zusammengehöriger Strahlen bestimmt. Lässt sich C^3 zunächst auf eine Art durch einen Strahlen- und einen Kegelschnitt-Büschel erzeugen, und bildet man aus zwei Strahlenpaaren des letzteren und den homologen Strahlen des ersteren ein C^3 eingeschriebenes Gitter, so können irgend drei Ecken desselben, von denen keine zwei auf einem Strahle liegen, zu Centren von trilinear bezogenen Büscheln gewählt werden, die C^3 erzeugen. Um den allgemeinen Satz zu haben, braucht Herr C. nur zu zeigen, dass zwei Kegelschnittbüschel eine Curve 3. O. erzeugen, wenn sie zwei Grundpunkte mit einander gemein haben, und die Strahlenpaare einander entsprechen, in denen die Verbindungslinie derselben vorkommt. Zugleich folgt dann die Allgemeingültigkeit der Erzeugung durch einen Strahlen- und einen Kegelschnitt-Büschel; es ergiebt sich, dass 9 Punkte im allgemeinen eine Curve 3. O. oder einen Büschel festlegen, dass eine C^3 mit einer Geraden höchstens drei, mit einem Kegelschnitt höchstens sechs, mit einer anderen Curve 3. O. höchstens neun Punkte gemein hat, etc.

Hieran knüpft Herr C. eine Methode, auf eine Curve C^3 3. O. andere C_1^3 „projectivisch", d. h. eindeutig zu beziehen. Rechnet man in der Ebene Σ zu einem Tripel einer Homo-

graphie 2. St. je drei Strahlen *SA*, *SB*, *SC*, und setzt man dann die Strahlenbüschel *A*, *B*, *C* in projectivische Beziehung zu denen *A'*, *B'*, *C'* einer zweiten Ebene, so liegen auf zwei eindeutig, „projectivisch" auf einander bezogenen Curven 3. O. solche Punkte *S* und *S'*, für die *S'A'*, *S'B'*, *S'C'* die homologen Strahlen zu *SA*, *SB*, *SC* sind. Σ und Σ' können auf unendlich viele Arten quadratisch so bezogen werden, dass die Reihen auf C^3 und C_1^3 einander entsprechen. Der Beweis, dass Curven 3. O. von gleichem Doppelverhältnis auf zwei Arten so bezogen werden können, dass gegebene Punkte M und M_1 einander entsprechen (No. 32), enthält nach Meinung des Referenten eine kleine Lücke. Eine projectivische Beziehung einer C^3 auf sich selbst ist entweder involutorisch, es liegen homologe Punkte auf demselben Strahl mit einem festen Curvenpunkte, oder sie ist die Combination zweier involutorischen Beziehungen. Zwei projectivische C^3 und C_1^3 entsprechen sich in collinearen Ebenen, sobald den Schnittpunkten irgend einer Geraden mit C^3 diejenigen einer anderen mit C_1^3 zugehören, also z. B., sobald zwei Wendepunkte einander entsprechen. Hiermit lässt sich das Wendepunkttheorem der C^3 in Verbindung bringen (No. 34).

In No. 37 ff. zeigt Herr C., dass gemäss der August'schen Erzeugungsweise eine Fläche 3. O. durch homographisch bezogene Ebenenbüschel erzeugt werden kann, deren Axen irgend drei windschiefe Gerade der Fläche sind. Jede Gruppe einer Involution 3. O., 2. St., die auf einer Raumcurve 3. O. liegt, kann durch Projection von drei Sehnen *a*, *b*, *c* aus von sechs Raumpunkten her gewonnen werden. Diese Gruppen füllen eine Fläche 3. O. aus und geben zu eigentümlichen Configurationen auf derselben Veranlassung. Die Trieder, welche *a*, *b*, *c* von den neutralen Punkten *X*, *Y* aus projiciren, durchschneiden sich in neun Geraden der Fläche; die dreifachen Punkte *P*, *Q*, *R* der Involution liegen auf derselben und ergeben ausserdem, da sie eine Gruppe der Involution bilden, eine Gruppe von sechs Punkten. Da jede Curve 3. O., die *a*, *b*, *c* zu Sehnen, *X*, *Y* zu Punkten hat, eine solche Involution trägt, so kommt jeder Punkt der Fläche in einer Gruppe *P*, *Q*, *R* vor. Die Annahme, dass *a*, *b*, *c* in

einer Ebene liegen, die ein Tripel in sich vereinigt, führt Herrn C. auf die Flächen 2. O. und auf eine ohne Beweis gegebene Construction des letzten Schnittpunktes zweier acht Punkte enthaltender ebener Curven 3. O. E. K.

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of questions 2391, 3651. Ed. Times XLVII. 137-138.

Die beiden älteren Sätze des Hrn. Sylvester, welche Hr. Sharp hier von neuem beweist, gehören der Theorie der residualen Punktgruppen für Curven dritter Ordnung an; sie sind sowohl in Salmon's höhere ebene Curven (No. 158ff.) als auch in die Vorlesungen über Clebsch-Lindemann (S. 431ff.) übergegangen; am letzteren Orte erscheinen sie als Ergebnisse allgemeinerer Betrachtungen, und es wird auch auf die Herren Brill und Nöther als gleichzeitige Entdecker derselben verwiesen.

Lp.

H. M. Taylor. Extension of an inversion property. Mess. (2) XVI. 143-144.

Verallgemeinerung der bekannten Eigenschaft, dass zwei Curven sich unter demselben Winkel schneiden wie ihre inversen; dieselbe lautet: Wenn zwei Curven in Bezug auf eine beliebige Anzahl von Punkten als Polen durch verschiedene reciproke Radien verwandelt werden, so schneiden sich die Curven, welche die Oerter der „Mittel" der entsprechenden Punkte der inversen Curven sind, unter demselben Winkel wie die [illegible]lichen Curven.

P. Visalli. Sulle figure generate da due [illegible] mentali di seconda specie, fra le quali [illegible] corrispondenza multipla $(1, \nu)$ di grado n. L. Rend. (4) III_1. 124-127.

Zwischen zwei Gebilden zwei[illegible] G, G' beste[illegible] $(1,\nu)$-deutige Verwandtschaft n^{ten} [illegible] eine Ve[illegible]

schaft, bei welcher jedem Elemente des zweiten ν (conjuncte) Elemente des ersten entsprechen, jedem Elemente des ersten dagegen ein Element des zweiten, und bei welcher Grundgebilden erster Stufe aus G Reihen n^{ten} Grades und p^{ten} Geschlechts aus G' entsprechen. Ferner sei x_r die Anzahl der r-fachen Grundelemente aus G und $x'_{r'}$ die Anzahl der r'-fachen Grundelemente aus G'.

Die Theorie dieser Transformationen ist vom Verfasser schon in zwei Abhandlungen entwickelt worden, über die wir F. d. M. XVII. 1885. 800ff. berichtet haben. In der jetzigen Note macht der Verfasser Anwendungen hiervon, indem er folgende Sätze beweist:

„Wenn die Gebilde G und G' zwei Strahlenbündel mit den Mittelpunkten O und O' sind, so ist der Ort für die Schnittpunkte entsprechender Strahlenpaare eine Curve von der Ordnung $n+\nu+1$, welche die Eigenschaft hat, dass durch O'

$$(n-1)(\nu-1)-p+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\Sigma_{r'}\tfrac{1}{2}r'(r'-1)x'_{r'}$$

Gerade gehen, von denen jede ausser O' zwei Punkte mit der Curve gemeinschaftlich hat.“

„Wenn G und G' ein Strahlenfeld und ein Punktfeld auf demselben Träger sind, so sind im zweiten

$$\tfrac{1}{2}\{(n-1)(n-2)-\Sigma_{r'}r'(r'-1)x'_{r'}-(\nu-1)(2n+\nu-2)\}-p$$

solche Punkte vorhanden, durch deren jeden zwei der ν entsprechenden conjuncten Geraden gehen.“ La. (Lp.)

G. Pittarelli. Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2). Rom. Acc. L. Mem. (4) III. 375-400.

G. Pittarelli. Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2). Rom. Acc. L. Mem. (4) III. 401-416.

Die erste dieser Abhandlungen enthält eine Untersuchung der durch eine Gleichung vom Typus $f \equiv a_\xi^2 \alpha_\eta = 0$ definirten Verwandtschaft (2, 1) [vgl. den Bericht über die Note des Herrn Piazza in F. d. M. XIV. 1882. 721]. Durch Anwendung eines bekannten Satzes (Clebsch, Binäre Formen, § 14) bestimmt der

Verfasser zuerst das vollständige System der zu f gehörigen Formen und findet, dass es aus neun Covarianten (zwei kubischen, drei quadratischen, vier linearen) und aus vier (durch eine Relation verbundenen) Invarianten besteht. Danach beschäftigt er sich mit der geometrischen Erforschung der Verwandtschaft. Zu diesem Zwecke denkt er sich einen Kegelschnitt C und zwei projectivische Strahlenbüschel als gegeben, deren Mittelpunkte O, s seien und von denen der zweite einen Punkt von C als Mittelpunkt habe. Zwischen den Punkten dieser Curve besteht dann eine Verwandtschaft (2, 1), deren Haupteigenschaften der Verfasser beweist und deren wichtigste Elemente er construirt.

In der zweiten Abhandlung findet eine Anwendung der Ergebnisse der ersten auf die Curven (dritter Ordnung) Γ' und Γ'' statt, die wie folgt definirt werden: Γ' ist der Ort der Punkte, wo sich die Tangenten des Kegelschnitts C in zwei durch die Verwandtschaft (2, 1) verbundenen Punkten schneiden; Γ'' ist der Ort der Punkte, wo sich ein Strahl r des Büschels O und die Tangente von C an demjenigen Punkte schneiden, in dem diese Curve durch den dem r entsprechenden Strahle von s geschnitten wird. Ein bemerkenswerter Fall ist vorhanden, bei welchem Γ' und Γ'' sich zu einer und derselben Curve Γ vereinigen. Derselbe tritt ein, wenn in der Verwandtschaft (2, 1) eine der linearen Covarianten identisch Null ist; jedoch ist die Curve Γ noch immer die allgemeinste Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. (Vgl. die Note des Herrn Battaglini: „Sopra una curva di 3^a classe e 4° ordine“. Atti della R. Acc. di Napoli 1865). La. (Lp.)

W. Massny. Ueber einen besonderen Fall quadratischer Transformation in der Ebene. Gross-Strehlitz. Wilpert. 20 S. 4°.

G. Jung. Sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 275-290.

In diesem Aufsatze legt der Verf. eine gewisse Auswahl

der Ergebnisse vor, welche er in der späteren Abhandlung festgestellt hat: „Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque" (Annali di Mat. (2) XV. 1888); wir werden uns daher darauf beschränken, die Untersuchungen des Hrn. Jung durch eine Darstellung der von ihm benutzten Mittel und des erstrebten Zieles zu kennzeichnen. Wir wollen jedoch sofort hinzufügen, dass manche Sätze verbessert werden müssen, wie Hr. Jung dies in seiner ausgedehnteren, eben angeführten Arbeit bekannt gemacht hat.

Man betrachte in der Ebene ein System $\infty^{c'}$ von algebraischen Curven M^{ter} Ordnung und p^{ten} Geschlechts, welches durch die Angabe seiner in beliebiger Lage angenommenen und von einander unabhängigen Grundpunkte vollständig bestimmt sei; die Anzahl k der veränderlichen Schnittpunkte zweier Curven des Systems heisst sein „Grad", während c' seine „Dimension", M seine „Ordnung", p sein „Geschlecht" ist. Zwischen den Zahlen c', k, p besteht die Beziehung $c' = k+1-p$. Ein derartiges System schliesst andere von demselben Grade, demselben Geschlechte, aber anderer Dimension $c'' < c'$ in sich, folglich ist $c'' < k+1-p$.

Unterzieht man ein lineares System einer quadratischen Transformation, so ergiebt sich ein anderes lineares System von gleichem Geschlecht, gleichem Grade und gleicher Dimension; die Systeme, welche sich durch quadratische Transformationen aus einem und demselben System ergeben, werden als zu einer und derselben „Familie" gehörig betrachtet, von welcher man als „typisches" System dasjenige ansieht, dessen Ordnung sich durch birationale Transformationen nicht herabdrücken lässt. Das Ziel des Verfassers ist die Auffindung aller möglichen „typischen" Systeme.

In allen linearen Systemen vom Geschlechte p, von der Ordnung $k > 0$ und von der Dimension $k+1-p$, die zu einer und derselben Familie gehören, und in allen linearen, darin enthaltenen Systemen niedrigerer Dimensionen ist die Differenz zwischen der Anzahl der Grundpunkte und der Anzahl der Grundcurven (Curven, welche durch die Eigenschaft definirt

sind, dass sie von den Systemcurven nur in Grundpunkten geschnitten werden) constant und heisst „Ueberschuss“ (eccesso). Wenn das typische System, welches der betrachteten Familie entspricht, keine Grundcurven besitzt, so ist der Ueberschuss gleich der Anzahl der Grundpunkte; in jedem andern Falle ist er gleich 1.

Das Vorangehende zeigt, dass zur Erforschung der verschiedenen Familien linearer Systeme die Betrachtung der typischen Systeme ausreicht. Es ist nützlich, diese letzteren in zwei Klassen zu teilen, deren eine die Systeme (von „normalem“ Typus) umfasst, welche keinen einfachen Grundpunkt haben, und deren andere die übrigen Systeme (von „abgeleitetem“ Typus) enthält; man geht von einem Normaltypus zu einem abgeleiteten über, indem man zu den Grundpunkten einfache Grundpunkte hinzufügt, und umgekehrt: wenn man in einem abgeleiteten Typus alle einfachen Grundpunkte unterdrückt, so kommt man zu einem Normaltypus, aus welchem das gegebene System abzuleiten ist. Die Normaltypen (und ihre abgeleiteten) sondern sich ihrerseits in monome, binome, trinome, ... Typen, je nachdem sie einen, zwei, drei oder mehr als drei einfache Grundpunkte haben. Der Verfasser führt die Aufsuchung der linearen typischen Systeme k^{ten} Grades bezüglich eines gegebenen Geschlechtes p auf diejenige der Nomaltypen p^{ten} Geschlechtes zurück; hierauf findet er alle möglichen monomen und binomen Normaltypen und giebt Andeutungen über die trinomen. Daraus folgert er Sätze in Betreff der monomen (§ 3), binomen (§ 4) und trinomen (§ 5) Typen und schliesst seine Arbeit mit der Bestimmung der ty- schen Systeme der vier ersten Geschlechter. La. (Lp.

G. Jung. Sulle trasformazioni piane multiple d'orc minimo. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 370-376.

Der Hauptzweck dieser Arbeit, einer Fortsetzung des Au satzes: „Sui sistemi lineari di curve algebriche di gener qualunque“ (s. das vorige Referat), ist ng der k-deutigen Transformationen kleinster Ordn rch,

die willkürliche Wahl der Grundpunkte der einfachen Ebene bestimmen kann. (Wir gebrauchen die Benennungen, welche F. d. M. XVII. 1885. 800ff. erläutert sind, ebenso die aus dem vorigen Berichte). Zur Lösung der Aufgabe erinnert der Verfasser daran, dass $c' = k+1-p$ ist, wenn ein lineares, aus algebraischen Curven M^{ter} Ordnung bestehendes System $\infty^{c'}$ durch seine willkürlich gewählten Grundpunkte bestimmt wird; daraus folgt, dass, wenn man nach Festlegung des Wertes von k der Reihe nach p gleich 0, 1, ..., $k-1$ setzt, der zugehörige Wert von c' gefunden wird. Auf solche Weise bestimmt man die Dimension des linearen Systems, von welchem man das Netz absondern muss, welches durch eine k-deutige Transformation p^{ten} Geschlechts hergestellt wird; das Netz und die Transformation sind Minima, wenn das lineare System typisch ist. Hat man insbesondere $c' = 2$, so fällt das Netz mit dem Systeme zusammen, und die Transformation ist durch ihre Grundpunkte bestimmt. Nachdem man so eine minimale k-deutige Transformation erhalten hat, wird man aus ihr eine ganze Familie k-deutiger Transformationen ableiten, indem man an dem jener Transformation entsprechenden Netze eine Reihe quadratischer Transformationen vollzieht. Daraus folgt eine Methode zur Bestimmung der geometrischen Auflösungen der beiden unbestimmten Gleichungen, welche man gewöhnlich der Erforschung der vieldeutigen Transformationen zugrunde legt.

Aus den von Herrn Jung in seiner Mitteilung Sui sistemi lineari etc. ausgesprochenen Sätzen erschliesst er die folgenden in Betreff der vieldeutigen Transformationen:

„Für alle k-deutigen Transformationen p^{ten} Geschlechtes einer und derselben Familie ist die Differenz ε zwischen der Anzahl der Grundpunkte der einfachen Ebene und der Anzahl der Grundcurven der vielfachen Ebene constant; wenn die vielfache Ebene der minimalen Transformation der Familie keine Grundpunkte hat, so ist ε gleich der Anzahl der Grundpunkte der einfachen Ebene, in jedem anderen Falle ist $\varepsilon = 1$. Endlich wird für alle Transformationen derselben Familie das Geschlecht der Uebergangscurve durch $9p+1-\varepsilon$ ausgedrückt."

Durch Anwendung des am Anfange dieses Berichtes erläuterten Verfahrens findet der Verfasser alle minimalen Transformationen zweiter, dritter, vierter Ordnung. Wenn man die allbekannten Bezeichnungen benutzt, so lassen sich die gewonnenen Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammenstellen:

$$k = 2 \begin{cases} p = 0 & [a_1 a_2]_2 \\ p = 1 & [a_1 a_2 \ldots a_7]_3 \end{cases}$$

$$k = 3 \begin{cases} p = 0 & [a_1]_2 \\ p = 1 & [a_1 a_2 \ldots a_6]_3 \\ p = 2 & \begin{cases} [a^2 a_1 a_2 \ldots a_9]_4 \\ [a a_1^2 a_2^2 \ldots a_8^2]_6 \end{cases} \end{cases}$$

$$k = 4 \begin{cases} p = 0 & \begin{cases} \text{Allgemeines Netz von Kegelschnitten.} \\ \text{Netz, enthalten im Systeme } [a_1^2 a_2]_3 \end{cases} \\ p = 1 & \quad \text{„ „ „ „ } [a_1 a_2 \ldots a_5]_3 \\ p = 2 & \begin{cases} \text{„ „ „ „ } [a^2 a_1 \ldots a_8]_4 \\ \text{„ „ „ „ } [a_1^2 \ldots a_8^2]_6 \end{cases} \\ p = 3 & \begin{cases} [a_1 a_2 \ldots a_{13}]_4 \\ [a^3 a_1 a_2 \ldots a_{12}]_5 \\ [a_1^2 a_2^2 \ldots a_7^2 b_1 \ldots b_4]_6 \\ [a^3 a_1^2 a_2^2 \ldots a_9^2]_7 \\ [a_1^3 a_2^3 \ldots a_8^3 b^2 c]_9 \end{cases} \end{cases}$$

La. (Lp.)

M. Lazarski. Ueber den Einfluss singulärer Punkte und Tangenten auf die Ordnung und Klasse ebener Curven. Krak. Ber. XV. (Polnisbh).

Synthetische Entwickelung der Plücker'schen Formeln und Untersuchung des Einflusses singulärer Punkte und Tangenten auf die Erniedrigung der Ordnung und der Klasse ebener Curven.

Dn.

H. E. M. O. Zimmermann. Beweis einiger Sätze von Jacob Steiner. Schlömilch Z. XXXII. 373-377.

Auf S. 667 der „Gesammelten Werke" Jacob Steiner's finden sich unter II die Sätze 1 bis 5 ohne Beweis mitgeteilt. Herr Zimmermann giebt für die Sätze 1 und 2, welche den Kern der ganzen Abhandlung ausmachen, Beweise. Die Sätze sind:

1. Sind in gleicher Ebene zwei Curven $C^{(p)}$ und $C^{(q)}$ in fester Lage gegeben, und bewegt sich eine constante Strecke *ab* einer Geraden *S* mit dem einen Endpunkt in $C^{(p)}$, mit dem anderen in $C^{(q)}$, so umhüllt die Gerade eine Curve $4pq^{\text{ter}}$ Klasse, welche die im Unendlichen liegende Gerade zur $2pq$-fachen Tangente hat.

2. Bewegen sich die Endpunkte der Strecke *ab* in einer festen Curve n^{ten} Grades $C^{(n)}$, so umhüllt die Gerade *S* eine Curve $2n(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse, welche die gegebene Curve in jedem ihrer im Unendlichen liegenden Punkte vierpunktig berührt, und welche die unendliche Gerade zur $n(n-1)$-fachen Tangente hat.

Die Grundlage für die Beweisführung bildet folgende Transformation. Um jeden Punkt *c* der Curve $C^{(p)}$ lege man als Mittelpunkt einen Kreis $\mathfrak{C}$ mit dem Radius *ab*. Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so trifft jeder von $\mathfrak{P}$ auslaufende Strahl die Curve $C^{(p)}$ in den Punkten $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_p$. Diese sind die Mittelpunkte von ebensoviel Kreisen $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$. Die Schnittpunkte des Strahls mit diesen Kreisen seien γ_1, γ'_1; $\gamma_2, \gamma'_2; \ldots, \gamma_p, \gamma'_p$. Dreht sich der Strahl um $\mathfrak{P}$, so bildet der Ort der Schnittpunkte γ eine Curve $4p^{\text{ter}}$ Ordnung. Schn.

A. del Re. Su certi luoghi, che s'incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di 2ª specie projettivamente riferite due a due. Palermo Rend. I. 272-283.

Es werden hier die Erzeugnisse je dreier reciproken oder collinearen Grundgebilde zweiter Stufe untersucht.

1) Dasjenige zweier collinearen ebenen Systeme und eines zu beiden collinearen Ebenenbündels *S*.

2) Das Erzeugnis eines Ebenenbündels *S* mit einem zu ihm collinearen und eines zweiten zu ihm reciproken ebenen Systems.

3) Dasjenige zweier collinearen Ebenenbündel und eines zu ihnen reciproken Ebenenbündels.

In dem ersten Falle findet der Herr Verfasser als Ort der Punkte, in welchen die Verbindungsgeraden entsprechender

Punkte der ebenen Systeme von den ihnen entsprechenden Strahlen des Bündels *S* getroffen werden, eine Curve sechster Ordnung mit einem dreifachen Punkte in *S*. Die dreifachen Secanten dieser Curve bilden eine Regelfläche fünfter Ordnung, etc.

Im zweiten Falle erzeugen die reciproken ebenen Systeme eine Fläche zweiter Klasse, deren Tangentialebenen auf die Strahlen des Bündels *S* bezogen sind. Das Erzeugnis ist eine Fläche dritter Ordnung, welche in *S* einen Doppelpunkt hat. Andererseits aber sind die Tangentialebenen der Fläche zweiter Klasse auch bezogen auf die Ebenen des Bündels *S*. Als Schnitt entsprechender Ebenen beider Gebilde entsteht ein Strahlensystem zweiter Ordnung fünfter Klasse.

Im dritten Falle erzeugen die collinearen Bündel das Sehnensystem einer kubischen Raumcurve. Der Ort der Punkte, in welchen die Strahlen des dritten Bündels die ihnen entsprechenden Sehnen schneiden, ist eine Curve vierter Ordnung erster Art. Ein anderes Erzeugnis dieser drei projectiven Gebilde ist das Strahlensystem von Geraden, welche entsprechende Strahlen der beiden ersten collinearen Bündel treffen und in der diesen Strahlen entsprechenden Ebene des dritten Bündels liegen. Dieses System ist dritter Ordnung vierter Klasse.

Die Ordnungs- resp. Klassenzahlen dieser Erzeugnisse werden mit Hülfe des Zeuthen'schen Correspondenzprincipes gefunden.

W. St.

L. Geisenheimer. Berichtigung zu Seite 201 u. f. vom Jahrgang XXXI der Zeitschrift für Math. Schlömilch Z. XXXII. 127-128.

Die Berichtigung bezieht sich darauf, dass einer Geraden in Bezug auf eine beliebige Raumcurve nicht vier, sondern nur zwei Gerade polar zugeordnet sind, und auf einige damit zusammenhängende Sätze (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 542).

Scht.

C. Segre. Su alcune proprietà metriche delle correlazioni. Batt. G. XXV. 20-24.

Eine parabolisch-reciproke Beziehung, bei der die unendlich ferne Ebene die ihr entsprechenden Punkte, die Centren, enthält, weist nur ein Paar von Axen auf, z und z', deren jeder nämlich die unendlich ferne Gerade der zur anderen senkrechten Ebene entspricht. z und z' sind Träger projectivisch-ähnlicher Reihen conjugirter Punkte und projectivischer Büschel conjugirter Ebenen. Nur wenn das Aehnlichkeitsverhältnis $k:k'$ der ersteren gleich 1 wird, können zwei einander entsprechende Figuren in polar-reciproke Lage hinsichtlich eines Paraboloids gebracht werden. Sind die erwähnten Ebenenbüschel congruent, so wird man entweder ein Rotationsparaboloid oder ein gleichseitiges erhalten. Im zweiten Falle können auch, indem die Axen-Punktreihen und die Ebenenbüschel zur Deckung gebracht werden, die beiden Figuren zu entsprechenden in einem Nullsystem gemacht werden. Im ersten Fall ist dies mit der ersten Figur und der symmetrischen Umbildung der zweiten der Fall.

Diese Gesetze, welche, wie Herr Segre selbst anführt, Herr Hauck etwas früher (cfr. F. d. M. XVI. 1884. 522) entwickelt hat, gestatten nun, die metrischen Relationen des Nullsystems und des Rotationsparaboloides auf solche parabolisch-reciproke Systeme zu übertragen, bei denen die Axen z und z' congruente Büschel conjugirter Ebenen tragen. Sind r, r' beliebige homologe Geraden, so ist

$$\operatorname{dist} zr \operatorname{tg} z'r' = k, \quad \operatorname{dist} z'r' \operatorname{tg} zr = k'.$$

Ist ferner l der Abstand einer Parallelen d zu z, δ' die gemeinsame Stellung der ihren Punkten entsprechenden Ebenen, so ist

$$\operatorname{dist} dr \frac{\sin z'r'}{\sin z'\delta'} = \text{const} = \sqrt{k^2+l^2},$$

wie Herr Segre ohne Beweis angiebt. E. K.

V. Martinetti. Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche di genere uno. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 264-269.

Herr M. weist nach, dass ein durch ν r_1-, r_2-, ..., r_ν-fach zählende Basispunkte festgelegtes Netz elliptischer Curven höchstens von der neunten Stufe sein kann und mit Hülfe einer

Cremona'schen Transformation aus einem nur durch Grundpunkte bestimmten Netz von Curven 3. O. oder aus dem Netz der Curven 4. O. mit zwei festen Doppelpunkten abgeleitet werden kann. Ist das Netz von höherer als der ersten Stufe, so sind die Gleichungen von einander unabhängig, welche gruppenweise ausdrücken, dass die Netzcurven die vorgeschriebenen Singularitäten besitzen. Wenige Tage früher hat übrigens, was Herr M. ausdrücklich hervorhebt, Herr Guccia dasselbe Resultat in den Palermo Rend. veröffentlicht. E. K.

V. Martinetti. Sopra una classe di sistemi lineari di curve piane algebriche. Palermo Rend. I. 202-204.

V. Martinetti. Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due. Palermo Rend. I. 305-316.

Bei jedem nur durch Basispunkte festgelegten Netz k^{ter} Stufe aus Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlecht p, die sich in D veränderlichen Punkten begegnen, ist

$$D-p-k+1+h = 0,$$

wobei h eine positive Zahl bedeutet und im einfachsten Falle gleich der Zahl der Abhängigkeiten unter den Gleichungen ist, die gruppenweise ausdrücken, dass $1, 2, 3, \ldots, \nu$ Punkte von vorbestimmter Vielfachheit für jede Netzcurve sind. Da $D+1 \geqq k$, so ist $h \leqq p$, gleich 0 für $p = 0$, aber auch (vergl. das vorige Referat) für $p = 1$, $k > 1$. Enthält ein durch andere Singularitäten bestimmtes Unternetz des gegebenen Netzes Curven vom Geschlecht $p-\delta$, so ist $h \leqq p-\delta$.

Bei einem Netz aus Curven vom Geschlecht 2 ist $D = k+1-h$. Ist das Netz von höherer als der vierten Stufe, so existiren Unternetze elliptischer Curven, und es ist $h = 0$. Herr M. sucht diejenigen Systeme zu ermitteln, bei denen $h > 0$ ist. Da beim Büschel $D = 0$, $k = 1$, $h = 2$ ist, so sind nur zwei-, drei-, und vierfache Netze zu untersuchen. Aber auch für $k = 3$, $k = 4$ ist notwendig $h = 0$, $D = k+1$. Aus einem k-fachen linearen System würde nämlich ein beliebiger Punkt ein System mit den

Charakteren $D-1$, $k-1$, h herausheben. Nun zeigt sich für $k=2$ unstatthaft die Annahme $h=2$, $D=1$, bei der Annahme $k=2$, $h=1$, $D=2$ aber ist stets ein Basispunkt von den anderen abhängig. Alle letzteren Zahlen entsprechenden Curvensysteme lassen sich nämlich mittels Cremona'scher Transformationen auf drei verschiedene Typen zurückführen. Bei zweien handelt es sich um Curven vierter Ordnung mit einem festen Doppelpunkt und 10 einfachen gemeinsamen Punkten. Bei dem einen Netz liegen sie mit 1 auf einer Curve dritter Ordnung, die von jeder 1 enthaltenden Geraden zu einer Netzcurve ergänzt wird; beim zweiten Netz liegen zwei einfache Grundpunkte mit 1 auf einer Geraden, die anderen machen mit 1 die Basis eines Büschels von Curven dritter Ordnung aus; jedes Glied derselben bildet mit der Geraden eine Netzcurve. Der letzte Typus ist der eines Netzes von Curven sechster Ordnung mit acht Doppelpunkten und zwei weiteren gemeinsamen Punkten, die mit jenen auf einer Curve dritter Ordnung liegen müssen. E. K.

B. Guccia. Sui sistemi lineari di superficie algebriche dotati di singularità base qualunque. Palermo Rend. I. 338-349.

Durch eine gegebene Basis sei ein p_0-fach lineares System von Flächen n^{ter} Ordnung bestimmt, es sei p_1 das Geschlecht der allgemeinsten Netzfläche, p_2 das der allgemeinsten Schnittlinie zweier, p_3 die Anzahl der veränderlichen Schnittpunkte dreier Flächen. Eine der Art nach fixirte, der Lage nach aber völlig willkürliche „gewöhnliche“ Basis möge nun ein Unternetz unicursaler Flächen aus dem gegebenen herausheben; die allgemeine Fläche desselben trage ferner ein Netz von Schnittlinien, in dem eine einfache Mannigfaltigkeit unicursaler oder eine mehr als einfache elliptischer Curven vorkomme. Alsdann stellt Herr Guccia für genügend grosses n die Gleichung auf

$$p_0-p_1+p_2-p_3 = 2.$$

Eine „gewöhnliche“ Basis enthält i-fache Curven, l-fache Punkte und Osculationen $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. An Complicationen wird

zugelassen, dass eine Basiscurve mehrfache Punkte besitzt, dass zwei verschiedene Basiscurven sich (in einfachen Punkten) treffen und dass ein l-facher Punkt der Basis auf einer i-fachen Curve derselben liegt.

Wenn n eine gewisse Grenze überschreitet, so können die Zahlen A_0, A_1, A_2, A_3, um die durch das Hinzutreten der Hülfsbasis p_0, p_1, p_2, p_3 sich vermindern, nach Herrn Nöther's „Postulationsformel" berechnet werden. Es ist dann

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 = 0.$$

Hiermit combinirt Herr Guccia die Formel

$$k + p - D - 1 = 0,$$

welche bei einem, entweder auf einer Ebene oder auf einer Fläche vom Geschlecht 0, durch eine Basis gegebenen Curvennetz besteht zwischen der Mächtigkeitszahl k, dem allgemeinen Geschlecht p und der Zahl der veränderlichen Schnittpunkte D; vorausgesetzt ist dabei, dass in dem Curvensystem ein Büschel unicursaler oder ein Netz elliptischer Curven vorkommt.

Eine Anwendung wird auf homaloidale Flächensysteme gemacht. E. K.

K. Doehlemann. Ueber eine synthetische Erzeugung der Cremona'schen Transformation dritter und vierter Ordnung. Schlömilch Z. XXXII. 315-320.

Zwischen den durch das Sehnensystem einer Raumcurve dritter Ordnung eindeutig auf einander bezogenen Punkten zweier beliebigen Ebenen besteht eine Cremona'sche Verwandtschaft vierter Ordnung, deren singuläre Fälle sich durch geeignete Lage der zu Grunde gelegten Ebenen ableiten lassen. In analoger Weise führt das Strahlensystem erster Ordnung zweiter Klasse zur rationalen kubischen Verwandtschaft. Js.

A. Brambilla. Le omografie che mutano in sè stesse una curva gobba razionale del quarto ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 780-797.

Bekanntlich giebt es drei geschart-involutorische Systeme, in

denen die allgemeine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species C_2^4 sich selbst entspricht. Geht sie in die harmonische C_2^4 über, so treten, wie der Verfasser analytisch beweist, zu diesen involutorischen Systemen vier andere und zwar zwei harmonische und zwei cyklische, geht sie in die äquianharmonische über, acht cyklische von gleicher Eigenschaft. Js.

K. Bobek. Ueber Raumcurven m^{ter} Ordnung mit $(m-2)$-fachen Secanten. Wien. Ber. XCV. 349-354.

Eine Raumcurve R_m^p von der Ordnung m und dem Geschlechte p hat, wenn $p > m-3$, keine $(m-2)$-fache Secante. Sie kann mehr als eine $(m-2)$-fache Secante nur besitzen für $p = m-3, 1, 0$. Ist $p = m-3$ und besitzt R_m^p eine $(m-2)$-fache Secante, so liegt R_m^p auf einer windschiefen Fläche zweiter Ordnung und hat die sämtlichen erzeugenden Geraden der einen Schar zu $(m-2)$-fachen Secanten. Giebt es nur zwei $(m-2)$-fache Secanten, so ist p entweder 0 oder 1, und zwar 0 dann und nur dann, falls eine Bisecante existirt, welche die beiden $(m-2)$-fachen Secanten schneidet, und 1, falls keine solche Bisecante existirt. Umgekehrt kann R_m^0 und R_m^1 (vorausgesetzt nur, dass $m > 6$) nicht mehr als zwei $(m-2)$-fache Secanten haben.

Eine Raumcurve R_m^p mit einer $(m-2)$-fachen Secante liegt auf einer windschiefen Fläche der Ordnung $m-p-1$ und ist eine hyperelliptische Curve. Wenn R_m^p hyperelliptisch ist, so muss $p < m-2$ sein und R_m^p auf einer windschiefen Fläche der Ordnung $m-p-1$ liegen. F.

G. Humbert. Sur le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes. C. R. CV. 54-55.

Nach einem Satze des Herrn Laguerre hat jede Gruppe von einem Punkte ausgehender Tangenten einer Curve n^{ter} Klasse dieselbe „Orientation“ wie die Gruppe der Strahlen, welche ihn mit den reellen Brennpunkten der Curve verbinden. Die Orien-

tation einer Gruppe ist aber die Summe von Winkeln, welche die Strahlen mit irgend einer festen Richtung einschliessen, wobei Vielfache von 2π willkürlich zugefügt werden können. Herr H. spricht ohne (übrigens leicht zu führenden) Beweis aus, dass alle Curven einer Schar (faisceau tangentiel) an einem reellen Brennpunkt einer von ihnen Tangentengruppen von gleicher Orientation bestimmen. Die Combination beider Sätze ergiebt, dass die Gruppen reeller Brennpunkte der Scharcurven an irgend einem Punkte der Brennpunktscurve Strahlengruppen von gleicher Orientation bestimmen. Gewisse auch von Herrn Darboux betrachtete Curven lassen sich auf unendlich viele Weisen mittels der metrischen Relation

$$PR_1 . PR_2 \dots PR_n = C . PR'_1 . PR'_2 \dots PR'_n$$

definiren. Irgend drei Polgruppen R_1, R_2, R_3, ..., R_n können als Gruppen reeller Brennpunkte von drei Curven n^{ter} Klasse betrachtet werden, die derselben Schar angehören. E. K.

H. Brunn. Ueber Ovale und Eiflächen. Diss. München.

Eine ganz im Endlichen liegende Curve bez. Fläche, die mit jeder in das Innere eintretenden Geraden genau zwei Punkte gemein hat, heisst ein Oval bez. eine Eifläche (Abschnitt I). Das Auftreten von Ecken, Geraden und Ebenen-Stücken ist damit nicht ausgeschlossen. Das Bestehen eines Krümmungsmasses an allen Stellen der betrachteten Ovale wird im II. Abschnitt vorausgesetzt. Wenn man den Drehungssinn für die Messung des Contingenzwinkels beliebig und die Richtung, in der das Oval zu durchlaufen ist, richtig wählt, so wird das Krümmungsmass überall positiv sein. Das Zahlengebiet, innerhalb dessen sich dann das Krümmungsmass in den einzelnen Ovalpunkten bewegt, heisst das Krümmungsgebiet. Die Zahlen 0 oder unendlich umfasst dasselbe, wenn das Oval gerade Strecken oder Ecken besitzt. Bei einer Eifläche umfasst das Krümmungsgebiet einer Stelle alle Krümmungsmasse, welche bei den Normalschnitten an der betreffenden Stelle auftreten können. Das Krümmungsgebiet der Eifläche umfasst die Krümmungsgebiete

aller Punkte der Eifläche. Da der Meusnier'sche Satz vorausgesetzt wird, so reicht das Krümmungsgebiet eines ebenen Schnittes nicht unter das der Eifläche herab.

Herr Brunn spricht von angrenzenden Krümmungsgebieten, wenn das grösste Krümmungsmass des einen Gebietes zugleich das kleinste des andern ist; er nennt ein Krümmungsgebiet höher als ein anderes, wenn sein kleinstes Krümmungsmass das grösste des anderen übertrifft. Dies vorausgesetzt, gilt der Satz, dass ein Oval mit einem anderen von getrenntem Krümmungsgebiet höchstens zwei Punkte, mit einem von angrenzendem Krümmungsgebiet höchstens einen Kreisbogen mit dem gemeinsamen Krümmungsmass gemein haben kann (No. 15). In ein Oval mit niedrigerem Krümmungsgebiet kann es ganz hineingebracht werden und dann um mindestens einen Punkt beliebig gedreht werden, ohne dass es das äussere Oval verlässt (No. 19).

Entsprechend ergiebt sich, dass jede Eifläche ganz in eine andere von niedrigerem Krümmungsgebiet hineingebracht werden kann. Eiflächen getrennter Krümmungsgebiete können sich nur in einer geschlossenen Curve ohne Doppelpunkte begegnen (No. 4 bezw. 34).

Im III. Abschnitt wird die Beschränkung wegen des Krümmungsmasses wieder fallen gelassen. Sehr leicht ergiebt sich, dass bei einer Schar paralleler Sehnen eines Ovals nur ein Maximum der Länge existirt, verwirklicht bei mehr als einer und dann bei unendlich vielen Sehnen nur, wenn Stücke von zwei parallelen Geraden im Oval vorkommen. Eines wirklichen Beweises aber bedarf der Satz No. 5, nach dem bei einer Schar paralleler ebener Schnitte einer Eifläche nur ein Minimum des Inhalts vorkommen kann, verwirklicht entweder an einem Schnitt oder an einer Schar congruenter Schnitte, die einer zur Eifläche gehörigen Cylinderfläche entstammen. Schneiden nämlich zwei parallele Ebenen flächengleiche, aber nicht congruente und ähnlich liegende Ovale aus, so schneidet jede zwischen beiden liegende parallele Ebene ein Oval von grösserem Inhalt aus.

Bei dem entsprechenden Satz über die Umfänge von Parallelschnitten fusst Herr Brunn darauf, dass jedes Oval kleineren

Umfang haben muss als ein dasselbe umschliessendes. Ferner benutzt er eine besondere Eifläche 𝔒. Zur Umgrenzung von 𝔒 gehören zwei Ovale von gleichem Umfang in parallelen Ebenen und der zwischen ihren Ebenen liegende Teil 𝔐 der abwickelbaren Fläche 𝔇, deren erzeugende Ebenen beide Ovale berühren, ohne sie zu trennen. Dass wirklich so eine Eifläche entsteht, wäre wohl ausführlicher darzuthun gewesen. Alle Schnitte der Eifläche, deren Ebenen zu denen der begrenzenden Ovale parallel sind, haben denselben Umfang, wie diese. Da die Eifläche völlig innerhalb jeder anderen liegt, die ihre Endflächen zu Schnitten hat, so kann Herr B. folgern, dass bei jeder Schar von Parallelschnitten einer Eifläche nur ein Maximum des Umfanges vorkommen kann. Ist es aber an unendlich vielen Schnitten verwirklicht, so brauchen diese nur Schnitte einer Fläche 𝔐, nicht einer Cylinderfläche zu sein, wie Herr B. behauptet (No. 13.).

Sind die beiden Begrenzungen der Eifläche 𝔒 congruent, aber nicht ähnlich gelegen, so haben die von parallelen Ebenen ausgeschnittenen Ovale grösseren Inhalt und gleichen Umfang, und es lässt sich hieraus schliessen, dass nur beim Kreise der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Minimum sein kann. Im Anschluss hieran macht Herr B. auf einige kleinere Ungenauigkeiten in Steiner's zweiter Abhandlung zur Isoperimetrie aufmerksam. In No. 27 beweist Herr B., dass in einem Oval ohne geradlinige Strecke, welches einen Mittelpunkt besitzt, jeder andere Punkt nur eine Sehne halbiren kann. In den folgenden Nummern sucht er zu zeigen, dass in einer Eifläche mit Mittelpunkt ohne geradlinige Strecken jede Sehne nur einen durch sie gehenden Schnitt der Eifläche halbirt. E. K.

A. Mouchot. Propriétés descriptives, segmentaires et métriques de la ligne droite de mode quelconque. C. R. CIV. 1053-1055.

Ueber Herrn Mouchot's Entwickelungen, welche die coordinatenmässige Bestimmung auch der nichtreellen Geraden in der reellen Ebene betreffen, lässt sich im Auszuge nicht wohl berichten. E. K.

R. Mehmke. Ueber die Krümmung algebraischer Curven und Flächen in Bezug auf deren Hessianen. Böklen Mitt. II. 101-102.

Der Verfasser giebt folgende metrische Relationen:

1) Sind ϱ_a und ϱ_b die Krümmungshalbmesser in zwei beliebigen Punkten a und b einer ebenen algebraischen Curve, c der Schnittpunkt der in a und b gelegten Tangenten, d_1, d_2, ... die weiteren Schnittpunkte der Sehne ab mit der Curve und endlich e_1, e_2, ... die Schnittpunkte jener Sehne mit der Hessiana der Curve, so ist

$$\frac{\varrho_a}{\varrho_b} = \left(\frac{ac}{bc} \cdot \frac{ad_1 . ad_2 \ldots}{bd_1 . bd_2 \ldots}\right)^3 \cdot \frac{be_1 . be_2 \ldots}{ae_1 . ae_2 \ldots}.$$

Für Kegelschnitte sind weder Punkte d noch e vorhanden, daher ist für diese $\frac{\varrho_a}{\varrho_b} = \left(\frac{ac}{bc}\right)^3$.

2) Sind K_a und K_b die Gaussischen Krümmungsmasse in zwei beliebigen Punkten einer algebraischen Fläche, C die Schnittkante der in a und b an die Fläche gelegten Tangentialebenen, d_1, d_2, ... die weiteren Schnittpunkte der Sehne ab mit der Fläche, e_1, e_2, ... aber die Schnittpunkte jener Sehne mit der Hessiana der Fläche, so gilt, wenn aC und bC die Abstände der Punkte a und b von der Kante C bedeuten, die Relation

$$\frac{K_a}{K_b} = \left(\frac{aC}{bC} \cdot \frac{ad_1 . ad_2 \ldots}{bd_1 . bd_2 \ldots}\right)^4 \cdot \frac{be_1 . be_2 \ldots}{ae_1 . ae_2 \ldots}.$$

Für eine Fläche zweiter Ordnung ist deshalb $\frac{K_a}{K_b} = \left(\frac{aC}{bC}\right)^4$.

Schn.

B. Besondere ebene Gebilde.

R. Heger. Einführung in die Geometrie der Kegelschnitte. Breslau. Trewendt. 61 S. 8°.

Dieses zum Gebrauche für höhere Lehranstalten bestimmte Buch ist sehr empfehlenswert. Die Eigenschaften der Kegel-

schnitte werden in eleganter Weise aus ihrer sie als ebene Schnitte eines Rotationskegels auffassenden Definition entwickelt. Die hinzugefügten Uebungen enthalten sehr anregende Lehrsätze und Aufgaben. Scht.

W. ERLER. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Dritte Auflage. Leipzig. Teubner.

Dieses für die Prima höherer Lehranstalten bestimmte, hier in dritter Auflage erscheinende, brauchbare Buch ist schon früher (F. d. M. IX. 1877. 426) von uns besprochen. Ausser kleinen Verbesserungen und Vereinfachungen sind auch einige neue Aufgaben hinzugefügt, die an die Stelle von solchen traten, die sich als überbestimmt erwiesen. Scht.

J. STEINER. Vorlesungen über synthetische Geometrie. 1. Tl. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von C. F. GEISER. 3. Auflage. (VIII u. 208 S.). Leipzig. Teubner.

H. SCHROETER. Das Clebsch'sche Sechseck. Math. Ann. XXVIII. 457-482.

Die Arbeit beschäftigt sich damit, in dem Operationsfelde der Ebene und auf synthetisch-geometrischem Wege die Construction und die Eigenschaften eines merkwürdigen ebenen Sechsecks herzuleiten, auf welches zuerst Clebsch (Math. Annalen IV. 336) aufmerksam gemacht hat.

Sind 1, 2, 3, 4 beliebige Punkte einer Ebene, so lassen sich durch elementare Construction stets zwei Punkte 5, 6 in derselben Ebene so bestimmen, dass gleichzeitig die Perspectivitäten erfüllt werden:

$$\frac{123}{456}\qquad\frac{123}{654}\qquad\frac{123}{546}\qquad\frac{123}{465}\qquad\frac{124}{536}$$
$$\text{I}\qquad\text{II}\qquad\text{III}\qquad\text{IV}\qquad\text{V},$$

wo

$$|14|, \quad |25|, \quad |36| \text{ sich in I,}$$
$$|16|, \quad |25|, \quad |34| \text{ sich in II schneiden etc.}$$

Sechs so bestimmte Punkte bilden ein Clebsch'sches Sechseck. Aus den angegebenen fünf Perspectivitäten folgen von selbst 35 andere und zwar derart, dass der Satz gilt: „Wenn man aus den sechs Ecken eines Clebsch'schen Sechsecks irgendwie zwei Dreiecke mit verschiedenen Ecken (ein Paar complementäre Dreiecke) bildet, was auf 10 Arten geschehen kann, so liegen dieselben allemal auf vierfache Weise perspectiv, d. h. sie befinden sich in der möglichst grössten Anzahl von gleichzeitig perspectiver Lage zweier reellen Dreiecke. Es treten dabei nur zehn verschiedene Perspectivitätscentra auf, indem für vier verschiedene Dreieckspaare immer ein und dasselbe Perspectivitätscentrum sich ergiebt." Das Clebsch'sche Sechseck kann auch als eine Figur von sechs Punkten der Ebene in der eigentümlichen Lage aufgefasst werden, dass von den 60 einfachen Sechsecken, welche im allgemeinen aus sechs Punkten sich bilden lassen, 40 Brianchon'sche Sechsseite sind, die übrigen 20 nicht. Während ein Sechseck im allgemeinen 45 Diagonalpunkte (Schnittpunkte der Seiten ausser den sechs Ecken) hat, besitzt das Clebsch'sche Sechseck nur 25 verschiedene, indem in jedem der 10 Perspectivitätscentra drei Diagonalpunkte vereinigt sind. Rein geometrische Betrachtungen liefern sowohl für die 10 Perspectivitätscentra als auch für die übrigen 15 Diagonalpunkte eine Reihe interessanter Lagenbeziehungen. Insbesondere ergiebt sich, dass jeder der letzteren 15 Punkte der Pol einer bestimmten Seite des vollständigen Clebsch'schen Sechsecks in einem und demselben Polarsystem ist, und dass die 15 Seiten des Sechsecks sich zu je dreien als die Seiten von fünf selbstconjugirten Dreiecken dieses Polarsystems zusammenstellen lassen. Die fünf Ecken eines regulären Fünfecks und der Mittelpunkt desselben bilden ein specielles Clebsch'sches Sechseck; das mit diesem in Verbindung stehende Polarsystem ist ein elliptisches. Da das allgemeine Clebsch'sche Sechseck durch collineare Umformung aus

dem speciellen hervorgeht, so ist auch das bei ersterem auftretende Polarsystem immer ein elliptisches. F.

Sporer. Einiges über gewisse Kreissysteme. Böklen Mitt. II. 107-111.

Legt man durch zwei aufeinanderfolgende Ecken eines einem Kreise einbeschriebenen $2n$-Ecks einen Kreis, so erhält man durch die zweiten Schnittpunkte je zweier benachbarten Kreise ein neues $2n$-Eck. Wenn von den Ecken des letzteren $2n-1$ auf einem Kreise liegen, so muss auch die letzte Ecke auf demselben Kreise liegen, und die Verbindungslinien je zweier aufeinanderfolgenden Mittelpunkte der $2n$ Kreise umhüllen einen Kegelschnitt, der das Centrum des Fundamentalkreises und des schliesslich erzeugten Kreises zu Brennpunkten hat. Dieser Satz und einige auf denselben Gegenstand bezügliche Sätze werden bewiesen. Scbt.

Onstkin. Behandlung und Erweiterung der von Steiner (J. für Math. XLV. 177) mitgeteilten Sätze. Pr. R.-Gymn. Aachen.

Bezeichnet man bleibend mit a', b', c' die Schnittpunkte der Geraden pa, pb, pc mit den Seiten bc, ca, ab eines Dreieckes, so waltet die Relation $pa.pb.pc = pa'.pb'.pc'$ nach dem ersten der Lehrsätze für Punkte der Ellipse ob, die dem gegebenen Dreieck umschrieben ist und seinen Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat. Aus der Aehnlichkeit von Dreiecken leitet Herr O. ab, dass Parallelen, welche durch a' und c' bezw. zu ab und bc gezogen werden, sich auf pb schneiden, wenn die obige Relation gilt. Die hieraus fliessende projectivische Erzeugung ergiebt, dass die Tangenten des Ortes in a, b, c zu den gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Da also jede Mittelpunktstransversale die Sehnen halbirt, die zu der entsprechenden Dreiecksseite parallel sind, so handelt es sich um eine Ellipse mit dem Schwerpunkt als Mittelpunkt.

Der zweite Satz bezeichnet als ähnlich und ähnlich gelegen zwei Kegelschnitte C^2 und C_1^2, von denen der zweite in den

Ecken a, b, c drei Gerade berührt, deren Schnittpunkte a'', b'', c'' mit bc, ca, ab auf einer Geraden liegen und eindeutig dem Punkt p zugewiesen werden kann, dessen Harmonikale die letztere Gerade ist.

$$[(b\,c\,a'\,a'') = (c\,a\,b'\,b'') = (a\,b\,c'\,c'') = -1].$$

Der erste Kegelschnitt enthält die 3.2 Endpunkte der Sehnen, die durch zwei Dreiecksseiten begrenzt und durch p halbirt werden. C_1^2 und C^2 sind Kreise für einen Punkt, gleichseitige Hyperbeln für die Punkte der Harmonikale des Höhenschnittpunktes, Parabeln bezw. Paare von Parallelen für die Punkte der Ellipse, welche die Dreiecksseiten in ihren Mittelpunkten berührt.

Zwischen dem Netz der C_1^2, deren Existenz Herr O. noch besonders nachweist, und der Ebene der p besteht eine collineare Beziehung in der Art, dass alle d enthaltenden Kegelschnitte zu Punkten der Harmonikale $\mathfrak{D}$ dieses Punktes gehören. Wird d über die Harmonikale G von g geführt, so umhüllt $\mathfrak{D}$ den Kegelschnitt, welcher bc, ca, ab in ihren Schnittpunkten mit ag, bg, cg berührt. C_1^2 ist also Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem das betreffende p ausserhalb, auf der Peripherie, oder innerhalb der Ellipse liegt, welche die Seiten des Dreiecks in ihren Mittelpunkten berührt. Dass alle gleichseitigen Hyperbeln C_1^2 den Höhenschnittpunkt enthalten und Punkten seiner Harmonikale entsprechen, brauchte wohl nicht mehr bewiesen zu werden. Die Constructionen, welche Herr O. an den Zusammenhang knüpft, zeichnen sich nicht durch Einfachheit aus.

Die Endpunkte der drei durch p halbirten und von ca, ab; ab, bc; bc, ca begrenzten Sehnen ergeben ein Sechseck, dessen Seiten paarweise zu bc, ca, ab parallel sind, und liegen daher auf einem Kegelschnitte C^2. C^2 und C_1^2 sind und liegen ähnlich, weil die gegebenen drei Durchmesser von C^2 zu den Tangenten von C_1^2 in a, b, c resp. parallel sind. E. K.

Fritz Hofmann. Zwei geometrische Beweise eines Satzes von Hesse. J. für Math. CII. 175-184.

Es handelt sich um den Lehrsatz: Bestehen in einem Vierecke zwei Paare gegenüberliegender Seiten aus conjugirten Strahlen hinsichtlich eines Kegelschnittes K, so sind auch die beiden anderen Seiten zu einander conjugirt. Der eine Beweis beruht auf dem Hülfssatze, dass die Paare conjugirter Strahlen, die von A und B ausgehen, auf einem Kegelschnitte M sich kreuzen, der hinsichtlich AB denselben Pol hat wie K; er enthält auch die Berührungspunkte der von A und B an K gelegten Tangenten. Der andere Beweis beruht darauf, dass die Kantenpaare eines Poltetraeders einer Fläche zweiter Ordnung von irgend einem Punkte P aus in die Paare gegenüberliegender Seiten eines Vierecks projicirt werden. Ist die Ebene die Polarebene π von P, so sind je zwei gegenüberliegende Seiten hinsichtlich des Kegelschnittes conjugirt, den π mit der Fläche gemein hat. Der Nachweis, dass die Figur aus dem gegebenen Kegelschnitt und seinem Viereck auf die bezeichnete Art entsteht, wird am Falle des unendlich fernen Kugelkreises und einer Kugel mit dem (willkürlich zu wählenden) Centrum P bewiesen. E. K.

V. Jerábek. Ueber die Hyperbel als Umhüllungscurve. Cas. XVI. 164. (Böhmisch.)

Liefert einen elementaren Beweis des bekannten Satzes, dass eine bewegliche Gerade AB, welche mit zwei festen Geraden OX und OY ein Dreieck von constantem Inhalte einschliesst, eine Hyperbel umhüllt, welche AB in der Mitte tangirt. Std.

R. H. Graves. Solution of an exercise. Annals of Math. III. 90.

Es wird die Construction angegeben, durch welche ein gleichseitiges Dreieck von gegebener Grösse einer gegebenen gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben werden kann. Schn.

H. Seipp. Ueber Construction von Hyperbeln. Hoppe. Arch. (2) V. 172-177.

Folgende Hyperbelconstruction aus den Asymptoten und einem Curvenpunkt P wird analytisch-geometrisch bewiesen: Verbinde P mit dem Asymptotenschnittpunkt A, verlängere PA um sich selbst nach O, lege durch O Parallelen zu beiden Asymptoten, ziehe durch P Strahlen und halbire deren von jenen Parallelen begrenzte Strecken, so ist der Ort der Halbirungspunkte die geforderte Hyperbel. Hk.

H. Brocard. Propriétés d'un groupe de trois paraboles. Mathesis. Suppl. III. 8 S. u. 1 Taf.

Aus den Mémoires de l'Académie de Montpellier, section des sciences, 1886. Die Ebene eines Dreiecks enthält bekanntlich zwei Gruppen von je drei Parabeln, welche merkwürdige Eigenschaften besitzen. 1) Die erste Gruppe wird von den Parabeln gebildet, welche je zwei Seiten des Dreiecks in den Endpunkten der dritten berühren. 2) Die zweite Gruppe wird von den Parabeln gebildet, welche die beiden Winkelhalbirenden eines Winkels und die beiden Mittelsenkrechten zu den Schenkeln dieses Winkels berühren. Hr. Brocard untersucht die Eigenschaften einer dritten, der vorangehenden entsprechend gebildeten Gruppe; dieselbe wird von den Parabeln gebildet, welche die beiden Winkelhalbirenden eines Winkels und die zu den Schenkeln des Winkels gehörigen Höhen des Dreiecks berühren.

Mn. (Lp.)

Jos. Novotny. Beitrag zur Construction von Kegelschnitten und deren Tangenten. Cas. XVI. 209. (Böhmisch.)

Betrifft der Reihe nach die Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Std.

L. Klug. Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts entsprechenden Punkte im collinearen Systeme. Hoppe Arch. (2) VI. 88-92.

Es werden die zwei Aufgaben gelöst: 1) Diejenigen Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts zu construiren, welche den

Brennpunkten eines demselben centrisch-collinearen oder affinen Kegelschnittes entsprechen. 2) Ein ebenes Projectionssystem so zu bestimmen, dass zwei innerhalb eines Kegelschnittes gegebene Punkte sich als Brennpunkte des collinearen Kegelschnittes projiciren. Hk.

E. Reusch. Ueber die Bewegung einer unbegrenzten Geraden in der Ebene mit Anwendungen auf die Kegelschnitte. Böklen Mitt. I_2. 9-18.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über die Führung einer unbegrenzten Geraden giebt der Verfasser Constructionen für die Krümmungsmittelpunkte von Kegelschnitten. Schn.

Fr. Machovec. Ueber eine Eigenschaft der Poldreiecke eines Kegelschnittes, welche einem anderen Kegelschnitte eingeschrieben sind. Casop. XVI. 85. (Böhmisch.)

Einer Curve zweiter Ordnung K_2, welche einem Poldreieck einer anderen Curve zweiter Ordnung C_2 umgeschrieben ist, können, wie bekannt, unendlich viele Poldreiecke von C_2 eingeschrieben werden. Der Verfasser beweist nun, dass die Geraden, welche zu den Seiten dieser Dreiecke bezüglich C_2 und zugleich bezüglich einer anderen Curve zweiter Ordnung C'_2, welche mit C_2 eins von jenen Poldreiecken zum gemeinschaftlichen Poldreiecke hat, conjugirt sind, durch einen Punkt von K_2 gehen.

Wählt man anstatt einer beliebigen Curve C'_2 die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte der Ebene, so folgt aus jener Eigenschaft der Satz: Die Höhen aller Poldreiecke einer C_2, welche einer durch den Mittelpunkt und die unendlich entfernten Punkte der Axen von C_2 gehenden Hyperbel K_2 eingeschrieben sind, schneiden sich in einem Punkte von K_2. Es ist das derselbe Punkt, durch welchen auch die Normalen von C_2 in ihren gemeinschaftlichen Punkten mit K_2 gehen. Std.

C. Pietrocola. Sopra alcune proprietà di due triangoli reciproci rispetto ad una conica. Batt. G. XXV. 183-197.

ABC und *A'B'C'* seien zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt φ reciproke Dreiecke. Eine beliebige Gerade g schneidet die Seiten beider in 2.3 Punkten. Ordnet man je zwei auf entsprechenden Seiten liegende Punkte einander zu, so ist damit die projectivische Beziehung zwischen zwei dem Träger g angehörenden Punktreihen festgelegt. Die beiden Doppelpunkte E, F derselben und der Pol P der Geraden g bilden in Bezug auf φ ein Polardreieck. Bezeichnet S das Centrum der Homologie, so liegen *ABCSEFG* auf einem Kegelschnitt, *A'B'C'SEFG* auf einem andern. Eine Reihe weiterer Resultate wird für besondere Lagen der reciproken Dreiecke und des Punktes G hergeleitet. Ausser den beiden imaginären Kreispunkten giebt es vier Punkte G derart, dass die beiden Büschel $G(ABC\ldots)$ und $G(A'B'C'\ldots)$ projectivisch gleich sind. Dieselben liegen (im Falle, dass φ Ellipse oder Hyperbel ist) auf dem Kreise, welcher der geometrische Ort für den Schnittpunkt zweier aufeinander senkrechten Tangenten des Kegelschnitts φ ist. Verschiedene Eigenschaften dieses Kreises werden angegeben. Zum Schluss wird die hinreichende und notwendige Bedingung dafür aufgestellt, dass φ Parabel ist, und es werden für diesen Fall die vorher abgeleiteten Resultate modificirt. F.

A. Droz. Solution géométrique de la question 1526. Nouv. Ann. (3) VI. 580-581.

Die Ecken eines Parallelogramms *ABCD* bestimmen einen Kegelschnittbüschel, welcher eine feste Gerade *MM'* in den Punkten einer Involution schneidet. Die (reellen oder imaginären) Doppelpunkte sind die Berührungspunkte zweier Individuen des Büschels auf *MM'*, die stets reelle Mitte O zwischen diesen beiden Punkten ist der Mittelpunkt der Involution und fällt mit dem Punkte O' zusammen, in welchem ein dem Parallelogramm eingeschriebener Kegelschnitt *MM'* berührt. Lg.

KELLER. Orthogonal-conjugirte Scharen monoconfocaler Kegelschnitte. Wolf Z. XXXII. 33-79.

Nachdem der Verfasser den Inhalt seiner auf denselben Gegenstand bezüglichen, in Wolf Z. XXVII. enthaltenen Arbeit recapitulirt hat, behandelt er zunächst die Aufgaben, welche sich auf zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt beziehen, z. B. die Aufgabe, die gemeinsamen Tangenten von zwei solchen Kegelschnitten zu finden. Dann wird das System der monoconfocalen Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Tangenten behandelt, und u. a. folgendes gefunden: Unter der Schar monoconfocaler Kegelschnitte, welche zwei reelle Strahlen g_1 und g_2 berühren, befinden sich eine Ellipse und eine Hyperbel, denen extreme Werte der Axenverhältnisse zukommen. Die Leitlinien dieser beiden ausgezeichneten Kegelschnitte sind den Halbirungslinien von g_1 und g_2 parallel. Der Ausgangspunkt und die Methode der Beweisführung ist stereometrisch, bezw. darstellend geometrisch. Scht.

F. MORLEY. Some properties of confocal conics and a derived cubic. Mess. (2) XVI. 181-185.

Einer der ersten Sätze in der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte besagt, dass, wenn von einem Punkte O die Tangenten OP, OP_1 an einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten S, S_1 gezogen werden, OS nebst OS_1 von P und P_1 aus und OP nebst OP_1 von S und S_1 aus unter gleichen oder supplementaren Winkeln erscheinen. Der Verfasser beweist, dass, wenn man OS und OS_1 als Tangenten eines unendlich schmalen Kegelschnitts SS_1 ansieht, dieselben Eigenschaften zwei beliebigen confocalen Kegelschnitten angehören, und hierauf gründet er eine elementare Besprechung einer besonderen circularen kubischen Curve. Glr. (Lp.)

H. DALLAS THOMPSON. A note on pencils of conics. American J. IX. 185-188.

Teilt man die acht Schnittpunkte eines Kegelschnitts und

einer Curve vierter Ordnung in zwei Gruppen zu je vier Punkten, und legt durch jede solche Gruppe einen Kegelschnitt, so treffen diese beiden letzten Kegelschnitte die Curve vierter Ordnung zusammen noch in weiteren acht Punkten, die auf einem Kegelschnitt liegen. Aus diesem bekannten Satze werden durch Specialisirung mehrere Sätze, die sich auf Büschel von Kegelschnitten beziehen, erhalten. So z. B. folgender Satz:

Haben irgend zwei Kegelschnitte doppelte Berührung mit einem dritten, dann treffen irgend zwei Kegelschnitte, von denen jeder durch die vier Berührungspunkte geht, die beiden erstgenannten Kegelschnitte in acht Punkten eines Kegelschnitts. In dieser Weise folgen mehrere Sätze. Mz.

P. H. Schoute. Sur les normales d'angle α. Mathesis VII. 38-41.

Normalen unter dem Winkel α nennt Herr Schoute die Geraden, welche eine gegebene Ellipse in einem festgesetzten Sinne unter diesem Winkel α schneiden. Geometrischer Beweis ihrer Eigenschaften, besonders der folgenden: Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen vier von diesen Normalen; die Fusspunkte von dreien dieser Normalen und der dem Fusspunkte der vierten diametral gegenüberliegende liegen auf einer Kreislinie, und umgekehrt. (Verallgemeinerung des Joachimsthal'schen Satzes.) [Man vergleiche übrigens die viel weiter gehenden Untersuchungen des Herrn A. del Re über dasselbe Thema in Batt. G. XXII. 75-117, F. d. M. XVI. 1884. 557ff. Red.]

Mn. (Lp.)

G. Fazzari. Alcune teoremi di massimi e minimi relativi alle coniche. Batt. G. XXV. 305-307.

Diese Sätze sind: Von allen Ellipsen, welche einem Dreieck umgeschrieben, conjugirt oder eingeschrieben sind, haben diejenigen, deren Centra im Schwerpunkte des Dreiecks liegen, den grössten, im letzten Falle den kleinsten Flächeninhalt. Der

Inhalt ist im ersten Falle doppelt so gross als im zweiten, im zweiten doppelt so gross als im dritten. Betrachtet man die Ellipse als fest, das Dreieck als variabel, so ist unter derselben Bedingung auch das Dreieck resp. Maximum und Minimum, und die Inhaltsverhältnisse sind die obigen. H.

V. RETALI. Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione imaginaria delle curve del second' ordine. Bologna Mem. (4) VII. 601-637.

Das Referat erfolgt im nächsten Jahrgange. E. K.

A. S. HART. Note on a system of cubic curves. Quart. J. XXII. 199.

Um den letzten Schnittpunkt 9 der 1, 2, 3, ..., 8 enthaltenden ebenen C^3 zu finden, nimmt Herr H. die inversen Punkte 4′, 5′, 6′, ..., 8′ zu 4, 5, 6, ..., 8 hinsichtlich des Dreiecks 123. Alsdann gelten 5 Beziehungen wie

$$4'(5'6'7'8') \overline{\wedge}\, 9(5678);$$

aus zweien von ihnen ist 9 zu construiren. Da die Coordinaten von a' zu den reciproken Werten derer von a proportional sind, so hängt die Natur der angewandten Transformation noch von der Wahl des Einheitspunktes ab. E. K.

FR. MACHOVEC. Ueber die Curven dritter Ordnung, welche durch die Ecken und die Diagonalecken eines vollständigen Viereckes gehen. Casop. XVI. 113. (Böhmisch.)

Einige Eigenschaften dieser Curven hat P. E. Eckhardt im Bd. XIII des Schlömilch'schen Journals analytisch entwickelt. Der Verfasser leitet diese Eigenschaften synthetisch ab und beweist zugleich, dass jene Curven ganz allgemeine und nicht specielle Curven dritter Ordnung sind, wofür sie Eckhardt irrtümlich hält. Std.

E. Czuber. Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen. Schlömilch Z. XXXII. 257-286.

Die im Titel genannten Curven sind früher schon von Casey, Siebeck, Eckhardt, Schröter, Durège, Pelz, Küpper, Hermes und Schoute von verschiedenen Gesichtspunkten aus und mit verschiedenen Zielen behandelt. Hier werden diese Curven von einem Gesichtspunkte behandelt, der zur Erkennung ihrer Eigenschaften und ihrer besondern Formen, z. B. Cartesische Curve, Cissoide, sich als besonders geeignet erweist. Sie werden nämlich als stereographische Projectionen der sphärischen Curve vierter Ordnung aufgefasst. Wenn man nämlich eine einer Kugelfläche aufgezeichnete Curve vierter Ordnung stereographisch projicirt, so entsteht entweder eine Curve vierter Ordnung, welche die unendlich fernen Kreispunkte zu Doppelpunkten hat (bicirculare Curve), oder eine Curve dritter Ordnung, welche diese Kreispunkte einfach enthält (circulare Curve), je nachdem das Projectionscentrum ausserhalb oder auf der als Ausgangspunkt dienenden sphärischen Curve vierter Ordnung liegt.

Scht.

J. Cardinaal. Zur geometrischen Theorie der ebenen Curve vierter Ordnung. J. für Math. CII. 160-174.

Diejenigen ebenen Curven vierter Ordnung, deren Geschlecht Null oder Eins ist, können nicht allein durch zwei projective Kegelschnittbüschel (Reye) erzeugt werden, sondern auch durch Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art (Fiedler) erhalten werden. Hier werden nun aus der ersten Erzeugungsweise einige Eigenschaften und Constructionen, z. B. bei drei Doppelpunkten aus diesen und fünf anderen Punkten, abgeleitet, um so auf dem Wege der Construction zu der zweiten Entstehungsweise und den daraus folgenden Constructionen zu gelangen.

Scht.

C. F. E. Björling. Construction mittels Lineals und Cirkels der Curven vierter Ordnung vom Geschlechte 2. Stockh. Öfv. 19-24.

Die Curve, von welcher der Doppelpunkt δ und elf andere Punkte gegeben sind, wird von einem Strahlenbüschel und einem mit ihm projectivischen Büschel von Curven dritter Ordnung erzeugt. Zu Basispunkten dieses letzteren werden δ und 6 von den elf Punkten genommen, und es entsteht dann die Aufgabe, den achten Basispunkt x (und damit auch den neunten x') so zu wählen, dass die fünf Individuen des C^3-Büschels, die von den fünf übrigen gegebenen Punkten bestimmt werden, den fünf durch dieselben Punkte gehenden Strahlen des ersten Büschels projectivisch entsprechen.

Diese Punkte x, x' liegen auf zwei C^6, von welchen jede die sieben angenommenen Basispunkte zu Doppelpunkten hat und durch vier übrige Punkte nebst einem anharmonischen Verhältnisse bestimmt ist. Die Construction wird durch eine (1, 2)-deutige Ebenen-Transformation bewerkstelligt. Bg.

J. de Vries. Over vlakke kromme lijnen van de vierde orde met twee dubbelpunten. Nieuw Arch. XIV. 193-200.

Auf synthetischem Wege werden die Eigenschaften von ebenen Curven der vierten Ordnung mit zwei Doppelpunkten aufgesucht. Den Ausgangspunkt bilden die Untersuchungen des Herrn Weyr über denselben Gegenstand. Nach Vollendung seiner Arbeit fand der Verfasser, dass seine Resultate bereits in der Abhandlung des Hrn. A. Ameseder: Ueber Configurationen und Polygone auf biquadratischen Curven (Wien. Ber. XCIII, s. F. d. M. XVIII. 1886. 570) enthalten waren. G.

M. Lazarski. Ueber die Construction und die Eigenschaften der Curven vierter Ordnung mit dreifachem Punkte. Krak. Ber. XV. (Polnisch.)

Systematische Darstellung der Theorie (1, 3)-deutiger Strahlen-

büschel und Punktreihen und deren Anwendung auf die Theorie der oben genannten Curven. Dn.

E. de Jonquières. Génération des courbes unicursales. C. R. CV. 1148-1154.

Bekanntlich können zur Bestimmung einer Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlecht Null alle vielfachen Punkte, deren Vielfachheit der Maximalzahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ der Doppelpunkte äquivalent ist, sämtlich willkürlich gegeben sein. Im Zusammenhang mit dem von Herrn Chasles in C. R. LXII (Seite 584) aufgestellten Satze, setzt nun Herr de Jonquières hier auseinander, wie zwei projective Büschel von Curven zu bilden sind, damit ihr Erzeugnis eine Curve nullten Geschlechts sei, deren sämtliche vielfache Punkte gegeben sind. Natürlich müssen ausser den vielfachen Punkten noch mindestens zwei einfache Punkte gegeben sein, damit die Curve durch Punkte voll bestimmt sei. Scht.

Fr. Deruyts. Génération linéaire de quelques courbes à éléments multiples. Mathesis VII. 241-244.

Construction einiger unicursalen Curven vermittelst der folgenden Transformation: Es seien A und B zwei feste Punkte, d und g zwei Gerade. AM schneide d in M_1, BM ferner g in M_2, dann entspricht die Gerade M_1M_2 dem Punkte M. Mn. (Lp.)

C. J. Küpper. Hyperelliptische C^{3n}. Hierzu ein Anhang von K. Bobek. Prag. Abh. VII. 1. 47 S.

Die von Herrn K. betrachteten Curven entsprechen sich selbst in involutorischen Verwandtschaften 17ter Ordnung bezw. 8ter Ordnung. Bei der ersten, welche übrigens bei zweimaliger Anwendung der letzteren sich ergiebt, werden solche Punkte als zugehörig betrachtet, die auf irgend einer C^3 eines gegebenen Büschels (mit den Grundpunkten $g_1, g_2, \dots, g_8$ und γ) auf einer Geraden mit dem Tangentialpunkt γ_i eines bestimmten der neun Grundpunkte

liegen (γ). Solche Punktepaare werden auf den C^3 durch Curven 6. O. ausgeschnitten, die $g_1, g_2, \ldots, g_8$ zweifach enthalten. $g_1, g_2, \ldots, g_8$ sind Fundamentalpunkte 6. O., γ hingegen ist nur ein sich selbst entsprechender Punkt. Uebrigens hat Herr Bertini auf die Verwandtschaft hingewiesen. (Cfr. F. d. M. IX. 1877. 484, XII. 1880. 621.) Jede C^{3n}, die $g_1, g_2, \ldots, g_8$ n-fach, γ hingegen ($n-2$)-fach enthält (vom Geschlecht ($2n-2$)) entspricht in der Verwandtschaft sich selbst, wird durch den Büschel der C^3 und einen projectivischen Büschel entsprechend bestimmter C^{3n-3} erzeugt und ist eine hyperelliptische Curve. Da der Ort Γ der γ_i eine Curve vierter Ordnung ist, mit dreifachem [redacted] in γ und einfachen in $g_1, g_2, \ldots, g_8$, so liegen auf e[illegible]n vier Paare aa. Die Verwandtschaft ist, nach Herrn C[illegible]'s Bezeichnung, von der 4ten Klasse. Eine besondere C^9 enthält die Paare, welche mit einem festen Punkte auf Geraden liegen, jede derartige C^9 enthält den ihr entsprechenden Punkt und gehört zu einem Netze 2ter Stufe. Einem Punkte von Γ entspricht eine C^9, welche in die betreffende C^3 und in eine hyperelliptische C^6 zerfällt. Das beiden gemeinsame Paar liegt auf der entsprechenden Tangente von Γ. Der Ort desselben ist eine C^{15}, die zur Jacobi'schen Curve des Netzes der besonderen C^9 gehört. Die sich selbst entsprechenden Punkte bilden den anderen Teil der Jacobi'schen Curve, eine J^9 mit dreifachen Punkten in $g_1, \ldots, g_8$, die γ nicht enthält. Ihre Punkte sind Doppelpunkte nicht zerfallender besonderer C^9. Die Anzahl derjenigen a der Geraden A, deren entsprechende auf irgend einer anderen B liegen, die Ordnungszahl der Verwandtschaft also, wird mit Hülfe des Chasles'schen Correspondenzprincipes auf 17 bestimmt. Die Verbindungslinien der Punkte von A mit ihren zugehörigen a umhüllen eine Curve A^9 9ter Klasse mit der 8-fachen Tangente A. Der Gebrauch, mit X^n bald eine Curve $n$ter Ordnung, bald eine solche $n$ter Klasse zu bezeichnen, erscheint dem Referenten als verwirrend wenig empfehlenswert.

Die Geraden, welche unendlich nahe entsprechende Punkte $\delta\delta$ tragen, umhüllen eine Curve E^9 9ter Klasse; A^9 und E^9 berühren einander in neun verschiedenen Punkten. Die einem solchen

Punkte zugehörige C^9 hat einen sich selbst entsprechenden Punkt von A zum Doppelpunkt; E^9 ist überhaupt der Ort der Punkte, deren zugehörige C^9 einzelne Doppelpunkte besitzen, A^9 hingegen ist der Ort der Punkte, deren zugehörige $C^9 A$ in einem Punkte berühren. Genauere Untersuchungen der E^9 schliessen den ersten Abschnitt.

Im zweiten Abschnitt specialisirt Herr K. die involutorische Beziehung dadurch, dass er γ mit einem der Punkte $g_1, g_2, \ldots, g_8$ in vereinigter Lage denkt. Dabei wird Γ zur Tangente in γ, und als zugehörig lassen sich überhaupt solche Punkte a, α betrachten, die $g_1, g_2, \ldots, g_7$ zu einem Grundpunktsystem ergänzen.

Auf jedem Strahle findet sich ein Paar entsprechender Punkte. Diejenigen Paare, deren Strahlen durch einen festen Punkt p gehen, liegen auf der Curve C^3 des Netzes mit den Grundpunkten $g_1, g_2, \ldots, g_7$, die in p die Gerade $p\pi$ berührt. Daher verbinden die Tangenten einer Curve A^3 3ter Kl. die Punkte a von A mit den ihnen zugehörigen α. A^3 und B^3 haben 9 gemeinsame Tangenten, von denen eine (A, B) enthält, die übrigen aber Punkte α auf B ausschneiden, deren zugehörige a auf A liegen. Einer Geraden entspricht also eine Curve 8ter O. (mit dreifachen Punkten in $g_1, g_2, \ldots, g_7$). Jede Gerade enthält zwei einander wechselseitig und 6 sich selbst entsprechende Punkte. Der Ort J^6 der letzteren hat $g_1, g_2, \ldots, g_7$ zu Doppelpunkten.

Die Geraden, welche unendlich nahe entsprechende Punkte tragen, umhüllen eine Curve 4ter Kl. und 12ter O. E^4, zu deren Punkten C^3 mit Doppelpunkten gehören. Den Punkten von A^3 gehören solche Curven C^3 zu, die A berühren, weshalb sich E^4 und A^3 in 6 Punkten berühren.

Hyperelliptisch ist jede Curve $3n$^ter^ O. (vom Geschlecht $2n-1$), welche $g_1, g_2, \ldots, g_7$ n-fach und zwei gepaarte Punkte m, μ $(n-1)$-fach enthält. In jedem Büschel von C^6 mit zweifachen Punkten in $g_1, g_2, \ldots, g_7$ findet sich eine hyperelliptische von der betrachteten Art. Die Träger der Paare auf einer sich selbst entsprechenden C^{3n} umhüllen eine Curve n^ter^ Kl. und umgekehrt. Ist C^{3n} hyperelliptisch, so enthält die Curve die $(n-1)$-fache Tangente $m\mu$. Sie hat mit E^4 in jedem Punkte, dem ein

auf J^6 liegender Doppelpunkt von C^{3n} correspondirt, eine einfache Berührung, und man kann so auf neue Art die Berührungscurven der allgemeinen E^4 studiren. Die 63 Systeme vierpunktig berührender Kegelschnitte von E^4 hängen mit den zerfallenden hyperelliptischen C^6 mit vier Doppelpunkten auf und zweien ausserhalb J^6 zusammen. Man erhält diese C^6, wenn man Geraden, die einen Grundpunkt, Kegelschnitte, die vier Grundpunkte, Curven 3. O., die einen Grundpunkt zweifach, vier andere einfach enthalten, mit den entsprechenden Curven zusammenstellt. Dass zwei Quadrupel von Berührungstangenten desselben Systems einen Kegelschnitt berühren, kann aus dem obigen Satz über Büschel der C^6 gefolgert werden. Die analoge Behandlung der Systeme sechspunktig berührender Curven 3. Kl. kann an die Betrachtung der zerfallenden C^9 mit sechs Doppelpunkten auf J^6 und zwei beliebigen a, α ausserhalb derselben geknüpft werden, erfordert aber recht complicirte Betrachtungen (No. 22). In No. 21 wird noch der besondere Fall betrachtet, wo in g_5, g_6, g_7 je zwei gegenüberliegende Seiten des Viereckes aus g_1, g_2, g_3, g_4 sich kreuzen.

Herr B. definirt die involutorische Verwandtschaft 14. O. und 3. Kl., indem er mit dem Büschel von C^3 mit den Grundpunkten 1, 2, 3, ..., 9 als Γ diejenige C^3 in Verbindung bringt, die 9 zweifach, 1, 2, ..., 6 aber einfach enthält, so dass $9\gamma_i$ und 78 sich in einem Punkt der betreffenden C^3 schneiden. Von den Fundamentalpunkten ist 9 einfach, 1, 2, 3, ..., 6 sind vierfach, 7, 8 siebenfach. Die Ordnung 14 der Transformation bestimmt sich aus $X^2-1 = 2.7^2+6.4^2+1 = 14^2-1$. In jedem Paare durchdringen sich unendlich viele Curven 4. O., die 7, 8 zweifach, 1, 2, ..., 6 aber einfach enthalten. Die 14 Schnittpunkte einer Geraden mit der zugehörigen Curve bestehen aus 3 Paaren $a\alpha$ und aus 8 Doppelpunkten. Der Ort der letzteren ist eine H^8. Eine durch k selbst gehende k^7 enthält die Paare, welche mit irgend einem k auf Geraden liegen; sie geht durch 7, 8 dreifach, durch 1, 2, ..., 6 zweifach, durch 9 einfach hindurch. Die Jacobi'sche Curve des Netzes der k^7 zerfällt in H^8 und in eine sich selbst entsprechende C^{10}. Jedes ihrer Paare $a\alpha$ besteht aus zwei

Doppelpunkten einer zerfallenden k^7, und liegt auf der Tangente eines Punktes von Γ, dem diese k^7 entspricht. Die Geraden, welche die Punkte einer Geraden g mit den entsprechenden verbinden, sind Tangenten einer Curve 7ter Klasse.

Hyperelliptisch sind diejenigen Curven $(3n+1)^{\text{ter}}$ O., welche 9 $(n-1)$-fach, 7, 8 $(n+1)$-fach 1, 2, 3, ..., 6 aber n-fach enthalten. Sie sind mit Hülfe des Büschels der C^3 erzeugbar. Die Verbindungslinien der auf ihr liegenden Paare umhüllen eine Curve n^{ter} Kl., die rational sein muss, weil sie auf das Büschel der C^3 eindeutig bezogen ist. Herr Bobek weist, um letzteres zu zeigen, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppeltangenten der Curve nach. Sehr ausführlich behandelt Herr B. die Frage nach den sich selbst entsprechenden Curven der Verwandtschaft, und zwar stellt er zuerst die Bedingungen fest, unter welchen eine C^n in eine C_1^n gleicher Beschaffenheit übergeht.

Eine Verwandtschaft 11. O., 2. Kl. entsteht, wenn man mit dem Curvenbüschel als Curve Γ den 1, 2, 3, 4, 5 enthaltenden Kegelschnitt in Verbindung bringt. Man folgert leicht, dass jeder 6, 7, 8, 9 enthaltende Kegelschnitt eine Involution aus Paaren der Verwandtschaft trägt. Das Centrum liegt auf Γ und bewegt sich projectivisch zu dem 6, 7, 8, 9 enthaltenden Kegelschnitt. 6, 7, 8, 9 sind fünffache, 1, 2, 3, 4, 5 aber zweifache Fundamentalpunkte, die Ordnungszahl n der Verwandtschaft genügt also der Gleichung $X^2-1 = 4.5^2+5.2^2$, woraus eben $X = 11$ folgt. Der Ort der Doppelpunkte ist von der 7. O., zu jedem k gehört eine k^5. Die Punktepaare, in welchen die Teile zerfallender k^5 sich treffen, liegen auf einer Curve 5. O. etc. Hyperelliptische Curven von der Ordnung $3n+2$ sind diejenigen, welche 1, 2, 3, ..., 5 je n-fach, 6, 7, 8, 9 hingegen je $(n-1)$-fach enthalten. Im Abschnitt V. behandelt Herr B. wieder ausführlich die sich selbst entsprechenden Curven. E. K.

C. Besondere räumliche Gebilde.

F. LONDON. Ueber polare Fünfflache und Sechsflache räumlicher Reciprocitäten. Breslau. Köhler. 50 S.

TH. REYE. Lineare Construction des achten Schnittpunktes von drei Flächen zweiter Ordnung. J. für Math. C. 487-489.

Das im letzten Decennium mehrfach erörterte Problem, das kürzlich auf Grund Hesse'scher Arbeiten von den Herren Caspary und Schröter auf verschiedene Art vollständig erledigt war, wird hier auf eine dritte, sehr elegante und einfache Weise gelöst. Die Construction lautet: Aus den 7 Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bilde man 3 Paare 12, 34 und 56. Dann ziehe man den die Geraden 34 und 56 schneidenden Strahl sowohl von 1 wie von 2 aus, und von 7 ans den die beiden eben erhaltenen Strahlen schneidenden Strahl. Indem man 34 und 56 ebenso bevorzugt, wie soeben 12, erhält man drei von 7 ausgehende Strahlen, die ein Dreikant bilden, dessen drei Ebenen man mit den Geraden 12, 34 und 56 zum Schnitt bringe, und das man selber mit der Ebene der drei soeben erhaltenen Schnittpunkte zum Schnitt bringe. So erhält man ein Dreieck, dessen Seiten die Geraden 12, 34, 56 in jenen Punkten schneiden und mit ihnen drei durch den gesuchten Punkt 8 gehende Ebenen bestimmen. Scht.

M. DIESING. Ueber eine gewisse Cremona'sche Verwandtschaft vierter Ordnung und eine neue lineare Construction der Oberflächen zweiten Grades aus 9 Punkten. Diss. Jena 37 S. 8°.

A. KOCH. Ueber die Oerter der Punkte, aus denen ein gegebener Kegelschnitt durch einen orthogonalen oder einen gleichseitigen oder einen der zu diesen dualen Kegel projicirt wird. Diss. Münster. 78 S.

Alle Strahlen eines orthogonalen Kegels senden nach zwei festen Erzeugenden desselben auf einander senkrecht stehende Ebenen aus. Die Strahlen eines zu ihm dualen Kegels stehen auf seinen Tangentialebenen senkrecht. Ein gleichseitiger Kegel enthält zuerst ein Tripel auf einander senkrecht stehender Strahlen und hernach unendlich viele. Bei dem dual-gleichseitigen Kegel giebt es unendlich viele Tripel auf einander senkrecht stehender Tangentialebenen. Bezieht man die Gleichung des Kegels auf die Hauptaxen, so ist für den orthogonalen Kegel die Summe von zwei Coefficienten dem dritten gleich, während für den gleichseitigen Kegel die Summe der Coefficienten verschwindet. Bei den dualen Kegeln gilt je das Entsprechende für die reciproken Werte der Coefficienten.

Diese Coefficienten sind nun zu den Wurzeln einer Gleichung 3ten Grades $h^3 - a_1 h^2 + a_2 h - a_3 = 0$ proportional, deren Coefficienten sich in wohlbekannter Weise aus den Coefficienten zusammensetzen, die in der allgemeinen Gleichung des Kegels auftreten. Soll der Kegel gleichseitig, dualgleichseitig, orthogonal oder dualorthogonal sein, so ist notwendig und hinreichend, dass bestimmte symmetrische Functionen dieser Wurzeln, also rationale Functionen von a_1, a_2, a_3 verschwinden, und zwar der Reihe nach

$$a_1;\quad a_3;\quad a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3;\quad -8a_3^2 + 4a_1a_2a_3 - a_2^3.$$

Durchgängig wird nun der Fall eines Mittelpunktskegelschnittes von dem der Parabel getrennt. Wird das Axensystem so gewählt, dass der Kegelschnitt in der xy-Ebene durch seine Normalgleichung dargestellt ist, so hängen die Coefficienten der Kegelgleichung in einfacher Weise von den Coordinaten der Spitze ab; berechnet man aus ihnen a_1, a_2, a_3 und annullirt die obigen Formen, so erhält man sofort die Gleichungen der gesuchten Fläche.

Die Spitzen der gleichseitigen Kegel liegen auf der orthogonalen Fläche zweiten Grades, welche den gegebenen Kegelschnitt enthält und zu den drei Axenebenen natürlich symmetrisch liegt. (Der Coefficient von z^2 ist gleich der Summe derer von x^2 und y^2). Die dual-gleichseitigen Kegel haben ihre Spitzen auf der mit dem Kegelschnitt concentrischen Kugel über dem Director-

kreise, was eine Specialisirung eines sehr bekannten Theorems ist Bei der Parabel wird die erste Fläche zum zugehörigen Rotationsparaboloid, die zweite zu der Ebene, die in der Directrix senkrecht errichtet ist.

Die Spitzen der orthogonalen Kegel, die einen centrischen Kegelschnitt projiciren, liegen auf einer Fläche 6[ter] O., die den gegebenen Kegelschnitt zur dreifachen Knotencurve hat und hinsichtlich der drei Axen-Ebenen symmetrisch liegt. Nur eine reelle Schale geht durch die Knotencurve hindurch. Die unendlich ferne Ebene begegnet der Fläche in einem Kegelschnitt und in vier imaginären Geraden. Ersterer gehört der Fläche an, von der aus der Kegelschnitt durch gleichseitige Kegel projicirt wird, und beide Flächen berühren sich längs dieses Kegelschnittes. Die vier Geraden gehen natürlich paarweise durch die unendlich fernen Punkte des Grundkegelschnittes. Ihre vier übrigen Schnittpunkte, von denen im Fall der Ellipse zwei reell sind, und die der xz- bezw. yz-Ebene angehören, sind biplanare Knoten der Fläche. Den unendlich fernen Kegelschnitt treffen die Geraden ausserhalb der xy-Ebene in vier weiteren Knoten der Fläche; diese Punkte gehören zugleich dem unendlich fernen Kugelkreise an. Weitere Knoten besitzt die Fläche nicht. Auch bei der Parabel ist der Ort von der 6[ten] O., er ist zur xy- und xz-Ebene symmetrisch, hat die Parabel selbst zur dreifachen und zwei unendlich ferne Gerade zu gewöhnlichen Knotencurven. Diese letzteren werden von dem zugehörigen Rotationsparaboloid ausgeschnitten.

Auch die Spitzen der dualorthogonalen Kegel, die einen gegebenen Mittelpunktskegelschnitt enthalten, liegen auf einer Fläche 6[ter] O. Dieselbe hat den unendlich fernen Kugelkreis zur dreifachen Knotencurve und schneidet die Ebene des Kegelschnittes in seinem Directorkreis und den Tangentenpaaren, die von den cyklischen Punkten der Ebene ausgehen. Die gegenseitigen Schnittpunkte dieser Gebilde, die vier Brennpunkte des Kegelschnittes und seine Schnittpunkte mit dem Directorkreise also, sind Knoten der Fläche, und zwar die Brennpunkte biplanare. Weitere Knoten enthält die Fläche nicht.

Bei der Parabel ist die entsprechende Fläche von der 3ten O. Dieselbe enthält den unendlich fernen Kugelkreis und hat mit der Ebene der Parabel drei Gerade gemeinsam. Ihre gegenseitigen Schnittpunkte sind Knoten der Fläche, einer von ihnen, der Brennpunkt der Parabel, ist biplanar; die beiden anderen sind die Schnittpunkte der Parabel mit ihrer Directrix. Auffälliger Weise bezeichnet Herr K. diese beiden Punkte als die imaginären Brennpunkte der Parabel. Weitere Knoten enthält die Fläche nicht. Die Tangentialebenen im Brennpunkt der Parabel schneiden sich in einer Geraden der Fläche und projiciren, wie es auch sein muss, die anderen Knoten. Eine letzte Gerade der Fläche liegt auf der yz-Ebene unendlich fern. Andere Geraden enthält die Fläche nicht, wofür Herr K. sich auf Herrn Cayley beruft.

E. K.

G. Maupin. Sur une question posée aux examens oraux d'admission à l'École Polytechnique. Nouv. Ann. (3) VI. 419-421.

Die Ebene einer Ellipse sei zu den Geraden der einen Schar eines gleichseitigen Paraboloides parallel. Sucht man nun zu den Tangenten die senkrecht gerichteten Geraden einer der Scharen aus und construirt dann die Geraden, welche zwei solche Geraden senkrecht schneiden, so erhält man für die zur Ellipsen-Ebene parallelen Geraden einen Cylinder, der von der Ebene derselben in einer Fusspunktcurve der Ellipse geschnitten wird. Ihren Pol schneidet die Scheitelgerade der anderen Schar aus. Für diese Scheitelgerade entsprechen alle von diesem Pol ausgehenden Geraden der Ellipsen-Ebene der Forderung. Alle anderen Geraden der zweiten Schar sind zu zwei bestimmten Tangenten der Ellipse senkrecht gerichtet. Die Geraden, welche auf einer dieser Tangenten und auf einer Geraden dieses Systems senkrecht stehen, erfüllen ein mit dem ersten congruentes Paraboloid, welches die betreffende Tangente zur einen Scheitelgeraden hat, während die andere zur Axe des gegebenen Paraboloids parallel ist.

E. K.

O. Böklen. Ueber die Parabel. Böklen Mitt. I_3. 55-57. (1886.)

Fasst man eine Parabel als Basis des auf ihrer Ebene senkrecht stehenden Cylinders auf, so hat jeder Punkt desselben von dem Brennpunkt *M* und der Directrix *D* der Parabel gleiche Entfernung. Schneidet man den Cylinder durch eine beliebige Ebene, welche durch *M* geht, so erhält man eine zweite Parabel, deren Punkte gleich weit von *M* und *D* entfernt sind. Betrachtet man die letztere als gegeben, so lässt sich die Frage stellen: Wo liegen die Punkte *M* in der Ebene der Parabel und wo die zugehörigen Geraden *D* im Raum, so dass die Punkte der Parabel von *M* und *D* gleiche Entfernung haben? Die Untersuchung dieser Frage bildet den Gegenstand der vorliegenden kleinen Arbeit.

Schn.

J. Cardinaal. Ein specieller F^2-Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven dritter Ordnung. J. für Math. CI. 142-153.

Für den von Herrn Reye in der zweiten Auflage seiner „Geometrie der Lage", S. 233 erwähnten speciellen Bündel von Flächen zweiter Ordnung werden hier weitere Eigenschaften synthetisch entwickelt. Namentlich werden dann auch Constructionen der Raumcurve dritter Ordnung mit Berücksichtigung der imaginären Elemente abgeleitet, von denen ich beispielsweise hervorhebe: Durch vier auf einer Regelschar gegebene imaginäre Punkte eine Raumcurve zu legen, die eine gegebene Erzeugende der Regelschar berührt.

Scht.

E. Heinrichs. Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben. Diss. Münster i/W.

Herr Sturm hatte in den Math. Ann. XXVI bei Gelegenheit der Untersuchung gewisser Collineationen und Correlationen auf den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven aufmerksam gemacht,

welche zwei bestimmte Ebenen in gegebenen Punkten osculiren und in denselben gegebene Tangenten haben. Dieses räumliche Analogon des Büschels sich doppelt berührender Kegelschnitte wird in der vorliegenden Dissertation in geschicktester Weise behandelt. Namentlich dürfte das durch den Raumcurven-Bündel definirte höhere Nullsystem interessiren. Da nämlich durch jeden Punkt des Raumes eine Curve des Bündels hindurchgeht und jede Ebene des Raumes Schmiegungsebene einer Curve des Bündels ist, so ist jedem Punkte eine ihn enthaltende Ebene, nämlich die Schmiegungsebene dieses Punktes in der ihn treffenden Curve, und umgekehrt jeder Ebene ein auf ihr liegender Punkt eindeutig zugeordnet. Aber die dritte Charakteristik des so erzeugten Nullsystems ist nicht 1, sondern 2, da jeder Strahl des Raumes zweimal einen Punkt enthält, dessen zugeordnete Ebene durch diesen Strahl hindurchgeht. Den Schluss bilden einige Anzahlen für den betrachteten Bündel von Raumcurven. Es enthält derselbe z. B. vier Raumcurven, welche zwei gegebene Gerade schneiden, und sechs Raumcurven, welche eine gegebene Gerade schneiden und durch einen gegebenen Punkt eine Tangente schicken. Scht.

A. Perroni. Sul punto doppio apparente della cubica gobba. Genova Giorn. 86-88.

Zwei zu einer Raumcurve 3. O. perspectivische Kegel mögen eine Ebene in den Kegelschnitten χ und ψ treffen, unter ihren Schnittpunkten sei S derjenige, den der gemeinsame Strahl beider Kegel ausschneidet. Die Projectionen der Spitzen von dem gegebenen Punkte aus seien V und W; mit dem Doppelpunkt der Projection mögen sie die Strahlen l und l' verbinden. Alsdann müssen die Schnittpunkte A, B zwischen l und χ mit denen A', B' zwischen l' und ψ auf einem Geradenpaare mit dem Kreuzungspunkt S liegen. Hiernach ist l als Träger des gemeinsamen Paares zweier Involutionen auf χ auch dann linear auffindbar, wenn A, B und A', B' imaginär sein sollten, und ll' demnach ein isolirter Punkt der Curve ist. Die Erörterungen, welche

Herr P. für diesen Fall hinzufügt, müssten, um überzeugend zu wirken, näher ausgeführt werden. E. K.

K. Bobek. Zur Klassification der Flächen dritter Ordnung.
Wien. Ber. XCVI. 355-386.

Herr B. giebt mit möglichst einfachen Mitteln die Einteilung der Flächen 3. O. in 21 Arten nach der Natur ihrer Knoten, die wir Herrn Schläfli verdanken (Phil. Trans. 1865), ohne auf die weitere Einteilung in Species nach den Realitätsverhältnissen einzugehen. Als leitendes Princip dient ihm, dass längs der Verbindungslinie zweier Knoten die Fläche eine Ebene berührt, und dass umgekehrt eine Gerade solcher Art entweder zwei Knoten oder einen uniplanaren Knoten enthält, oder endlich die Kante eines biplanaren Knotens zweiter Art ist (beim Biplanarknoten erster Art liegt die Kante, die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen, ausserhalb der Fläche). Hieraus folgt, dass überhaupt höchstens vier, neben einem Biplanarknoten höchstens zwei, neben einem Biplanarknoten zweiter Art keine biplanaren, neben einem Uniplanarknoten keine Knoten vorkommen können. Beim Biplanarknoten zweiter Art kann noch die eine der Berührungsebenen selbst längs der Kante berühren oder auch osculiren. Zwei ähnliche Besonderheiten der Uniplanarknoten sind ebenfalls zu beachten.

Hieraus erhält Herr B. 20 Arten mit Knoten, während die 21ste die allgemeinen Flächen enthält (§§ 2-6). Hierbei ergiebt sich auch, in welcher Weise die 27 Geraden der allgemeinen Fläche beim Uebergang zu den einzelnen besonderen Formen sich gruppenweise vereinigen, Zahlen, die übrigens Herr Cayley bekanntlich entwickelt hat (Phil. Trans. LXIX). Die Natur des Berührungskegels in einem Knotenpunkt und die Art, wie die sechs auf ihm liegenden Geraden der Fläche gruppenweise zusammenfallen, lassen unzweideutig die Natur der etwaigen übrigen Knoten erkennen (§ 7).

Hierauf wird in den §§ 9-11 jede der vorliegenden Flächen durch einen Ebenen-Büschel und einen projectivischen Büschel von

Flächen zweiten Grades erzeugt. Ein der Axe des ersteren und der Basis des letzteren Büschels gemeinsamer Punkt ist ein biplanarer oder ein gewöhnlicher Knoten, je nachdem der erste Büschel zu dem der Tangentialebenen in diesem Punkt perspectivisch oder projectivisch ist. Ein Doppelpunkt der Basis ist ein biplanarer Knoten, wenn er in der Axe vorkommt, ein gewöhnlicher, wenn nur eine Ebene des Büschels ihn enthält, aber dem Kegel des Büschels entspricht, welcher ihn zur Spitze hat. Ein biplanarer Knoten zweiter Art kommt zu Stande, wenn die Axe des Büschels eine Tangente der Basis ist, so dass derselbe zwei gewöhnliche Knoten vertritt. Biplanare Knoten zweiter Art von der oben erwähnten besonderen Beschaffenheit entstehen bei geeigneter Fixirung der projectivischen Zugehörigkeit, bezw. der Tangente, die als Axe dient. Hat ein Kegel des Büschels seine Spitze auf der Basis und der Axe, und wird ihm die allen Flächen gemeinsame Tangentialebene in diesem Punkte im Ebenenbüschel zugeordnet, so entsteht ein Uniplanarknoten, der auch leicht zu einem Uniplanarknoten besonderer Art gemacht werden kann.

Wie Herr B. näher verfährt, mag an einigen Beispielen erläutert werden. Besteht die Basis aus einer Raumcurve 3. O. und aus einer Sehne derselben, ist die Axe eine andere Sehne derselben, und weist man den Ebenen des Büschels, welche die Schnittpunkte der ersten Sehne enthalten, die Kegel zu, welche von ihnen aus die Raumcurve 3. O. projiciren, so erhält man eine Fläche mit vier Knotenpunkten.

Soll ferner die Fläche drei biplanare Knoten B_3; B'_3; B''_3 enthalten, deren Berührungskegel bezw. aus den Ebenenpaaren $\mathfrak{B}'_3$, $\mathfrak{B}''_3$; $\mathfrak{B}''_3$, $\mathfrak{B}_3$; $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}'_3$ bestehen, so bezieht man auf den Büschel der Kegel, die $\mathfrak{B}'_3$ und $\mathfrak{B}''_3$ längs $B_3 B''_3$ und $B_3 B'_3$ berühren, den Ebenenbüschel mit der Axe $B'_3 B''_3$ so, dass die Doppelebene des Kegelbüschels $\mathfrak{B}_3$ zugehört. E. K.

HERTING. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Curven. Pr. Augsburg.

Projicirt man eine Fläche dritter Ordnung F_3 von einem ihrer Punkte p aus auf eine Ebene E, so bildet sich dieselbe in der Ebene doppelt ab, so dass jedem reellen Punkte der Ebene zwei reelle oder imaginäre Punkte der Fläche entsprechen. Die Grenze zwischen den Projectionen der reellen und denjenigen der imaginären Punkte ist die Contourlinie der Fläche. Dieselbe ist, wie Herr Geiser zuerst gezeigt hat, eine Curve vierter Ordnung mit 28 Doppeltangenten. Eine derselben ist der Durchschnitt der Bildebene mit der Tangentialebene der Fläche in p, die übrigen 27 sind die Projectionen der 27 Geraden der Fläche. Durch das Verhalten dieser Doppeltangenten zu einander ist das Verhalten der 27 Geraden auf der Fläche in gewisser Hinsicht bestimmt, und so gelingt es dem Herrn Verfasser, eine vollständige Einsicht in die Gestaltsverhältnisse der Flächen dritter Ordnung zu gewinnen und dieselben durch Zeichnungen zur Anschauung zu bringen, namentlich auch den Verlauf der parabolischen Curve (d. h. des Ortes der Punkte, deren Krümmungsmass Null ist) genau festzustellen. Bei dem überaus grossen Gestaltenreichtum der Flächen dritter Ordnung ist es nicht möglich, die Resultate der Arbeit auch nur angenähert wiederzugeben. A.

Fr. Machovec. Bemerkung zur Erzeugung der Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Casop. XVI. 82. (Böhmisch.)

Wie bekannt, liegen alle Punkte P', welche zu den Punkten P einer Ebene bezüglich eines F_2-Bündels, dessen Flächen ein gemeinschaftliches Poltetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ haben, conjugirt sind, auf einer F_3, welche die Punkte A_k zu ihren Doppelpunkten hat. Der Verfasser zeigt, dass drei von den Flächen des gegebenen Bündels zur Construction des zu dem Punkte P conjugirten Punktes P' besonders geeignet sind. Mit Hülfe jeder von diesen drei Flächen erhält man nämlich den Punkt P' als den gemeinschaftlichen Punkt zweier Geraden, von denen jede zwei gegenüberliegende Schnittpunkte der Polarebene von P bezüglich jener F_2 mit den Seiten eines der drei Raumvierecke $A_1 A_2 A_3 A_4$ ver-

bindet. Dadurch ist die Erzeugung der Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten, welche Geiser in der Abhandlung „Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades" (J. für Math. LXIX) anführt, mit der vierten Steiner'schen Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung in Zusammenhang gebracht. Std.

V. Eberhardt. Die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiner'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Curven dritter Ordnung. Schlömilch. Z. XXXII. 65-82, 129-144.

In dem ersten Capitel dieses Aufsatzes wird unter Anlehnung an eine Arbeit des Herrn Küpper (Math. Ann. XXIV) die Theorie der Steiner'schen Polygone auf der ebenen Curve dritter Ordnung gegeben. Sind auf einer solchen C^3 n Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ willkürlich angenommen und werden durch dieselben Strahlen a_i der Art gezogen, dass a_i und a_{i+1} sich in einem Punkte $\mathfrak{p}_{i+1}$ von C^3 treffen, so wird das Polygon der Punkte $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ein Steiner'sches Polygon genannt, wenn $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_{n+1}$ zusammenfällt, dasselbe also geschlossen ist. Die Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ heissen die Fundamentalpunkte des Polygons. Es werden nun folgende Sätze bewiesen:

1) Zu $n = 2m$ Fundamentalpunkten giebt es im allgemeinen kein geschlossenes Polygon $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$.

2) Giebt es für $n = 2m$ Fundamentalpunkte nur ein geschlossenes Polygon $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$, so giebt es deren unendlich viele.

Wiederholen sich in der Reihe $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ dieselben Punkte in derselben Folge k-mal, so heisst das geschlossene Polygon $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n$ ein Steiner'sches Polygon k^{ter} Ordnung, und die Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bilden ein Steiner'sches System k^{ter} Ordnung.

3) Für $n = 2m+1$ ist das System $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n; \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ stets ein Steiner'sches System zweiter Ordnung.

Es werden nun Grundformen von identischen Steiner'schen Polygonen angegeben, bei welchen die Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ in keiner Abhängigkeit von einander sind, sondern beliebig auf C^3

liegen dürfen und welche zur Reduction gegebener Systeme dienen. Folgende Sätze werden gefunden:

1) Die Gruppe $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ bildet dann und nur dann ein identisches System, wenn in derselben jeder Punkt $\mathfrak{a}_i$ an gerader Stelle ebenso oft auftritt, wie an ungerader.

2) Ein irreducibles System $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ bestimmt stets eine Lagenbeziehung der Fundamentalpunkte.

In Capitel II werden die Schliessungsprobleme der ebenen Curve dritter Ordnung auf die Raumcurven vierter Ordnung übertragen. Werden durch n Sehnen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einer Raumcurve vierter Ordnung n Ebenen α_i gelegt, sodass α_i und α_{i+1} sich in einem Punkte $\mathfrak{p}_{i+1}$ der C^4 treffen, und fällt überdies $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{p}_{n+1}$ zusammen, so heisst das System $a_1 \ldots a_n$ ein Steiner'sches Sehnensystem. Es ist selbstverständlich, dass an Stelle einer Sehne a_i des Systems unendlich viele andere gesetzt werden können, welche mit a_i derselben durch C^4 gelegten Regelschar zweiter Ordnung angehören, sobald C^4 erster Species ist. Die Construction der Steiner'schen Sehnensysteme wird nun mit Hülfe der Steiner'schen Punktsysteme einer ebenen C^3 und auch direct ausgeführt.

Für die C^4 erster Art wird gezeigt, dass die Seiten jedes der C^4 einbeschriebenen einfachen Viereckes ein Steiner'sches System bilden.

Für die C^4 zweiter Art sind besonders zwei Gruppen Steiner'scher Sehnensysteme von Wichtigkeit, eins von drei, ein anderes von vier Sehnen. Die erste Gruppe wird dadurch construirt, dass ein beliebiges Tetraeder auf C^4 angenommen wird und nun die drei Sehnen construirt werden, welche die gegenüberstehenden Seitenpaare des Tetraeders schneiden. Die Bedingung für ein System von vier Sehnen (Steiner'sches Quadrupel) besteht darin, dass die a_i Erzeugende einer Sehnenfläche dritter Ordnung sind und ein einfaches Viereck, dessen Seiten die a_i treffen, der C^4 einbeschrieben werden kann. Auf diese beiden Systeme lassen sich alle anderen zurückführen.

Capitel III beschäftigt sich zunächst mit gewissen Sehnenquadrupeln auf der C^4 erster Art, welche folgende Eigenschaft

haben: Aus den vier Sehnen eines Quadrupels werden die vier Schnittpunkte einer Ebene mit C^4 auf diese Curve stets wiederum in vier Punkte einer Ebene projicirt. Zu drei beliebig angenommenen Sehnen können stets unendlich viele andere Sehnen gefunden werden, welche mit den gegebenen ein Quadrupel bilden und einer Regelschar zweiter Ordnung angehören. Mit Hülfe dieser Quadrupel kann das Schliessungsproblem für die C^4 eine Erweiterung erfahren. Der Herr Verfasser nennt hier und an anderen Orten seine räumlichen Figuren „Configurationen". Dieser Ausdruck hätte besser vermieden werden sollen, da unter einer Configuration nach Reye's Definition eine Figur von sehr specieller Beschaffenheit, welche den hier betrachteten Figuren nicht zukommt, zu verstehen ist.

In Capitel IV wird die C^4 zweiter Art behandelt. Der Herr Verfasser glaubt, diese C^4 sei das räumliche Analogon des Kegelschnittes und für die Theorie der Raumcurven von derselben Bedeutung, wie der Kegelschnitt für die ebenen Curven. Doch ist diese Auffassung wohl nicht richtig, da die kubische Raumcurve doch mit mehr Berechtigung diese Rolle im Raume zu spielen hat. Die Sätze des § 16 dieses Capitels enthalten nichts Neues. Die Sätze des § 17 sind nicht richtig.

In Capitel V wird das Steiner'sche Punktsystem auf der C^4 erster Art definirt. Werden durch n Punkte $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ der Raumcurve C^4 n Ebenen π_i gelegt, so dass π_i und π_{i+1} zwei Punkte $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_{i+1}$ der C^4 gemein haben, und fallen $\mathfrak{p}_{n+1}$ mit $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_{n+2}$ mit $\mathfrak{p}_2$ zusammen, so werden die Punkte $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ein Steiner'sches Punktsystem genannt. Es werden nun einige Sätze über solche Systeme aufgestellt und bewiesen. W. St.

W. Stahl. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse. J. für Math. CI. 73-98.

Nachdem Clebsch (J. für Math. LXII. 64) und Fiedler (Anal. G. d. R. III. Aufl. S. 337) für die Centrafläche des Ellipsoides oder die desmische Fläche 12[ter] Ordnung vierter Klasse die Glei-

chung in eleganter Form aufgestellt haben, und nachdem erkannt ist, dass die dazu ausgeführten analytischen Operationen mit denjenigen identisch sind, die man nötig hat, um die Gleichung der abwickelbaren Fläche einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art herzustellen, liegt es nahe, auch synthetisch den Zusammenhang zwischen beiden Flächen klar zu legen. Dies thut Herr Stahl im vorliegenden Aufsatze, indem er eine eingehende Theorie der Raumcurve vierter Ordnung synthetisch entwickelt und dadurch in den Stand gesetzt wird, im letzten Paragraphen den erwähnten Zusammenhang dem Leser vor Augen zu führen.

Scht.

Ch. Moser. Ueber Gebilde, welche durch Fixation einer sphärischen Curve und Fortbewegung des Projectionscentrums entstehen. Diss. Bern. 31 S.

Es sei gegeben eine feste Kugel mit dem Mittelpunkt O, auf derselben eine feste sphärische Curve s. Dieselbe werde von einem beliebigen Projectionscentrum A aus auf eine zweite Kugel projicirt, deren Mittelpunkt in A liegt, und welche durch O hindurchgeht. Beschreibt A irgend eine Curve, so ändert die Projection ihre Gestalt und beschreibt eine gewisse Fläche, welche die Resultante genannt wird.

Es werden nun die Beziehungen untersucht, welche zwischen der von A beschriebenen Curve und der Resultante bestehen, wobei besonders einfach der Fall ist, welcher entsteht, wenn A sich auf einer durch O gelegten Geraden bewegt. Namentlich wird der Satz gewonnen, dass jede durch OA gelegte Ebene die Resultante in so vielen Curven dritter Ordnung schneidet, als sie Schnittpunkte mit der sphärischen Curve besitzt. Hieran schliessen sich nun noch mancherlei andere Untersuchungen an, auf welche hier nicht eingegangen werden kann.

Die Grundlage der ganzen Untersuchung erscheint etwas zu speciell und zu willkürlich gewählt, als dass man der Arbeit ein allgemeineres Interesse zusprechen könnte. A.

C. Beyel. Ueber Regelflächen, deren Erzeugende zu den Mantellinien eines orthogonalen Kegels parallel sind. Schlömilch Z. XXXII. 321-338.

Der Herr Verfasser giebt zunächst eine Construction an, durch welche Regelflächen vom Grade $3n$ erzeugt werden. Er betrachtet zwei Ebenen A und B, die sich in der Linie x schneiden. Auf x ist ein Punkt O angenommen, durch den eine Gerade h geht, die weder in A noch in B liegt. Ferner befindet sich in A eine Curve n^{ter} Ordnung C_a^n, die nicht durch O geht. Durch h werde nun eine beliebige Ebene E gelegt, welche C_a^n in n Punkten $A_1, \dots, A_n$ und B in der Geraden b trifft. Aus $A_1, \dots, A_n$ werden dann die Lote p auf die Gerade g gefällt. Wenn sich nun die Ebene E um h dreht, so treten in jeder ihrer Lagen n nach diesem Gesetz in ihr enthaltene Gerade p auf. Es wird nun bewiesen, dass die Gesamtheit dieser Geraden p eine Regelfläche vom Grade $3n$ erfüllt. Der Nachweis wird synthetisch geführt, und es knüpft sich daran eine grosse Zahl geometrischer Sätze. Später wird eine specielle Regelfläche dritten Grades besprochen, die aus der vorigen entsteht, wenn die Curve C_a^n durch eine gerade Linie ersetzt wird. Zum Schluss werden noch einige Sätze zusammengestellt, die sich auf den speciellen Fall $n = 2$ beziehen. Mz.

G. Affolter. Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung. (Zweite Mitteilung.) Math. Ann. XXIX. 1-26.

Ueber die Arbeit, von der diese eine Fortsetzung ist, hat Referent im vorigen Bande der F. d. M. (S. 613 u. 614) ausführlich referirt. Auf dieses Referat verweisend, bemerke ich nur, dass hier diejenigen Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung bestimmt werden, die von der ersten Art sind und keine vollständige Degeneration bilden. Der Verfasser verspricht eine folgende Mitteilung, welche die über die fundamentalen Eigenschaften hinausgehenden weiteren Eigenschaften der

Gruppen in einem zusammenhängenden und umfassenden Ganzen zur Darstellung bringen soll. Scht.

E. de Jonquières. Génération des surfaces algébriques, d'ordre quelconque. C. R. CV. 1203-1209.

Die entsprechenden Flächen von zwei projectiven Büscheln von Flächen n^{ter} und n'^{ter} Ordnung schneiden sich in ∞^1 Raumcurven nn'^{ter} Ordnung, die zusammen eine Fläche vom Grade $n+n'$ bilden. Der Verfasser löst nun hier das Problem der Erzeugung einer punktallgemeinen Fläche m^{ter} Ordnung durch zwei solche projective Büschel für den Fall, dass dieselbe durch $\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)-1$ gegebene Punkte gehen soll, wodurch sie bekanntlich gerade bestimmt ist. Beispielsweise ergiebt sich aus den aufgestellten Formeln, dass eine Fläche 30ter Ordnung durch zwei projective Büschel von Flächen nur in sechs Fällen erzeugbar ist, wenn nämlich die Ordnungen dieser Flächen 19 und 11 oder 21 und 9 oder 23 und 7 oder 25 und 5 oder 27 und 3 oder 29 und 1 sind. Scht.

G. Koenigs. Sur les surfaces principales des complexes de droites et les lignes asymptotiques de leur surface de singularités. C. R. CIV. 1824-1826.

Lineare Tangentialcomplexe, bestimmt durch einen singulären Strahl ζ eines Complexes, sind singuläre, ihre Axen berühren die Singularitätenfläche S im nämlichen Punkte P wie ζ. Zu diesen Tangentialcomplexen gehören drei stationäre, der eine hat zur Axe ζ, jeder der anderen je eine der beiden in P berührenden Haupttangenten von S. Zwei der durch den Strahl ζ bestimmten Hauptflächen bestehen aus singulären Strahlen und berühren die Fläche S längs der sich im Punkte P kreuzenden Asymptotencurven. Js.

R. Sturm. Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade. J. für Math. CI 162-195.

Zwei projective Strahlenbüschel erzeugen bekanntlich durch die zwei entsprechende Strahlen schneidenden Strahlen einen Complex, der linear ist, falls die Strahlenbüschel einen Strahl gemein haben, aber tetraedral ist, falls sie keinen Strahl gemein haben. Hiervon ausgehend, kann man in zweierlei Richtungen verallgemeinern. Ersetzt man die Strahlenbüschel durch Regelscharen, Strahleninvolutionen u. s. w., so gelangt man zu Complexen höheren Grades. Nimmt man aber statt zweier erzeugenden Strahlengebilde drei, so gelangt man zu Congruenzen, welche die besondere Eigenschaft haben, wegen der in sich dualen Construction von gleichem Bündel- und Feldgrade zu sein, oder nach der von anderen gebrauchten Ausdrucksweise, von gleicher Ordnung und Klasse zu sein. Die letzterwähnte Verallgemeinerungsrichtung schlägt Herr Sturm im vorliegenden Aufsatze ein. Sind zunächst drei projective Strahlenbüschel, von denen zwei einen sich selbst entsprechenden Strahl haben, die Erzeuger, so entsteht eine Congruenz, deren beide Grade 2 sind, und die seit Kummer's Abhandlung von 1866 vielfach eingehende Bearbeitung gefunden hat, deren Haupteigenschaften aber hier im ersten Capitel durch diese einfachste Erzeugung in neues Licht gesetzt werden. Der zweite Abschnitt behandelt den Specialfall der eben erwähnten Congruenz, bei dem die Brennfläche eine Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden ist. Dabei ergeben sich auch einige neue Eigenschaften dieser Regelfläche. Im dritten Abschnitt wird die Strahlencongruenz dritter Ordnung und Klasse erzeugt und untersucht, die (das Analogon der kubischen Raumcurve) der Schnitt zweier quadratischen Complexe neben einer linearen Congruenz ist. Scht.

F. Hofmann. Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes. Hoppe Arch. (2) V. 353-391, auch sep. Leipzig. Koch.

Jede Gerade eines Tetraedroid-Complexes trifft zwei feste Flächen zweiten Grades in Punktepaaren, die einander harmonisch trennen; der Complex ist bekanntlich vom zweiten Grade. Herr

H. stellt sich einmal die Aufgabe, synthetisch nachzuweisen, dass der Complex mit jeder Ebene die Tangenten eines Kegelschnittes gemein hat. Ausserdem soll in mehr geometrischer Weise auf die Existenz der Singularitätenfläche und die Anordnung ihrer Knotenpunkte hingewiesen werden. § 2 bringt einen geometrischen Beweis für die bekannte Thatsache, dass diejenigen beiden Flächen zweiten Grades, welche eine Complexgerade berühren und mit den gegebenen zu einem Büschel gehören, diese harmonisch trennen. Jedoch wird dieser Gedanke nicht weiter verfolgt, sondern im § 3 eine neue Construction für die Strahlen des Complexes ermittelt, die von einem Punkte P ausgehen und in einer Ebene liegen. Es sei M ein reeller Punkt, welcher den Schnittcurven K und K' der Flächen mit dieser Ebene gemeinsam ist; es seien ferner a, b und c', d' die Berührungspunkte der von P aus an K und K' gehenden Tangenten, endlich a', b'; c, d die Projectionen dieser Punkte von M aus auf K' und K. Alsdann ist

$$P(a, b, c, d) \overline{\wedge} P'(a', b', c', d'),$$

und die Doppelstrahlen dieser beiden projectivischen Büschel gehören dem Complex an, der also die Tangenten einer Curve zweiter Klasse mit irgend einer Ebene gemein hat. Wie Herr H. besonders betonen zu müssen glaubt, ist aber ein Beweis, dass wir es mit einer Curve zweiter Klasse im synthetischen Sinne, mit einer projectivisch erzeugbaren Curve zweiter Klasse zu thun haben, noch besonders zu erbringen. In dem Bestreben, die Natur dieser methodischen Forderung an einem anderen Beispiel zu erläutern, ist Herr H. indessen nicht glücklich. Auf jeder Geraden der Ebene giebt es zwei Punkte x, y, die jeder von zwei gegebenen Kegelschnitten harmonisch trennt; indem aber Herr H. von einem Orte 2. O. spricht, auf dem alle diese Punktepaare liegen, übersieht er, dass zu jedem Punkte der Ebene ein bestimmter anderer für beide Kegelschnitte conjugirt ist.

Im § 4 wird zunächst bemerkt, dass die acht Tangenten der Kegelschnitte in ihren vier gemeinsamen Punkten den fraglichen Ort berühren, und es wird sodann eine vereinfachte Construction

für die zweite Tangente des Ortes gegeben, die von einem Punkte T der Tangente von K' in M ausgeht.

Berühren die von T an K gehenden Tangenten in β und γ, und sind β' und γ' ihre Projectionen auf K' von M aus, so liegt auf der Tangente der Schnittpunkt x von $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$. x bewegt sich projectivisch zu T über einen Kegelschnitt. Beide Reihen haben einen Punkt entsprechend gemein. Dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen Kegelschnitt umhüllen, kann man (bekanntlich) durch Berufung auf einen räumlichen Satz beweisen, nach dem eine Geradenschar eines Hyperboloids auf einem Kegelschnitt desselben und auf irgend einer Geraden der anderen Schar projectivische Reihen ausschneidet.

Der zweite Abschnitt hat wegen der zahlreichen Entlehnungen aus analytisch-geometrischen Entwickelungen ein geringeres Interesse. Geometrisch wird jedoch bewiesen, dass jede Doppelebene des Complexes eine Tangentialebene eines der vier Kegel sein muss, die mit den gegebenen Flächen zu demselben Büschel gehören, und dass der Doppelpunkt, in den der zugehörige Complexkegelschnitt ausartet, in der Ebene des beiden Flächen gemeinsamen Poltetraeders liegt, welche der Spitze des genannten Kegels gegenüberliegt.

Auffällig ist der Gebrauch, das Wort „imaginär“ durch „unsichtbar“ zu ersetzen. E. K.

P. del Pezzo. Intorno alla rappresentazione del complesso lineare di rette sullo spazio di punti a tre dimensioni. Palermo Rend. I. 157-164.

Eine Abbildung des linearen Strahlencomplexes C kann bewirkt werden, wenn man ihn mit dem dreistufigen Netz der Hyperboloide in Verbindung bringt, die einen Strahl ω desselben und einen dazu windschiefen ω' enthalten. Jedes derartige Hyperboloid hat einen zu ω und ω' windschiefen Strahl mit dem Complex gemein, ein Büschel bedingt eine ω enthaltende Regelschar und ein Netz zweiter Stufe ein lineares Strahlensystem. Indem man das Netz der Hyperboloide auf den Raum collinear bezieht, kann man den Punkten, Strahlen und Ebenen desselben

die Strahlen und die ω enthaltenden Regelscharen und Strahlensysteme des Complexes zuweisen. Strahlen von C, welche ω und ω' zugleich treffen, bestimmen mit diesen Geraden Ebenenpaare, welche als Hyperboloide durch Punkte eines Kegelschnittes K^2 dargestellt werden. Jede K^2 treffende Gerade repräsentirt einen Strahlenbüschel des gegebenen Complexes und damit zu gleicher Zeit die Ebene und das Centrum desselben. C und der Complex der K^2 treffenden Geraden stehen also in der merkwürdigen Beziehung, dass ein jeder auf den Raum des anderen eindeutig bezogen ist. Den Tangenten einer in C liegenden Curve n^{ter} O. (und n^{ter} Kl.) vom Range r entsprechen die Punkte einer Curve von der Ordnung r und dem Range $2r$. Sie trifft die Ebene π von K^2 nur auf K^2, und von jedem Punkte von K^2 gehen n Tangenten derselben aus. Die Zahlen modificiren sich, sobald ω die gegebene Curve berührt und schneidet. Einer Raumcurve 3. O. mit der Tangente ω entspricht eine andere, die K^2 sich in einem Punkte anschmiegt, und deren Tangenten K^2 treffen. Hieraus leitet Herr P. ab, dass ein Leitstrahl eines Nullsystems an eine in ihm liegende Raumcurve 3. O. eine äquianharmonische Gruppe von Tangentialebenen sendet. E. K.

J. Conti. Sulle congruenze generate da una coppia di piani in corrispondenza doppia. Palermo Rend. I. 230-240.

Entspricht einem Punkte der Ebene P ein Punkt der Ebene P', einem Punkte von P' ein Punktepaar von P und einer Geraden der einen Ebene eine Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p der anderen, so besteht zwischen den Ebenen P, P' eine Verwandtschaft [1, 2] von der Ordnung n und dem Geschlechte p. Zwei derartig auf einander bezogene Ebenen erzeugen ein Strahlensystem $(n+3)^{\text{ter}}$ Ordnung n^{ter} Klasse mit den singulären Ebenen P, P', und zwar umhüllen die in P gelegenen Strahlen desselben eine rationale Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $(n+1)^{\text{ter}}$ Klasse, die in P' gelegenen eine Curve $2(n+p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n+2)^{\text{ter}}$ Klasse vom Geschlechte p, beide Curven berühren den n-fachen Strahl (P, P') des Strahlensystemes in n Punkten. Singuläre Punkte des

Strahlensystemes sind die Hauptpunkte von P, ihre Verbindungsgeraden mit denen von P' ergeben sich als τ-fache Strahlen desselben, wenn die einem Hauptpunkte der ersteren Ebene entsprechende Hauptcurve in der anderen Ebene τ-mal durch den in Frage kommenden Hauptpunkt hindurchgeht. Die Brennfläche des Stahlensystems ist von der $2(2n+p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung $(4(n-1)+2p)^{\text{ten}}$ Klasse, $(2n-1)$-fach berührt sie P, $2(n+p-1)$-fach P' und doppelt jeden Strahl des Systems Js.

F. Amodeo. Sopra un particolare connesso (2,2) con due punti singolari e due rette singolari. Nap. Rend. (2) I. 216-220, Batt. G. XXV. 321-332.

Der erste dieser Aufsätze enthält eine Zusammenstellung von Resultaten, welche in dem zweiten näher begründet werden.

Anschliessend an eine seiner früheren Arbeiten über die zwei feste Kegelschnitte doppelt berührenden Kegelschnittsysteme untersucht der Herr Verfasser den Connex (2,2), welcher mit einem dieser Systeme in enger Verbindung steht. Es seien φ_1 und φ_2 die beiden gegebenen Kegelschnitte, F ein Eckpunkt des gemeinsamen Poldreiecks und f seine Polare. Die Reihe der Kegelschnitte ψ, welche φ_1 und φ_2 doppelt berühren und deren Berührungssehnen mit φ_1 und φ_2 durch den Punkt F gehen, werden betrachtet. In Bezug auf die Kegelschnitte ψ bilden die Polaren eines beliebigen Punktes A der Ebene einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung α und die Pole einer Geraden β einen Kegelschnitt Σ. Hierdurch ist jedem Punkte der Ebene ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung und jeder Geraden eine Curve zweiter Ordnung zugewiesen, also ein Connex (2,2) bestimmt. Die Curven α berühren alle zwei in F zusammentreffende Geraden (das Linienpaar des Büschels $(\varphi_1\varphi_2)$), und die Curven Σ enthalten alle zwei auf f liegende Punkte (das Punktepaar der Schar $(\varphi_1\varphi_2)$). Es werden nun die Singularitäten des Connexes näher bestimmt, also die Geraden und Punkte bestimmt, deren Polarkegelschnitte zerfallen, sowie

der Ort der Geraden und Punkte, welche Teile von Curven Σ oder α sind. Für die Reihe (π) der Kegelschnitte Σ, welche einem Büschel erster Ordnung P von Geraden s entsprechen, wird die Charakteristik (2,3) gefunden. Die Einhüllende einer Reihe (π) ist eine Curve dritter Ordnung. Die Reihe (π) und der Büschel P sind projectiv auf einander bezogen und erzeugen eine Curve vierter Ordnung C_4, welche in P einen Doppelpunkt hat. Die Tangenten von C_4 in P sind die beiden Hauptcoincidenzstrahlen des Connexes. Der Ort der Cuspidalpunkte aller C_4 ist eine Curve Φ sechster Ordnung, welche zugleich der Ort der Inflexionspunkte aller Curven C'_4 ist, welche durch reciproke Construction erhalten werden.

Am Schlusse der zweiten Arbeit wird darauf aufmerksam gemacht, wie sich der Connex durch besondere Lagen der φ_1 und φ_2 zu einander und bei etwaigem Zerfallen dieser Curven specialisirt.

W. St.

A. del Re. Sulla congruenza (6,2) delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche, che si corrispondono in una determinata omografia. Palermo Rend. I. 290-292.

In diesem Aufsatze werden die Ordnung und Klasse des im Titel angegebenen, bereits in seinen wichtigsten Eigenschaften bekannten Strahlensystems sowie die Ordnung und Klasse seiner Brennfläche auf synthetischem Wege bestimmt.

W. St.

P. H. Schoute. Étude géométrique d'un complexe. C. R. CIV. 1055-1057.

Der Herr Verfasser behandelt hier den Complex vierter Ordnung von Geraden, deren Abstände von zwei festen gegebenen Geraden l und l' in einem gegebenen Verhältnis f stehen. Der Complexkegel für einen beliebigen Punkt P ist vierter Ordnung mit drei Doppelgeraden, von welchen zwei parallel zu l resp. l'

sind, die dritte aber l und l' schneidet. Die Complexcurve der beliebigen Ebene π hat zwei Doppeltangenten, von welchen die eine unendlich weit liegt, während die andere l und l' schneidet. Es werden nun die Haupt-Ebenen und -Punkte des Complexes angegeben. Es giebt ein singuläres orthogonales Hyperboloid H^2, für dessen Punkte der Complexkegel in zwei Kegel zweiter Ordnung zerfällt. Alle Strahlen des Complexes treffen dieses Hyperboloid in reellen Punkten etc. Die Sätze sind ohne Beweise mitgeteilt. Diese wird der Herr Verfasser in den Annales de l'École Polytechnique de Delft demnächst auf analytischem Wege bringen.

W. St.

P. H. Schoute. Sur le complexe des droites dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport constant. Delft. Ann. de l'Éc. Pol. III. 52-90.

Nach Anleitung von Plücker's „Neuer Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" handelt der Verfasser über Complexflächen und ihre Doppelcurven. Eingehender wird eine Regelfläche von der vierten Ordnung betrachtet, bei der die Entfernungen der beschreibenden Geraden von zwei gegebenen Geraden ein constantes Verhältnis haben. Im ersten Teil werden auf synthetischem Wege die geometrischen Eigenschaften der Oberfläche abgeleitet: die Doppelcurve, die Hauptpunkte und die Hauptebenen bestimmt. Zum Schluss werden die besonderen Fälle behandelt, welche von den Verhältnissen zwischen den drei in der Aufgabe vorkommenden Parametern abhängen, namentlich das gegebene Verhältnis der Winkel zwischen den Geraden und ihr Abstand. So entstehen acht Fälle, die besonders betrachtet werden.

In einem Anhang werden die erhaltenen Resultate auf analytischem Wege bestätigt und erläutert.

G.

A. del Re. Alcune proprietà geometriche, che potrebbero essere utili nella teorica dei sistemi di raggi luminosi. Palermo Rend. I. 284-289.

Ist S der Mittelpunkt eines festen Lichtstrahlenbündels und π eine beliebige Ebene, so bilden alle an π reflectirten Strahlen einen zweiten Strahlenbüschel, dessen Strahlen p der Ebene π entsprechend heissen. Eine beliebige Gerade p hat unendlich viele ihr entsprechende Ebenen π, welche einen parabolischen Cylinder umhüllen. Diese Correspondenz wird näher untersucht. Ist ferner s eine leuchtende Curve, so entspricht in analoger Weise einer Ebene π ein Complex von Strahlen und einer Geraden p eine Fläche, welche von ∞^1 parabolischen Cylindern umhüllt wird. Auch diese Correspondenz wird näher untersucht, und dann werden folgende Probleme gelöst:

1. Ein leuchtender Punkt S sendet Strahlen aus, welche an einer algebraischen Fläche S^n n^{ter} Ordnung reflectirt werden; man soll die Ordnung des reflectirten Strahlensystems bestimmen.

2. Die Punkte einer algebraischen leuchtenden Curve s der Ordnung m senden Strahlen aus, welche an der Fläche S^n reflectirt werden; man soll den Grad des reflectirten Strahlencomplexes bestimmen. W. St.

L. Bianchi. Sopra i sistemi doppiamente infiniti di raggi (Congruenze). Rom. Acc. L. Rend. (4) III_1. 369-370.

In dieser Mitteilung untersucht der Verfasser eine interessante Klasse von Congruenzen, nämlich diejenige, bei welcher der Abstand der Brennpunkte und derjenige der Grenzpunkte constant ist. Er spricht folgende Sätze aus, welche er dann in den Annali di Mat. bewiesen hat:

„Wenn bei einer Congruenz, deren Brennpunkte reell sind, der Abstand der Brennpunkte constant gleich k und auch der Abstand der Grenzpunkte constant gleich R ($\geqq k$) ist, so sind beide Brennflächen der Congruenz von constanter negativer Krümmung $= -1/R^2$“.

„Wenn eine Oberfläche S von constanter negativer Krümmung $= -1/R^2$ willkürlich gegeben ist, und wenn man die Constante $k \leqq R$ festgesetzt hat, so giebt es stets ∞^1 Congruenzen von der gewollten Art, welche die Oberfläche S als gemeinschaftliche

Brennfläche besitzen. Die Bestimmung dieser Congruenzen hängt von der Integration einer Riccati'schen Gleichung ab." La. (Lp.)

C. Juel. Om Samlingen af Linier, hvoraf en given Kugle afskjärer Korder, som ses under en ret Vinkel fra et givet Punkt. Zeuthen T. (5) V. 141-148.

Es wird gezeigt, dass alle Sehnen in einer gegebenen Kugel, die von einem gegebenen Punkte aus unter einem rechten Winkel erscheinen, einen quadratischen Complex bilden. Die Complexcurve ist ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Projectionen des Centrums der gegebenen Kugel und des gegebenen Punktes auf die Ebene des Kegelschnittes sind. Der Complexkegel für einen willkürlichen Punkt ist ein quadratischer Kegel, dessen Brennlinien die Verbindungslinien des Punktes mit dem gegebenen Punkte und dem Centrum des Kegels sind.

Die Singularitätenfläche besteht aus einem Umdrehungshyperboloide, dessen Brennpunkte der gegebene Punkt und das Centrum der gegebenen Kugel sind, und einer Kugel, deren Durchmesser die erste Axe des Umdrehungshyperboloids ist. Zuletzt wird der Satz bewiesen:

Die Linien, auf welchen eine Kugel mit dem Centrum A Sehnen abschneidet, die vom Punkte B aus unter einem rechten Winkel erscheinen, sind dieselben wie die, auf welchen eine ebenso grosse Kugel mit dem Centrum B Sehnen abschneidet, die von A aus unter einem rechten Winkel erscheinen. V.

P. H. Schoute. Sur un complexe du troisième ordre. Ass. Franç. (Toulouse) 189-197.

C. Arnold. Einige Untersuchungen über quadratische Strahlencomplexe. Strassburg. Trübner. (38 S.)

W. St.

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

F. A. Aschieri. Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni. Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 172-180.

Cremona e Battaglini relatore. Relazione. Ib. 171.

In dieser Abhandlung kann man zwei verschiedene Teile unterscheiden.

Der erste hat die Erforschung der Haupteigenschaften der rationalen Normalcurve im vierdehnigen Raume zum Gegenstande. Nachdem der Verfasser an die Erzeugung der kubischen Raumcurve unseres Raumes durch zwei projective Strahlenbündel erinnert und aus ihr die bekannte Darstellung der Coordinaten ihrer Punkte als Functionen eines Parameters erhalten hat, zeigt er, dass diese Betrachtungen auf den vierdehnigen Raum erweitert werden können und zu den Haupteigenschaften der rationalen Normalcurve dieses Raumes führen. Darauf beschäftigt er sich mit den ein-, zwei-, dreidehnigen Räumen, welche bezw. durch zwei, drei, vier Punkte der Curve bestimmt werden, und verweilt insbesondere bei denjenigen Fällen, bei denen alle oder einige dieser Punkte zusammen fallen; er zeigt, dass die Punkte und die dreidehnigen, die Curve osculirenden Räume sich als Pol und Polare in Bezug auf eine bestimmte Oberfläche zweiter Ordnung entsprechen (dies ist übrigens nur ein besonderer Fall eines wohl bekannten Clifford'schen Theorems); er findet die allgemeine Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Curve gehen, und giebt die geometrische Deutung für die Invarianten der linken, als Function eines Parameters betrachteten Seite der Gleichung der osculirenden Ebene.

Im zweiten Teile der Arbeit entwickelt der Verfasser eine neue Abbildung des Linienraumes auf einem linearen vierdehnigen Raume; hierzu gelangt er in folgender Weise. Man stelle ein projectives Entsprechen zwischen den Punkten der Normalcurve C_1^4 des vierdehnigen Raumes Σ_4 und denen einer kubischen Raumcurve C_1^3 unseres dreidehnigen Raumes Σ_3 auf;

demzufolge besteht eine projective Verwandtschaft zwischen Σ_3 und jedem Bündel (Gebilde von Σ_4, welches einen Punkt zum Träger hat), der einen Punkt von C_1^4 als Mittelpunkt hat, z. B. zwischen Σ_3 und einem der erzeugenden Bündel $S'S''$ dieser Curve. Demnach sieht man leicht ein, dass durch jeden Punkt von Σ_4 zwei zugeordnete Ebenen von S' und S'' gehen; gemäss dem Vorangehenden hat diejenige dieser Ebenen, welche zu S' gehört, als ihr in Σ_3 entsprechend eine bestimmte Gerade. Umgekehrt wird in Σ_3 eine Gerade ausgewählt, so besitzt sie in S' eine entsprechende Ebene, welche durch die ihr in S'' entsprechende Ebene in dem jener Geraden entsprechenden Punkte geschnitten wird.

Bezeichnet man die Coordinaten einer Geraden aus Σ_3 mit p_{ik} und die des entsprechenden Punktes aus Σ_4 mit x_i, so sind die Formeln, mittels deren man von einer Geraden aus Σ_3 zu dem entsprechenden Punkte aus Σ_4 übergeht, die folgenden:

$$\frac{x_1}{p_{23}p_{34}+p_{14}p_{31}-p_{24}^2} = \frac{x_2}{p_{31}p_{34}+p_{14}p_{24}} = \frac{x_3}{p_{12}p_{34}-p_{14}^2}$$
$$= \frac{x_4}{-p_{12}p_{24}-p_{31}p_{14}} = \frac{x_5}{p_{12}p_{23}+p_{12}p_{34}-p_{13}^2},$$

und die umgekehrten Formeln sind:

$$\frac{p_{14}}{x_2x_4-x_3^2} = \frac{p_{24}}{x_2x_3-x_1x_4} = \frac{p_{34}}{x_1x_3-x_2^2} = \frac{p_{23}}{x_1x_5-x_3x_4}$$
$$= \frac{p_{31}}{x_2x_5-x_3x_4} = \frac{p_{12}}{x_3x_5-x_4^2}.$$

Die Abbildung des Hrn. Aschieri unterscheidet sich von der bekannten, zu welcher man durch eine Projection der quadratischen, aus den Geraden des Raumes bestehenden Mannigfaltigkeit von einem ihrer Elemente aus gelangt. Dies kann man auf verschiedene Arten einsehen, z. B. indem man darauf achtet, dass in der Verwandtschaft des Hrn. Aschieri einem ein-, zwei-, dreidehnigen Raume bezw. eine Regelschar, eine Congruenz dritter Ordnung und erster Klasse, ein tedraedraler Complex entsprechen. La. (Lp.)

G. Bordiga. La superficie del 6° ordine con 10 rette, nello spazio R_4 e le sue projezioni nello spazio ordinario. Rom. Acc. L. Mem. (4) III. 182-203.

Vier projective Gebilde zweiter Stufe, welche aus dreidehnigen Räumen des vierdehnigen Raumes R_4 bestehen, erzeugen durch die Schnitte entsprechender Elemente eine zweidimensionale Oberfläche, von der mehrere wichtige Eigenschaften durch Hrn. Veronese in No. 61 seiner Abhandlung „Behandlung projectivischer Verhältnisse etc." (Math. Ann. XIX; F. d. M. XIII. 1881. 485) angegeben sind. Projicirt man diese Oberfläche auf einen dreidehnigen Raum, so kommt man zu Oberflächen unseres Raumes, von denen einige bekannt sind, andere in No. 62 der angezogenen Abhandlung betrachtet wurden. In der zu besprechenden Arbeit beabsichtigt Hr. Bordiga, den synthetischen Beweis der Veronese'schen Ergebnisse beizubringen und letztere zu vervollständigen.

Wenn die vier Gebilde in einer ganz allgemeinen Lage sind, so ist die von ihnen erzeugte Oberfläche von der sechsten Ordnung und enthält sechs Gerade, sechs ebene Curven dritter Ordnung und 45 Kegelschnitte. Sie kann auf einer Ebene eindeutig abgebildet werden; jeder Geraden der Bildebene entspricht eine rationale Normalcurve vierter Ordnung; jedem Schnitte der Oberfläche durch einen dreidehnigen Raum entspricht auf der Ebene eine Curve vierter Ordnung, die durch 10 Punkte geht (Grundpunkte der Abbildung).

Es kann der Fall eintreten, dass vier entsprechende Räume der erzeugenden Gebilde eine Ebene gemeinschaftlich haben; zur erzeugten Fläche gehört dann eine Ebene, und der übrige Teil ist eine Oberfläche fünfter Ordnung F_2^5, die einen singulären Punkt und 14 paarweise in sieben Ebenen gelegene Gerade besitzt. Es kann auch im besonderen Falle geschehen, dass zwei oder drei Quaternen entsprechender Räume eine Ebene gemeinschaftlich haben; von der Oberfläche F_2^5 trennen sich somit zwei oder drei Ebenen ab, und es bleibt eine Fläche F_2^4 oder F_2^3 vierter bezw. dritter Ordnung übrig.

Ausser den Besonderheiten dieser Art kann die Fläche F_2^6 wegen der besonderen Lagen der Grundpunkte ihrer Abbildung noch andere zeigen; dann enthält die Fläche Linien, welche sie sonst im allgemeinen nicht besitzt.

Wenn man nach Annahme eines Punktes ausserhalb der Oberfläche F_2^6 sie auf einen dreidehnigen Raum projicirt, so erhält man im allgemeinen eine Oberfläche 6ter Ordnung und 27ster Klasse mit einem dreifachen Punkte, einer Doppelcurve siebenter Ordnung und dritten Geschlechtes, 10 Geraden und 45 Kegelschnitten. Die Abwickelbare, welche von den die Fläche in den Punkten der Doppelcurve berührenden Ebenen umhüllt wird, ist von der 25sten Klasse, während die parabolische Curve vom 40sten Grade und vom Geschlechte 97 ist. Unter den Oberflächen, die man durch Annahme des Projectionscentrums ausserhalb der Fläche F_2^6, aber in besonderen Lagen erhält, wollen wir die mit einer Doppelgeraden und einer Doppelcurve sechster Ordnung anführen; die mit einer dreifachen, zwei Doppel-Geraden und einem Doppel-Kegelschnitt; endlich die mit einer dreifachen Geraden und einer Doppelcurve 4. O. — Liegt dagegen das Projectionscentrum auf der Oberfläche F_2^6 so bekommt man eine Oberfläche 5. O. mit 11 Geraden und einer Doppelcurve 3. O.; durch Annahme des Projectionscentrums in passender Lage kann man die Anzahl der Geraden der Fläche auf 12 oder 13 bringen.

Es werde nun die F_2^5 projicirt. Liegt das Projectionscentrum ausserhalb der Fläche, so erhält man im allgemeinen eine Fläche fünfter Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art als Doppelcurve besitzt; aber diese Curve kann in eine dreifache und eine doppelte Gerade zerfallen, in ein räumliches Vierseit, oder in eine Raumcurve dritter Ordnung und eine ihrer Sehnen, wenn man das Centrum in besonderen Lagen wählt. Liegt das Projectionscentrum auf F_2^5 selbst, so ist die Projection nur noch eine Fläche 4. O. mit einer Doppelgeraden.

Projicirt man F_2^4, so erhält man eine Oberfläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, oder eine Fläche dritter Ordnung, je nachdem das Centrum ausserhalb oder auf F_2^4 liegt.

Da endlich die erwähnte F_3^3 geradlinig ist, so sind ihre Projectionen geradlinige Flächen dritter oder zweiter Ordnung.

La. (Lp.)

V. Schlegel. Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions. Ass. Franç. (Toulouse.) 264-266.

Im vierdimensionalen Raume entspricht dem Parallelogramm und dreiseitigen Prisma ein Gebilde, begrenzt von zwei in parallelen Räumen gelegenen congruenten Tetraedern und vier dreiseitigen Prismen. Der Verf. zeigt, wie dieses Gebilde durch drei schneidende Räume in vier inhaltsgleiche Fünfzelle zerlegt werden kann, woraus sich die Inhaltsbestimmung für das Fünfzell in analoger Weise wie für das Dreieck und Tetraeder ergiebt. Schg.

P. Cassani. Geometria pura degli spazi superiori. Ven. At. Atti. (9) II. 423-436.

Fortsetzung der gleichbetitelten Arbeit, über deren fünf erste Abschnitte in F. d. M. XVII. 1885. 809. berichtet wurde. Der vorliegende Aufsatz bringt im sechsten Abschnitt die Erweiterung der elementaren Geometrie des vierdimensionalen Raumes auf das n-dimensionale Gebiet in einer durch Form und Inhalt mit der früheren wesentlich analogen Darstellung. Der siebente (Schluss-) Abschnitt, enthält Sätze über das Schneiden von nicht linearen Räumen, namentlich auch von Linien und Flächen innerhalb eines Raumes von höherer Dimensionenzahl. Schg.

E. Bertini. Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 650-666.

In der Absicht, rein geometrisch die Homographien des Raumes S_n mit allen möglichen besonderen Charakteristiken zu construiren, zeigt Herr B. (§ 1) zunächst, wie die Homographie mit der Charakteristik $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_h)$ zu bilden ist, $(e_1+e_2+\dots+e_h = n+1)$. Diese von Herrn Segre eingeführte Bezeichnung drückt aus, dass nur h sich selbst entsprechende Punkte $A_1, A_2, \dots, A_h$ vorkommen, dass aber ferner für A_i eine Folge von Räumen $S_{e_i-1}, S_{e_i-2}, \dots, S_1, A_i$ von der Art existirt,

dass jeder von ihnen der einzige sich selbst entsprechende Raum dieser Stufe in den vorhergehenden Räumen ist. Ferner ist anzunehmen, das S_{e_1-1}, S_{e_2-1}, ..., S_{e_h-1} den Grundraum S_n constituiren. Um eine so geartete collineare Beziehung einzuleiten, nimmt Herr B. von den $n+2$ verfügbaren Punktepaaren h mit A_1, A_2, ..., A_h identisch, e_i-1 weitere in S_{e_i-1}, S_{e_i-2}, S_{e_i-3}, ..., S_1 an; es mögen in S_{e_i-r} P'_{e_i-r}, P''_{e_i-r}, P'''_{e_i-r} so liegen, dass S_{e_i-r-1} und $S_{e_i-r-2}\, P''_{e_i-r}$ die Räume $S_{e_i-r-2}\, P'_{e_i-r}$ und $S_{e_i-r-2}\, P'''_{e_i-r}$ harmonisch trennen, dass ferner $P'_{e_i-r}\, P''_{e_i-r}$ und $P''_{e_i-r}\, P'''_{e_i-r}$ den Raum S_{e_i-r-1} in den Punkten P'_{e_i-r-1} und P''_{e_i-r-1} treffen. Alsdann setzt Herr B. entsprechend je zwei Punkte P'_{e_i-r}, P''_{e_i-r}. Da hierbei i die Werte 1, 2, ... h, r die Werte 1, 2, 3, ..., e_i annehmen kann, wenn $P'_{e_i-e_i}$ und $P''_{e_i-e_i}$ mit A_i zusammenfallen, so ist noch ein weiteres Punktepaar verfügbar. Herr B. setzt als entsprechend irgend zwei Punkte B und B', die bezw. mit P''_{e_1-1}, P''_{e_2-1}, ..., P''_{e_h-1} und P'''_{e_1-1}, P'''_{e_2-1}, ..., P'''_{e_h-1} in einem S''_{h-1} bezw. S'''_{h-1} liegen. Da jeder S_{e_i-r} sich selbst entspricht, so müssen S''_{h-1} und S'''_{h-1} einander entsprechen, denn sie sind die einzigen von B und B' ausgehenden Räume, die S_{e_1-1}, S_{e_2-1}, ..., S_{e_h-1} zugleich treffen. Hieraus folgt, dass auch P''_{e_i-r} und P'''_{e_i-r} für jedes i und r einander entsprechen. Da die projectivischen Büschel

$$S_{e_i-r-2}(P'_{e_i-r-1}\; P'_{e_i-r}\; P''_{e_i-r}\; \ldots)$$
$$\overline{\wedge}\; S_{e_i-r-2}(P'_{e_i-r-1}\; P''_{e_i-r}\; P'''_{e_i-r}\; \ldots)$$

nur das eine Doppelelement $S_{e_i-r-2}\, P'_{e_i-r-1}$ oder S_{e_i-r-1} besitzen, so sind S_{e_i-2}, S_{e_i-3}, ..., $S_{e_i-e_i} = A_i$, wirklich die einzigen Gebilde ihrer Stufe, die je in den vorangehenden Räumen und in S_{e_i-1} sich selbst entsprechen.

Es zeigt sich, dass nur in dem Raume $A_1 A_2 A_3 \ldots A_h$ weitere Doppelpunkte vorkommen können, und zwar nur dann, wenn besondere Annahmen über die Lage von B und B' gemacht werden. Sind diese nicht erfüllt, so sind

$$S^{(i)}_{n-1} = S_{e_1-1}\, S_{e_2-1}\, S_{e_3-1} \ldots S_{e_{i-1}-1}\, S_{e_i-2}\, S_{e_{i+1}-1} \ldots S_{e_h-1}$$

($i = 1, 2, 3, \ldots, h$) die einzigen sich selbst entsprechenden Räume $(n-1)^{ter}$ Stufe; wenn $e_i = 1$ ist, so wird A_i in $S^{(i)}_{n-1}$ als nicht vorkommend gedacht. $S^{(i)}_{n-1}$ ist zu A_i conjugirt (nach Herrn Segre's Bezeichnung), das heisst, irgend zwei von A_i ausgehende Reihen entsprechender Punkte sind hinsichtlich eines auf $S^{(i)}_{n-1}$ liegenden Centrums perspectivisch. Jeder sich selbst entsprechende Raum wird durch einzelne der Räume S_{e_i-r} constituirt.

Herr B. stellt nun eine Homographie mit beliebiger Charakteristik

$$[(e_1, e_2, \ldots, e_{k_1})(f_1, f_2, \ldots, f_{l_1}) \ldots (g_1, g_2, \ldots, g_{m_1})]$$

her. Diese Bezeichnung, nach Herrn Segre's Vorgang gewählt, soll anzeigen, dass $A_1 A_2 \ldots A_{k_1}$, $A_{k_1+1} A_{k_1+2} \ldots A_{k+l_1}, \ldots$, $A_{h-m_1+1} A_{h-m_1+2} \ldots A_h$ Fundamentalräume der Homographie sind, die nur sich selbst entsprechende Punkte enthalten, während überdies bei $A_1, A_2, \ldots, A_h$ alles beim Alten bleibt. Ist $e_1 > e_2 > e_3 > \cdots > e_{k_1}$, so zeigt mit $A_i (i < k_1)$ gleiches Verhalten jeder Punkt, der in $A_1 A_2 \ldots A_i$ vorkommt, aber ausserhalb $A_1 A_2 \ldots A_{i-1}$. Ist aber $e_{i-1} > e_i = e_{i+1} = e_{i+2} = e_{i'} > e_{i'+1}$ $(i' < k_1)$, so zeigen alle Punkte gleiches Verhalten, die in $A_1 A_2 \ldots A_{i'}$, aber ausserhalb $A_1 A_2 \ldots A_{i-1}$ vorkommen. Um diese besondere Anordnung zu erreichen, braucht man nur die Punkte B und B' besonders zu wählen. Es werden nämlich durch die Räume

$$S_{n-k_1} = S_{e_1-2} S_{e_2-2} \ldots S_{e_{k_1}-2} S_{f_1-1} S_{f_2-1} \ldots S_{f_{l_1}-1} \ldots S_{g_1-1} \ldots S_{g_{m_1}-1}$$

$$S_{n-l_1} = S_{e_1-1} S_{e_2-1} \ldots S_{e_{k_1}-1} S_{f_1-2} S_{f_2-2} \ldots S_{f_{l_1}-2} \ldots S_{g_1-1} \ldots S_{gm_1-1}$$

. . . .

willkürliche Räume $S_{n-k_1+1}, S_{n-l_1-1}, \ldots, S_{n-m_1+1}$ gelegt; der $S_{n-h+\delta}$, in dem sie sich begegnen, wenn δ die Zahl der Fundamentalräume ist, schneidet S''_{h-1} und S'''_{h-1} in Räumen $S''_{\delta-1}$ und $S'''_{\delta-1}$, in denen B und B' gewählt werden können. Jede von $S_{n-k_1}, S_{n-e_1}, \ldots, S_{n-m_1}$ ausgehende Ebene entspricht sich selbst. Zu dem Fundamental-Ebenenbündel Σ_{k_1-1} mit dem Träger S_{n-k_1} gehört als Fundamentalraum mit der Charakteristik $(e_1 e_2 \ldots e_{k_1})$ der Raum $A_1 A_2 \ldots A_{k_1}$, wie Herr B. dadurch zeigt, dass er die allgemeinen von Herrn Segre aufgestellten Bedingungen an seinem Specialfall verificirt. Er bemerkt noch, dass, wenn die willkür-

lichen Elemente der Beziehung passend angenommen werden, die absoluten Invarianten der Homographie vorgeschriebene Werte annehmen.

Herr B. beschäftigt sich weiter mit den sich selbst entsprechenden Räumen. Sich selbst entsprechen natürlich die Geraden, welche irgend zwei der Fundamentalräume treffen. Strahlen dieser Art mit nur einem Doppelpunkt gehen von jedem Fundamentalpunkt aus. Bei einem zu $A_1\ A_2 \dots A_{k_1}$ gehörigen Punkt erfüllen sie einen diesen Raum enthaltenden Raum k_1^{ter} Stufe. Die Gesetze, welche im übrigen für einen solchen Raum gelten, wechseln aber je nach der Zahl aus der Reihe $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{k_1}$, die dem betreffenden Punkte angehört. E. K.

E. Bertini. Sulle scomposizione di certe omografie in omologie. Torino Atti. XXII. 865-866.

Wenn eine collineare Transformation im Raume n^{ter} Dimension eine $(n-1)$-dimensionale Quadrik in sich selbst überführt, so kann sie nach einem Satze von Herrn Voss gewiss durch eine Folge von n Projectionen, central-involutorischen Transformationen, ersetzt werden, sobald n gerade ist. Herr Segre hatte die Zahl der anzuwendenden Projectionen nur auf $n+1$ herabzubringen vermocht (cfr. „Ricerche...“ F. d. M. XVII. 1885. 610). Herr Bertini unternimmt die Bestätigung des genannten Satzes. E. K.

M. Pieri. Sul principio di corrispondenza in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) III$_1$. 196-199.

Man nehme an, dass zwischen den Elementen zweier linearen, n-dehnigen zusammenfallenden Räume eine derartige Verwandtschaft (α'_0, α_0) bestehe, dass α'_r und α_r die bezüglichen Ordnungen der r-dehnigen Oerter des ersten und des zweiten Raumes sind, welche den linearen r-dehnigen Räumen des zweiten und des ersten entsprechen. Wenn es keinen ganz aus vereinigten Elementen bestehenden Ort giebt, so giebt es doch eine endliche

Anzahl von Coincidenzen, die ausgedrückt wird durch

$$\alpha'_0+\alpha_0+\alpha'_1+\alpha_1+\cdots+\alpha'_{m-1}+\alpha_{m-1}+\alpha'_m$$
$$\text{(mit der Bedingung } \alpha_m=\alpha'_m\text{)},$$

wenn $n=2m$, und wenn $n=2m+1$, durch

$$\alpha'_0+\alpha_0+\alpha'_1+\alpha_1+\cdots+\alpha'_{m-1}+\alpha_{m-1}+\alpha'_m+\alpha_m.$$

Nimmt man $m=1$ an, so giebt der erste dieser Ausdrücke das Salmon'sche Correspondenz-Princip; nimmt man $m=0$ oder 1, so giebt der zweite die Correspondenz-Principe von Chasles und Zeuthen. Zum Beweise der allgemeinen Gültigkeit der obigen Ausdrücke wendet der Verf. das bekannte Schlussverfahren der sogenannten vollständigen Induction an.

Um eine Anwendung seines Theorems zu geben, beweist Hr. Pieri am Schlusse den Satz:

Wenn in einem linearen n-dehnigen Raume zwei $(n-1)$-dehnige Mannigfaltigkeiten bezw. p^{ter} und q^{ter} Ordnung gegeben sind, so giebt es $\sum\limits_{i=0}^{i=n}(p-1)^{n-i}(q-1)^i$ Punkte, welche denselben linearen Polarraum in Bezug auf die beiden Mannigfaltigkeiten besitzen. La. (Lp.)

C. Segre. Nuovi resultati sulle rigate algebriche di genere qualunque. Torino Atti XXII. 362-363.

Die Sätze über die rationalen und elliptischen Regelflächen, welche Hr. Segre in seinen Arbeiten aufgestellt hat, welche in den Bänden XIX u. XXI der Atti di Torino erschienen sind (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 604; XVIII. 1886. 448, 617), bilden besondere Fälle allgemeinerer Sätze betreffs der Regelflächen beliebigen Geschlechtes, deren Beweis der Verfasser in einem umfangreichen Aufsatze im XXX. Bande der Math. Ann. unternommen hat. In der Mitteilung, über die hier zu berichten ist und welche jener Abhandlung voraufgeht, hat der Verf. manche seiner Ergebnisse ausgesprochen. Wir beschränken uns auf die Wiedergabe der folgenden:

Eine Regelfläche von dem Geschlechte p und der Ordnung

$n \geqq 4p$, welche einem $R_{n-p-i+1}$ (linearen Raume von $n-p-i+1$ Dimensionen) angehört, wo $0 < i < p$, besitzt immer eine Leitcurve, welche einem R_h angehört, wo $h \leqq i$, und deren Ordnung (wenn man auf ihre Vielfachheit Rücksicht nimmt) $\gtreqless i+h$ ist. Im allgemeinsten Falle, d. h. wenn $i+1$ willkürliche der Erzeugenden der Regelfläche unabhängig sind, ist $h = i$, die Oberfläche ist hyperelliptisch und besitzt als doppelte Leitlinie eine rationale Normalcurve i^{ter} Ordnung, welche einem Raume R_i angehört. Eine Ausnahme findet nur für den Fall $i = p-1$ statt; denn dann hat die allgemeinste Regelfläche eine einfache einem R_{p-1} angehörige Leitlinie vom Geschlechte p und von der Ordnung $2p-2$. Die Regelflächen von R_{n-2p+1} ergeben durch ihre Projectionen alle Regelflächen n^{ter} Ordnung und p^{ten} Geschlechts der niederen Räume. Jede Regelfläche ist mit zwei Leitcurven von einer Ordnung $\gtreqless \frac{1}{2}(n+p)$ versehen. Ist $n+p$ eine gerade Zahl, so besitzt die Oberfläche ∞^1 Minimalcurven von der Ordnung $\frac{1}{2}(n+p)$; ist dagegen $n+p$ eine ungerade Zahl, so hat sie eine endliche Anzahl von Minimalcurven von der Ordnung $\frac{1}{2}(n+p-1)$. Auf die Betrachtung der Minimalcurven kann man eine neue Einteilung der Regelflächen gründen.

La. (Lp.)

C. Segre. Intorno alla geometria su una rigata algebrica. Rom. Acc. L. Rend. (4) III_2. 3-6.

Herr Segre führt in dieser Note die schönen Untersuchungen weiter fort, welche er seit einiger Zeit über die Regelflächen eines beliebigen linearen Raumes angestellt hat. Folgendes ist der Inhalt:

Man stelle sich eine Regelfläche n^{ter} Ordnung und p^{ten} Geschlechtes vor; auf ihr sei eine Curve γ von der Ordnung ν und dem Geschlechte π gezeichnet; dieselbe sei h-fach für die Fläche und treffe jede ihrer Erzeugenden in k Punkten. Die Anzahl y der γ berührenden Erzeugenden der Fläche und die Anzahl η der Punkte von γ, aus deren jedem zwei zusammenfallende Erzeugende hervorgehen, werden durch die folgenden Formeln gegeben:

$$(1) \qquad y = 2\nu h(k-1) - k(k-1)n,$$
$$(2) \qquad \eta - y = 2k(p-1) - 2h(\pi-1).$$

Wenn γ Doppel- oder Rückkehr-Punkte hat, so sind die an diesen Relationen anzubringenden Abänderungen leicht angebbar.

Ist $h = 1$, so ist $\eta = 0$, und die Gleichungen (1) und (2) geben:

$$(3) \qquad \pi = (k-1)\nu + k(p-1) - \tfrac{1}{2}k(k-1)n + 1,$$

eine Beziehung von anscheinend grosser Wichtigkeit in der Erforschung der Geometrie auf einer Regelfläche, eine Verallgemeinerung der von Hrn. Sturm in den Math. Ann. XIX. 487 gegebenen. Setzt man in (3) $k = 2$, so findet man $\nu - \pi = n - 2p + 1$, eine Gleichung, welche die Ordnung n der Regelfläche giebt, des Ortes der Geraden, welche die Punktpaare einer quadratischen Involution p^{ten} Geschlechtes verbinden, welche als Träger eine Curve ν^{ter} Ordnung und π^{ten} Geschlechts hat. Als Zusatz fliesst daraus das wichtige Theorem:

„Jede Regelfläche p^{ten} Geschlechts und n^{ter} ($> 2p+1$) Ordnung gehört einem Raume von mehr als $n-2p$ Dimensionen an, oder sie ist die Projection einer Regelfläche von demselben Geschlechte und derselben Ordnung eines solchen Raumes." Diesen Satz hatte der Verf. weniger allgemein in seiner Note ausgesprochen „Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque" (vgl. den vorigen Bericht).

Wenn man auf der Regelfläche zwei Curven von den Ordnungen ν, ν' und den Geschlechtern π, π' hat, welche jede Erzeugende der Oberfläche bezw. in k, k' Punkten schneiden, so ist die Anzahl ihrer Schnittpunkte $k\nu' + k'\nu - nkk'$ (vgl. Story in J. Hopkins circ. II. 143, F. d. M. XV. 1883. 571), oder zufolge (3):

$$k + k' + \frac{k'}{k-1}\pi + \frac{k}{k'-1}\pi' - kk'\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k'-1}\right)p.$$

Der Aufsatz schliesst mit einigen Bemerkungen über die eindeutigen Transformationen einer Regelfläche in eine andere, insbesondere über die eindeutigen Transformationen einer Regelfläche in sich selbst, bei denen jede Erzeugende sich selber entspricht.

La. (Lp.)

C. Segre. Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazii. Rom. Acc. L. Rend. (4) III_2. 149-153.

In einem linearen Raume R_d von d Dimensionen betrachte man eine Mannigfaltigkeit n^{ter} Ordnung M von $r+1$ ($<d$) Dimensionen, die aus einer algebraischen Schar ∞^1 des p^{ten} Geschlechts von Räumen R_r gebildet wird. Auf M sei eine einfache Curve γ von der Ordnung ν und dem Geschlechte π gezeichnet, welche jeden erzeugenden Raum R_r in $k>r$ Punkten schneide. Zur Vereinfachung nehme man an, γ habe keine Doppelpunkte, welche nicht gleichzeitig Doppelpunkte für M sind, und es gebe in γ nur z ($\geqq 0$) Stellen, in deren jeder $r+1$ Punkte von γ einem R_{r-1} angehören. Dann giebt es eine gewisse Anzahl y von erzeugenden Räumen von M, die γ berühren. Ein erster Ausdruck für y ergiebt sich leicht durch die Anwendung der Zeuthen'schen Formel (Math. Ann. III. 152) und lautet:

$$(1) \qquad y = 2(\pi-1)+2k(p-1);$$

ein anderer von Hrn. Schubert herrührender wird durch ein ungemein merkwürdiges, dem Hrn. Segre von diesem Gelehrten mitgeteiltes Verfahren gewonnen und lautet:

$$(2) \qquad y = 2\nu\frac{k-1}{r} - 2n\frac{k(k-1)}{r(r+1)} - 2z:\binom{k-2}{r-1}.$$

Durch Elimination von y zwischen (1) und (2) gelangt man zu der Gleichung:

$$(3) \qquad \nu\frac{k-1}{r} - \pi = n\frac{k(k-1)}{r(r+1)} - kp+(k-1)+z:\binom{k-2}{r-1},$$

einer Verallgemeinerung der mit (3) bezeichneten Gleichung in dem Berichte (S. 670-671) über die Note desselben Verfassers „Intorno alla geometria su una rigata algebrica". Sie ermöglicht die Verallgemeinerung der Ergebnisse aus der angeführten Note. Setzt man z. B. in (3) $k=r+1$, $z=0$, so findet man

$$(4) \qquad \nu-\pi = n-(r+1)p+r,$$

wodurch die Ordnung n der Mannigfaltigkeit M bestimmt ist, des Ortes der ∞^1 Räume R_r, welche die Punktgruppen einer Involution $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades und p^{ten} Geschlechts verbinden, die

als Träger eine Curve von der Ordnung ν und dem Geschlechte π hat. Aus der Formel (4) schliesst der Verf.:

„Jede algebraische, $(r+1)$-dehnige, aus einer Schar ∞^1 von Räumen R_r p^{ten} Geschlechtes und n^{ter} Ordnung $[n>(r+1)p]$ bestehende algebraische Mannigfaltigkeit kann immer als die Projection einer Mannigfaltigkeit angesehen werden, welche dieselben Kennzeichen hat und einem $R_{n-(r+1)p+r}$ angehört, ausser wenn sie selber einem weniger ausgedehnten Raume angehört. Doch kann die Mannigfaltigkeit in manchen Fällen einem Raume angehören, dessen Dimensionenzahl grösser als $n-(r+1)p+r$ ist, oder die Projection einer Mannigfaltigkeit sein, welche dieselben Kennzeichen hat und einem solchen Raume angehört."

Wir machen schliesslich den Leser auf den folgenden Satz aufmerksam, mit welchem die Arbeit des Hrn. Segre endigt:

„Eine Mannigfaltigkeit n^{ter} Ordnung, der Ort einer Schar ∞^1 von Räumen R_r vom Geschlechte p, welche einem R_{n-p+i} $(0<i\leqq r)$ angehört, ist, wenn $n\geqq 2p+r-i$, immer ein Kegel der i^{ten} Gattung (Schar ∞^1 von R_r, welche durch einen und denselben R_{i+1} gehen)." La. (Lp.)

C. Segre. Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni. Torino Atti XXII. 791-801.

In dieser Abhandlung, der Vorläuferin einer ausgedehnteren Arbeit über die kubischen Mannigfaltigkeiten des vierdehnigen Raumes, über welche im nächsten Bande des Jahrbuchs berichtet werden wird, spricht der Verf. eine Fülle schöner Eigenschaften derjenigen unter diesen Mannigfaltigkeiten aus, welche die (endliche) grösste Anzahl von Doppelpunkten besitzen. Wir werden eine der in Rede stehenden Mannigfaltigkeiten mit Γ, ihre singulären Punkte mit den Ziffern 0, 1, ..., 9 bezeichnen.

Zunächst beschäftigt sich der Verf. mit der Configuration, welche diese Punkte bilden. Er findet, dass sie zu je vier auf 15 Ebenen liegen, den einzigen, welche Γ en[illegible] Ebenen bilden 6 Gruppen, deren jede aus 5 Eben[illegible]ich

ihrerseits in den Doppelpunkten von Γ schneiden. Bezeichnet man die Ebene, in welcher die durch die Ziffern a, b, c, d benannten singulären Punkte liegen, mit $abcd$, so treten die Eigentümlichkeiten der Configuration in der folgenden Tabelle klar zu Tage:

I.	0126,	0789,	4567,	2348,	1359.
II.	0345,	0789,	1237,	1568,	2469.
III.	0258,	0149,	1237,	4567,	3689.
IV.	0367,	0149,	1568,	2348,	2579.
V.	0367,	0258,	2469,	1359,	1478.
VI.	0345,	0126,	1478,	2579,	3689.

Die Mannigfaltigkeit Γ enthält sechs Systeme ∞^2 von solchen Geraden, dass durch jeden Punkt von Γ eine Gerade jedes Systems geht und auf jedem (dreidehnigen) Raume zwei Gerade jedes Systems liegen. Die Betrachtung dieser Systeme führt den Verf. zur Erzeugung der Mannigfaltigkeit durch drei „Netze“ (wenn man dasjenige Gebilde Netz nennt, welches aus Räumen besteht und eine Gerade als Träger hat); diese drei Netze r_1, r_2, r_3 sind durch eine solche projectivische Beziehung verbunden, dass es drei Ternen entsprechender Räume giebt, welche sich in einer Ebene schneiden, welche die Geraden r_1, r_2, r_3 trifft. Eine andere wichtige Definition von Γ zeigt sie als Ort der ∞^2 Geraden, welche vier unabhängige Ebenen treffen; merkwürdiger Weise treffen diese Geraden auch eine fünfte Ebene, welche durch die Annahme jener vier anderen völlig bestimmt ist und leicht construirt werden kann.

Die Mannigfaltigkeit Γ wird durch 15 involutorische Homographien, deren jede eine Ebene von Γ als Axenebene besitzt, in sich selbst übergeführt.

Projicirt man Γ aus einem ihrer Punkte P, so erhält man als Umrissschein eine Kummer'sche Fläche Φ^4; dabei geben die sechs Geradensysteme von Γ als Projectionen die sechs Strahlensysteme, von denen Φ^4 die Brennfläche ist. Diese Betrachtungsweise führt leicht zu den Eigenschaften der Kummer'schen Fläche Φ^4 und ermöglicht es auch, aus den bekannten Sätzen über Φ^4 ebenso viele Theoreme über Γ zu folgern.

Wenn dagegen das Projectionscentrum P ausserhalb der Mannigfaltigkeit Γ liegt, so ist der Umrissschein die allgemeinste Oberfläche Φ^6 sechster Ordnung und vierter Klasse, welche den Durchschnitt einer Oberfläche zweiter Ordnung mit einer kubischen als Cuspidallinie hat und zehn Doppelpunkte besitzt, welche sich zu je vier auf 15 doppeltberührenden Ebenen verteilen; die Eigenschaften von Φ^6 folgen aus denen der Mannigfaltigkeit Γ. Diese Oberfläche ist Brennfläche für sechs Strahlensysteme dritter Ordnung und zweiter Klasse. Der Verf. hebt mit Recht den eigentümlichen Zusammenhang hervor, welcher hiermit zwischen sechs homofocalen Strahlensystemen (3,2) und sechs analogen (2,2) hergestellt ist, und welcher darin besteht, dass sie beide als die Projectionen derselben Geradensysteme einer kubischen Mannigfaltigkeit angesehen werden können.

Man projicire die Mannigfaltigkeit Γ aus einem beliebigen Punkte P auf einen Raum R und aus einem ihrer Doppelpunkte auf einen anderen Raum R'. Lässt man zwei Punkte von R und R', welche die Projectionen eines und desselben Punktes von Γ sind, sich gegenseitig entsprechen, so gelangt man zu einer Verwandtschaft zwischen R und R', welche zwei- oder dreideutig ist, je nachdem P auf Γ liegt oder nicht. Von dieser Verwandtschaft ermittelt der Verf. die wesentlichsten Eigenschaften. Wir beschränken uns auf die Bemerkung, dass ihm zufolge die Uebergangsfläche eine Φ^4 oder Φ^6 ist, jenachdem die Transformation zwei- oder dreideutig ist, und dass die Doppelfläche in jedem Falle eine Oberfläche vierter Ordnung ist, welche zu Doppelpunkten die 9 Schnittpunkte dreier Erzeugenden eines Systems einer Oberfläche zweiter Ordnung mit drei Erzeugenden des anderen Systems hat.

Jede kubische mit einer Ebene versehene Mannigfaltigkeit des vierdehnigen Raumes kann als die Projection der Mannigfaltigkeit $M_3^{2,2}$ angesehen werden, welche die Basis eines Büschels von Quadriflächen des fünfdehnigen Raumes bildet, wenn man von einem willkürlichen Punkte der Mannigfaltigkeit aus projicirt. Diese Bemerkung verknüpft die Erforschung der besagten kubischen Mannigfaltigkeiten des vierdehnigen Raumes, welche Ebenen enthalten, mit

der Erforschung der biquadratischen Mannigfaltigkeiten $M_3^{2,2}$ des fünfdehnigen Raumes; und da diese Mannigfaltigkeiten, ausser wenn sie die Basen von Kegelbüscheln sind, als Liniencomplexe zweiten Grades unseres Raumes gedeutet werden können, während jene Mannigfaltigkeiten durch ihre Umrisse eine ausgedehnte Klasse von Oberflächen vierter und sechster Ordnung ergeben, so gelangt man damit zu einer unvermuteten Beziehung zwischen diesen Oberflächen und den quadratischen Complexen. Durch Anwendung dieser Beobachtungen auf die Mannigfaltigkeit Γ stellt der Verf. einen Zusammenhang zwischen der Kummer'schen Fläche und einem tetraedralen Complexe her; man kann nämlich denselben als eine Abbildung des tetraedralen Complexes auf einem Doppelraume betrachten, dessen Uebergangsfläche die Kummer'sche Fläche ist. La. (Lp.)

C. Segre. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. I Partie. Math. Ann. XXX. 203-226. II Partie. Math. Ann. XXXIV. 1-25.

„Weder hier noch auch bei anderen neueren Untersuchungen aus der mehrdehnigen projectivischen Geometrie handelt es sich darum, auf die höheren Räume Resultate auszudehnen, welche für den gewöhnlichen Raum schon bekannt sind. Im Gegenteil, es handelt sich um die Lösung von Fragen, welche selbst für diesen neu sind und weder des Interesses noch der Schwierigkeit ermangeln.“ Mit diesen Worten aus der Einleitung zum zweiten Teile der Arbeit des Hrn. Segre haben wir unsern Bericht deshalb beginnen wollen, weil sie die Stelle kennzeichnen, welche diese Abhandlung in der mathematischen Literatur einnehmen wird. Diejenigen unserer Leser, welche die früheren Arbeiten desselben Verfassers gelesen haben, werden es sofort verstehen, dass sie eine hervorragende ist, wenn wir sagen, dass eine grosse Anzahl von den Sätzen, welche sie dort bezüglich der Regelflächen von den Geschlechtern 0, 1, 2 kennen gelernt haben, hier im allgemeinen sich in der Form bewiesen finden, wie Herr Segre sie teilweise in seiner kurzen Note aus-

gesprochen hat „Nuovi risultati sulle rigate algebriche“ (Torino Atti XXII, siehe oben S. 669). Um jedoch zum Beweise der angeführten Sätze zu gelangen, bedarf der Verf. einer gewissen Anzahl von Sätzen über die Curven aus den höheren Räumen. Ihre Darstellung findet im ersten Teile der Abhandlung statt, den wir zunächst besprechen wollen.

Zur Erforschung der algebraischen Curven in den linearen Räumen bedient sich der Verf. zu Anfang einer schon von Hrn. Veronese vorgeschlagenen Methode, einer Verallgemeinerung der von den Herren Brill und Nöther benutzten Methode, als sie im § 17 ihrer berühmten Abhandlung: „Ueber die algebraischen Functionen“ (Math. Ann. VII; F. d. M. VI. 1874. 251) die algebraischen Raumcurven unseres Raumes erforschten. Diese Methode beruht auf einer eindeutigen Correspondenz zwischen einer Raumcurve γ_p^n von der Ordnung n und von dem Geschlechte p und einer ebenen Curve f_p^ν von demselben Geschlechte. Sie zeigt die Uebereinstimmung der Aufgabe, „alle Curven γ_p^n eines r-dehnigen Raumes R_r aufzusuchen“, mit der anderen, „alle linearen Scharen ∞^r von Gruppen g_n^r aus n Punkten von f zu finden, welche nicht die Besonderheit haben, dass jede zu f adjungirte Curve, welche durch einen Punkt dieser Gruppen geht, deshalb auch durch i andere derselben Punkte geht“. Einer Schar von g_n^r entspricht eine specielle oder nicht specielle Curve von R_n, je nachdem die Schar speciell ist oder nicht; eine specielle γ_p^n ist immer von einer Ordnung $n \leqq 2p-2$. Eine erste Anwendung dieser Methode führt zur Bestimmung der Anzahl $(r+1)n-(r-3)(p-1)$ der Constanten, von denen eine nicht-specielle γ_p^n aus R_r abhängt, wenn $p > (r+1)(p+r-n)$. Aus der Ueberlegung, welche zu diesem Schlusse führt, folgert der Verf. den Satz (von Clifford) über die grösste Anzahl $(n-p)$ von Dimensionen, welche derjenige Raum besitzen kann, dem eine γ_p^n angehören kann, wenn $n > 2p-2$; und aus der Betrachtung der Scharen von Punktgruppen $g_p^{r'}$ von f, welche eine Schar g_n^r enthalten, wo $r' > r$, erschliesst er, dass die Curven vom Geschlechte p und von der Ordnung n des Raumes R_{n-p}, welche

er Normalcurven nennt und mit C_p^n bezeichnet, durch ihre Projectionen alle Curven desselben Geschlechtes und derselben Ordnung aus den niederen Räumen ergeben. Eine γ_p^n ist speciell und zwar nur dann, wenn sie einem höheren Raume als R_{n-p} angehört oder die Projection einer Curve ist, die einem solchen Raume angehört.

Eine andere mehr synthetische Methode zur Untersuchung der Eigenschaften der Curven beruht auf der Benutzung der Regelflächen, die von denjenigen Geraden erzeugt werden, welche die entsprechenden Punkte zweier eindeutig auf einander bezogenen Curven verbinden. Durch diese Betrachtung wird zuerst bewiesen, dass, wenn zwei nicht specielle C_p^n so auf einander eindeutig bezogen sind, dass einer auf einem R_{n-p-1} gelegenen besonderen Gruppe aus n Punkten der einen eine ähnliche Gruppe der anderen entspricht, dasselbe für jede Gruppe aus n Punkten eines R_{n-p-1} jeder Curve eintritt, und dass die eindeutige Verwandtschaft projectivisch ist. Von derselben Art ist jede eindeutige Verwandtschaft zwischen zwei speciellen Curven γ_p^{2p-2} aus R_{p-1} und ebenso die zwischen zwei Normalcurven, welche als Projection p eine nicht-specielle einem R_r angehörige R_r $(r < n-p)$ ergeben. Es ist uns nicht möglich, alle anderen Sätze anzureihen, welche Hr. Segre mit diesen verknüpft. Wir wollen uns daher nur auf die folgenden beschränken: „Eine nicht specielle γ_p^n aus R_r ist, wenn $r < n-p$, die Projection von $\infty^{(n-p+1)(n-p-r)}$ C_p^n, welche durch einen willkürlichen, R_r nicht schneidenden $R_{n-p-r-1}$ gemacht wird. Durch $n-p+3$ beliebige Punkte eines nicht-speciellen Kegels (d. h. von welchem alle linearen Schnitte nicht speciell sind) von der Ordnung n und vom Geschlechte p gehen $p+1$ auf dem Kegel liegende Curven von der Ordnung $p+1$ (vgl. die Note S. 215 des Teiles I mit der Nr. 19 von II). Ist $n > 2p$, so kann eine C_p^n keine vielfachen Punkte haben; ist aber $n = 2p-q$ und q hinlänglich klein, so kann die Curve einen $(q+2)$-fachen Punkt haben. Wenn $0 < i < n-2p+2$, so sind i willkürliche Punkte einer C_p^n unabhängig (d. h. gehören einem R_{i-1} an)“. Danach leitet

der Verf. aus einem Theoreme (Nr. 16) über die nicht speciellen γ_p^n eine Methode ab (Nr. 17) zur Construction der g_i^1 von C_p^n, wenn $i > p+1$, und folgert daraus eine Abbildung der Curven vom Geschlechte p auf den ebenen Curven $(2p+2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit zwei $(p+1)$-fachen Punkten und p^2 Doppelpunkten. Hierauf beschäftigt er sich mit den Curven, welche eine g_i^1 haben und insbesondere mit den hyperelliptischen Curven, von denen er eine Klassification angiebt. Endlich äussert er sich in der letzten Nummer dahin, dass seine Methoden die Untersuchung der Curven gestatten, welche die Besonderheit haben, eine g_i^1 zu enthalten, von der die Gruppen zu i Punkten solchen Räumen R_k angehören, wo $k < i-1$; er beschränkt sich jedoch auf den Fall $i = r$, $k = 1$ und findet, dass eine nicht-specielle Curve γ_p^n, wenn $n \leqq 2p+1$, auf einer rationalen Regelfläche $(n-p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Trisecanten liegen kann, und dass im allgemeinen eine rationale Oberfläche von dieser Ordnung $(\leqq p)$ ∞^{4p+8-n} jede Erzeugende dreimal treffende γ_p^n enthält.

Am Anfange des zweiten, 1889 erschienenen Teiles der Arbeit führt Herr Segre den Beweis vor, den er schon in Rom. Acc. L. Rend. (4) III$_2$. 3-6 (siehe S. 670, 671) für die Relation geliefert hat:

$$(k-1)\nu-n-\delta = \tfrac{1}{2}k(k-1)n-k(p-1)-1$$

zwischen der Ordnung n und dem Geschlechte p einer Regelfläche F_p^n einerseits und andererseits der Ordnung ν und dem Geschlechte π einer Curve γ_π^ν der Oberfläche, welche jede Erzeugende der Oberfläche in k Punkten schneidet, wobei δ die Anzahl der Doppelpunkte von γ_π^ν bedeutet, von denen jeder unter den k Durchschnitten derselben mit einer Erzeugenden von F_p^n zweimal rechnet. Der Fall dieser Relation, dessen er sich in der Arbeit bedient, entspricht der Annahme $k = 2$.

Indem er hierauf Eigenschaften der Curven in Erinnerung bringt, die im ersten Teile nachgewiesen wurden, und den Namen „Normalraum“ einer beliebigen Mannigfaltigkeit dem ausgedehntesten unter denjenigen giebt, welche Mannigfaltigkeiten gleicher Ordnung enthalten, von denen jene als eine Projection angesehen

werden kann, gelangt er zu den wichtigen Sätzen: Jede Regelfläche F_p^n, die einem niedrigeren Raume als R_{n-2p-1} angehört, ist die Projection einer diesem letzteren Raume angehörigen Regelfläche von derselben Ordnung. Es giebt zwei ganz verschiedene Arten von F_p^n: 1) diejenigen (die „speciell" heissen), deren Normalräume eine Dimension $> n-2p+1$ haben, 2) die anderen („nicht-speciellen"), d. h. diejenigen, deren Normalräume R_{n-2p+1} sind (für welche $n \gtreqless 2p+2$). Die Curven γ_n^ν einer Oberfläche F_p^n, für welche $\delta = 0$, $k = 2$, sind alle speciell, wenn die Oberfläche speciell ist; nicht-speciell, wenn sie es nicht ist."

Da wir bei den Betrachtungen des Verfassers über die Erzeugung einer Regelfläche durch die Geraden nicht verweilen können, welche die correspondirenden Punkte zweier auf einander bezogenen Curven verbinden, und ebensowenig bei denen über die Oberflächen, welche durch Projection eine nicht specielle F_p^n ergeben, so kommen wir sofort zu den Sätzen über die (Leit-) Curven, welche sich einfach auf die Erzeugenden einer Regelfläche stützen. Wenn eine einem $R_{n-p-i-1}$ angehörige Oberfläche F_p^n eine einem R_h (wo $h \leqq n-p-i$) angehörige Leitcurve m^{ter} Ordnung besitzt, so ist $m \leqq h+i$, wenn $n \geqq 2p+2i+2h-m+1$; ist ausserdem $n \geqq m(h+i-m+2)+2p-1$ und $m < h+i$, so ist die Oberfläche die Projection einer einem $R_{n-p+h-m+1}$ angehörigen Regelfläche gleicher Ordnung und sogar einer einem höheren Raume $R_{n-p+k-m+1}$ angehörigen, wenn die genannte Leitcurve die Projection einer Curve gleicher Ordnung ist, die einem Raume R_k angehört, der höher als R_h ist. Eine nicht-specielle Regelfläche kann nicht eine specielle Leitcurve haben; der umgekehrte Satz (jede specielle Regelfläche hat eine specielle Leitlinie) gilt für $n \geqq 4p-2$.

Der Satz aus Nr. 14 lehrt uns, dass die Regelflächen vom Geschlechte $p(>0)$ und von der Ordnung n, welche einem R_{n-p+1} angehören, immer Kegel sind, sobald ihre linearen Schnitte n^{ter} Ordnung nicht speciell sind, und besonders, sobald $n > 2p-2$; ausserdem hat jede einem R_{n-p} angehörige F^n vom Geschlechte $p > 1$ eine Doppelgerade als Leitlinie; jede einem R_{n-p-1} ange-

hörige F^n hat zur Leitlinie eine doppelte oder dreifache Gerade, oder auch einen Doppelkegelschnitt, oder endlich eine einfache ebene Curve vierter Ordnung; ferner hat jede einem R_{n-p-2} angehörige F^n, wenn $p > 3$ ist, eine doppelte, dreifache oder vierfache Gerade, oder auch eine einfache ebene Curve fünfter Ordnung, oder auch eine doppelte kubische Raumcurve, oder endlich eine einfache Raumcurve sechster Ordnung. Wir bemerken, dass, wenn eine specielle Regelfläche F_p^n, wo $n > 4p-2$, eine einem Raum R_h angehörige (specielle) Leitcurve von der Ordnung $m = 2h$ hat, die Regelfläche eine hyperelliptische sein muss, welche als doppelte Leitlinie eine rationale Normalcurve h^{ter} Ordnung hat; nur der Fall $h = i = p-1$ ist auszunehmen, denn dann kann die Oberfläche als einfache Leitlinie eine C_p^{2p-2} haben.

Für eine nicht-specielle F_p^n bilden die Leitcurven, deren Ordnung der Ungleichheit $2p \geqq n+p-1$ genügt, ein System $\infty^{2\mu-n-p-1}$, von welchem, wenn μ gross genug ist (vgl. weiter unten) 2^p durch $2\mu-n-p-1$ willkürliche Punkte der Oberfläche gehen; im allgemeinen hat die Oberfläche als (Minimal-) Curven von geringerer Ordnung eine gewisse Anzahl von Curven $\frac{1}{2}(n+p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung oder auch eine Schar ∞^1 von Curven $\frac{1}{2}(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, je nachdem $n+p$ ungerade oder gerade ist.

Der letzte Abschnitt der Abhandlung betrifft die Kegel und andere besondere Oberflächen; wir entnehmen ihm folgende Stellen wörtlich, womit wir schliessen: „Auf einer nicht speciellen F_p^n, die als minimale Leitlinie eine Curve m^{ter} Ordnung hat, bilden die Leitlinien μ^{ter} Ordnung im allgemeinen ein solches System, bei dem durch $2\mu-n-p-1$ Punkte der Oberfläche $\sum_{i=0}^{\mu+m-n}\binom{p}{i}$ hindurchgehen, falls $\mu \geqq n-m$, $2\mu \geqq n+p-1$ ist. Wenn $2m \geqq n-p+1$ ist, so ist die Ordnung μ der Leitlinien so beschaffen, dass $2\mu \geqq n+p-1$, und hat daher als kleinsten Wert $\frac{1}{2}(n+p-1)$ oder $\frac{1}{2}(n+p)$; ist dagegen $2\mu < n-p+1$, so enthält die Oberfläche ausser der Minimalcurve Leitlinien aller Ordnungen von der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung an, welche letzteren eine lineare Schar $\infty^{n-2m-p+1}$ bilden". Diese Sätze gelten für die

Kegel, wenn man diese als F_p^n ansieht, wo $m = 0$, und indem man als Leitcurven die annimmt, welche seine Erzeugenden ein einziges Mal ausserhalb des Mittelpunktes treffen. La. (Lp.)

C. SEGRE. Sur un théorème de la géométrie à n dimensions. Math. Ann. XXX. 308.

Beweis des von Herrn Klein in seiner Arbeit: Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale (Math. Ann. XXVIII. 547) aufgestellten und benutzten Satzes: Eine Mannigfaltigkeit von $\sigma+1$ Dimensionen ist linear, wenn von jedem ihrer Punkte mehr als zwei ihr angehörige lineare Mannigfaltigkeiten von σ Dimensionen auslaufen.

Kr.

E. Abzählende Geometrie.

A. HURWITZ. Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Math. Ann. XXVIII. 561-585.

Ein Wiederabdruck der zuerst in den Leipziger Berichten publicirten Arbeit, über welche im vorigen Jahrgange S. 626ff. referirt worden ist. My.

R. LACHLAN. On conics satisfying given conditions and touching a given conic. Mess. (2) XVI. 140-143.

In diesem Aufsatze betrachtet der Verfasser die Anzahl von Lösungen für jede der Aufgaben: Einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher 1) durch vier gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kegelschnitt berührt, 2) durch drei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kegelschnitt osculirt, 3) durch drei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten berührt, 4) durch zwei gegebene Punkte geht

und einen gegebenen Kegelschnitt vierpunktig berührt. Die benutzte Methode ist aus der von Spottiswoode und Clifford entstanden. Obgleich manche der Ergebnisse leichter durch andere Verfahrungsarten erhalten werden können, so sieht der Verf. die Methode doch als interessant an, weil sie angiebt, wie ähnliche Aufgaben behandelt werden können, wenn der gegebene Kegelschnitt durch eine beliebige Curve ersetzt wird.

Glr. (Lp.)

H. G. Zeuthen. Note sur un problème de Steiner. (Extrait d'une lettre à M. Schoute.) Darb. Bull. (2) XI. 82-86.

Im Darb. Bull. (2) X (F. d. M. XVIII. 1886. 575) hatte Herr Schoute interessante Studien über ein Steiner'sches Problem veröffentlicht. Herr Zeuthen giebt im Vorliegenden einige Ergänzungen zu diesen Studien. Das Problem lautet: Durch einen Punkt O gehe an eine Plancurve n^{ter} Ordnung m^{ter} Klasse eine Secante. In jedem ihrer n Schnittpunkte ist die Tangente gezogen. Die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte dieser Tangenten erzeugen, falls die Secante sich um O dreht, eine Curve, die untersucht werden soll. Die schon von Herrn Schoute bestimmte Ordnung dieser Curve ist $\frac{1}{2}(2n-3)m-\frac{1}{2}r$, wo r die Zahl der Spitzen der ursprünglichen Curve ist. Um das Geschlecht p_1 der Curve zu finden, wendet Herr Zeuthen die von ihm gegebene Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts an. Er findet $2(p_1-1)=(m+r)(n-2)-n(n-1)$. Die Zahl der Spitzen ergiebt sich gleich Null. Die Doppelpunktszahl setzt sich aus zwei Zahlen zusammen, erstens der Zahl der von zwei Paaren homologer Tangenten gebildeten eigentlichen Doppelpunkte, zweitens der dreifach zu rechnenden Zahl der dreifachen Punkte, die die gemeinsamen Punkte dreier homologen Tangenten sind. Homolog heissen hierbei Tangenten, deren Berührungspunkte einer und derselben durch O gehenden Secante angehören.

Scht.

K. Küpper. Ueber die auf einer Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlecht p—C_p^m von den ∞^2 Geraden G der Ebene ausgeschnittene lineare Schar $g_m^{(2)}$. Prag. Ber. 477-485.

Mit Anwendung der von Herrn Nöther (Math. Ann. VI u. VII) eingeführten bekannten Terminologie lässt sich das Hauptresultat dieser Abhandlung so aussprechen: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die auf einer C_p^m $(p > m-3)$ von den Geraden der Ebene ausgeschnittene Schar $g_m^{(2)}$ in einer Vollschar $g_m^{(3)}$ enthalten ist, besteht darin, dass bei ungeradem m die Curve C_p^m wenigstens $\frac{(m-1)^2}{4}$, bei geradem m wenigstens $\frac{m(m-2)}{4}$ Doppelpunkte besitzt. Diese Bedingung ist stets erfüllt, wenn $m > 5$ ist und C^m jene Minimalzahl von Doppelpunkten hat." Scht.

E. de Jonquières. Recherche du nombre maximum de points doubles qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'ordre m, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples, qui complètent la détermination de la courbe. C. R. CV. 917-923.

E. de Jonquières. Détermination du nombre maximum absolu de points multiples d'un même ordre quelconque r, qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique C_m, de degré m, conjointement avec d'autres points simples donnés en nombre suffisant pour compléter la détermination de la courbe. C. R. CV. 971-978.

Wenn $m < 6$ ist, so können soviel Doppelpunkte wie möglich, also $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, der Lage nach beliebig gegeben sein. Ist $m = 6$, so dürfen nicht mehr als 8 Doppelpunkte der Lage nach gegeben sein. Um die analoge Frage für $m > 6$ zu erledigen, betrachtet der Verfasser die Curve als erzeugt von zwei projectiven Büscheln von Curven n^{ter} Ordnung und n'^{ter} Ordnung,

sodass $n = \frac{1}{2}m + 1$, $n' = \frac{1}{2}m$ bei geradem m, $n = n' = \frac{1}{2}(m+1)$ bei ungeradem m ist. Das Erzeugnis der projectiven Büschel ist dann zwar eine Curve $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die man aber von vornherein in die gewünschte Curve m^{ter} Ordnung und eine Gerade zerfallen lassen kann, wenn man auf einer solchen $m+2$ von den gegebenen Punkten annimmt. Es ergiebt sich für $m > 6$, dass die Construction der Curve nur möglich ist, wenn die Zahl δ der der Lage nach gegebenen Doppelpunkte bei geradem m höchstens $\frac{1}{2}(3m+2)$, bei ungeradem m höchstens $\frac{1}{2}(3m+1)$ beträgt. Weiter ergiebt sich, dass das Maximum Δ der Zahl der Doppelpunkte, die man willkürlich annehmen kann, um eine überdies durch einfache Punkte bestimmte Curve m^{ter} Ordnung hindurchgehen zu lassen, $\frac{1}{2}(3m+1) + 2J^2$ bei ungeradem m, $\frac{1}{2}(3m+2) + 2J(J+1)$ bei geradem m beträgt, wo J die nächste ganze Zahl bedeutet, die bei ungeradem m gleich oder kleiner als $\frac{1}{6}(m-5)$, bei geradem m gleich oder kleiner als $\frac{1}{6}(m-8)$ ist. In der zweiten Abhandlung werden die Betrachtungen in dem im Titel angedeuteten Sinne dadurch erweitert, dass angenommen wird, die projectiven Curvenbüschel erzeugten die zu untersuchende Curve und ausserdem nicht ein Gerade, sondern eine Hülfscurve i^{ter} Ordnung. Scht.

Fr. Machovec. Ueber die Anzahl der zur Bestimmung einer Curve n^{ter} Ordnung nötigen Punkte und über die vielfachen Punkte dieser Curven. Casop. XVI. 225. (Böhmisch.)

Bezeichnet man die Anzahl der zur Bestimmung einer C_n nötigen Punkte mit $N(n)$ und die Anzahl der einfachen Bedingungen, welche die Angabe eines r-fachen Punktes einer C_n repräsentirt, mit $P(r)$, so gelten die Gleichungen

$$N(n+1) - 2N(n) + N(n-1) = P(r+1) - 2P(r) + P(r-1) = 1.$$

Der Verfasser entwickelt diese Gleichungen synthetisch mit Hülfe der quadratischen Transformation, wobei er nur voraussetzt, dass die Zahl $N(n)$ von der Anzahl der Doppelpunkte von C_n unabhängig ist. Std.

K. Küpper. Das Maximalgeschlecht der Regelflächen m^{ter} Ordnung. Prag. Ber. 609-612.

Die Abhandlung, welche sich an die oben besprochene desselben Verfassers anschliesst, gipfelt in der Construction einer windschiefen Fläche m^{ten} Grades mit dem Maximalgeschlecht und in dem Satze: „Soll einer solchen Fläche das Maximalgeschlecht zukommen, so muss sie in einer linearen Congruenz enthalten sein, deren Directricen die ganze Doppelcurve der Fläche ausmachen.“ Das Maximalgeschlecht ist bekanntlich $\frac{1}{4}(m-2)^2$ oder $\frac{1}{4}(m-1)(m-3)$, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Scht.

J. S. et M. N. Vaneček. Contact des faisceaux de surfaces. Annali di Mat. (2) XV. 73-114.

Eine ungemeine Fülle von Anzahl-Resultaten über die Berührung von einstufigen und zweistufigen Flächen-Systemen. Neue Gesichtspunkte konnte der Referent nicht finden, wohl aber eine immerzu wiederkehrende Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips in seiner ursprünglichen Form.

Scht.

B. Guccia. Théorème sur les points singuliers des surfaces algébriques. C. R. CV. 741-743.

Für eine algebraische Fläche ist die Dimension der Bedingung, in einem gegebenen Punkte eine gegebene Singularität zu besitzen, gleich $A-B+C$, wo A die Erniedrigung bedeutet, welche diese Singularität in der Zahl der Schnittpunkte dreier mit ihr behafteten Flächen bewirkt, wo B die Erniedrigung bedeutet, welche sie im Geschlecht der zweien solchen Flächen gemeinsamen Raumcurve hervorruft, und wo C die Erniedrigung bedeutet, welche sie im Geschlecht einer solchen Fläche bewirkt.

Scht.

A. Legoux. Mémoire sur les systèmes de surfaces. Toulouse Mém. (8) IX. 326-355.

Der Verf. beginnt mit einigen, von Jonquières (C. R. LVIII. p. 567) herstammenden Sätzen über Flächensysteme, welche die Abhängigkeit ihrer Eigenschaften von den drei „Charakteristiken" (μ die Zahl der Flächen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, ν die Zahl der Flächen, welche eine gegebene Gerade berühren, ϱ die Zahl der Flächen, welche eine Ebene berühren) lehren. Für den Jonquières'schen Satz (C. R. LXI. p. 442) über die Zahl der Flächen des Systems, welche eine gegebene Fläche berühren, wird der Brill'sche Beweis (Math. Annalen VIII. p. 534) gegeben. Gleichfalls nach Brill wird die Zahl der Raumcurven eines Systems ermittelt, die eine gegebene Fläche berühren. Es folgt dann die Herleitung der zuerst von Chasles gegebenen, später von Schubert und Zeuthen begründeten Bestimmung der Charakteristiken der Elementarsysteme von Flächen zweiter Ordnung. Die Charakteristiken eines Systems von Flächen m^{ter} Ordnung, welche die Schnittlinien zweier Flächen von gleicher Ordnung enthalten, sind $\mu = 1$, $\nu = 2(m-1)$, $\varrho = 3(m-1)^2$. Jedes Flächensystem, für welches μ den Wert 1 hat, lässt sich durch eine Differentialgleichung darstellen, deren linke Seite ein vollständiges Differential ist, und aus einer solchen Differentialgleichung können ohne Integration ν, ϱ gefunden werden. Zum Schluss giebt der Verfasser nach Fouret einige Sätze über die von letzterem Implexe genannten Systeme von Flächen, die von zwei Parametern abhängen, und über ihren Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. F.

P. Visalli. Sulle correlazioni (in due spazii a tre dimensioni) che soddisfano a dodici condizioni elementari. Rom. Acc. L. Rend. (4) III_1. 118-124.

Dieser Aufsatz ist eine Fortsetzung der Abhandlung desselben Verfassers: „Sulle correlazioni in due spazii a tre dimensioni"

(Rom. Acc. L. Mem. (4) III), über die wir im vorigen Jahrgang des Jahrbuchs S. 640 berichtet haben.

Man bezeichne als „Ausartungs-Correlation dritter Ordnung" jede solche Correlation, bei der in jedem Raume eine Ausartungsgerade, eine Ausartungsebene durch diese Gerade und ein Ausartungspunkt auf derselben Geraden vorhanden sind; der Verf. beabsichtigt eine Bestimmung der Anzahl θ der Ausartungs-Correlationen dritter Ordnung, welche ein System ∞^1 von Correlationen enthält. Er nimmt an, dass ein derartiges System durch die Anzahlen m, n der im ersten Raume gegebenen Punkte und Ebenen definirt ist, welche Pole und Polaren einer gleichen Anzahl von Ebenen und Punkten des zweiten sind, und durch die Anzahlen p und q der conjugirten Punkte oder Ebenenpaare, wobei m, n, p, q eine Lösung der Gleichung $3m+3n+p+q = 12$ vorstellen.

Wenn man durch das Symbol (m, n, p, q) den Wert von θ darstellt, welcher der Lösung m, n, p, q dieser Gleichung entspricht, so kann man die vom Verf. aufgestellten Ergebnisse nach einer ähnlichen Methode wie in der angezogenen Abhandlung durch die folgende Tabelle darstellen:

$(4, 0, 0, 0) = 24$	$(2, 0, 4, 2) = 8$	$(1, 0, 6, 3) = 0$
$(3, 1, 0, 0) = 0$	$(2, 0, 3, 3) = 20$	$(1, 0, 5, 4) = 0$
$(2, 2, 0, 0) = 0$	$(1, 1, 6, 0) = 0$	$(0, 0, 12, 0) = 0$
$(3, 0, 3, 0) = 6$	$(1, 1, 5, 1) = 0$	$(0, 0, 11, 1) = 0$
$(3, 0, 2, 1) = 9$	$(1, 1, 4, 2) = 24$	$(0, 0, 10, 2) = 0$
$(2, 1, 3, 0) = 3$	$(1, 1, 3, 3) = 36$	$(0, 0, 9, 3) = 0$
$(2, 1, 2, 1) = 2$	$(1, 0, 9, 0) = 0$	$(0, 0, 8, 4) = 0$
$(2, 0, 6, 0) = 0$	$(1, 0, 8, 1) = 0$	$(0, 0, 7, 5) = 0$
$(2, 0, 5, 1) = 0$	$(1, 0, 7, 2) = 0$	$(0, 0, 6, 6) = 0$

La. (Lp.)

A. Cayley. On the intersection of curves. Math. Ann. XXX. 85-90.

In F. d. M. XVII. 1885. 666 ist der Cayley'sche Satz und die Ergänzung dargelegt, welche Bacharach demselben als erforderlich gegeben hat. Im Gegenwärtigen erklärt der Verfasser,

die Ergänzung sei keine Correction, sondern eine Hinzufügung, hält die Behauptung der Sicherheit seiner Methode des Abzählens der Constanten aufrecht, wenn gleich sie specielle Fälle der besondern Betrachtung überlasse, und stellt nun seinen Satz mit ausführlicher Berücksichtigung des von Bacharach behandelten Falles auf, indem er die Form der Curve, auf der die Schnittpunkte der gegebenen Curven dann liegen müssen, angiebt. Der Beweis wird danach durch Abzählung geführt.

H.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

F. Aschieri. Geometria analitica del piano. Milano. Manuale Hoepli. IV + 174 S. (1887).

F. Aschieri. Geometria analitica dello spazio. Milano. Manuale Hoepli. IV + 196 S. (1888).

Diese beiden kleinen Lehrbücher bilden zusammen einen elementaren Lehrgang der analytischen projectiven Geometrie. Ihre gleichzeitige Betrachtung ist unumgänglich; denn im zweiten stehen Capitel, die rechtmässiger Weise im ersten stehen könnten und vielleicht sollten. Der Darstellung legt Hr. Aschieri die Theorie der projectivischen Coordinaten zugrunde, von denen er die Cartesischen und die Plücker'schen als besondere Fälle ansieht. Er benutzt sie zur Erforschung der projectivischen Verwandtschaften der Kegelschnitte und der Flächen zweiter Ordnung, endlich der ersten Eigenschaften der algebraischen ebenen Curven und Oberflächen. Bei dieser Arbeit, sowie bei den übrigen Büchern desselben Verfassers, merkt man heraus, dass er sich in der Wahl der abgehandelten Gegenstände durch seine persönlichen wissenschaftlichen Bestrebungen hat leiten lassen, und die Wahl der Ausdrücke ist nicht immer ganz einwurfsfrei. Schliesslich sei es uns gestattet, den Wunsch zu äussern,

dass Hr. Aschieri in einer neuen Auflage die Theorie des Imaginären nicht so beiläufig abmachen möge, wie in der ersten.
La. (Lp.)

E. DESSENON. Éléments de géométrie analytique. Paris. V+400 S. 8°.

A. RÉMOND. Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution. I[re] Partie: Géométrie à deux dimensions. Paris. Gauthier-Villars.

Anzeige in Nouv. Ann. (3) VI von Hrn. M. d'Ocagne, der die methodische Anordnung aufs höchste lobt. Der Uebungsstoff geht nicht über die Theorie der Kegelschnitte hinaus. Lp.

J. TODHUNTER. Solutions to problems contained in a treatise on plane coordinate geometry. Edited by C. W. BOURNE. London. Macmillan and Co.

Anzeige in Nature XXXVII. 75. Lp.

C. KOEHLER. Zur Einführung der Liniencoordinaten in die analytische Geometrie der Ebene. Schloemilch Z. XXXII. 152-169.

Nachdem die ursprünglich aus Gründen der Zweckmässigkeit erfolgte Einführung der rechtwinkligen Linien-Coordinaten durch Reuschle logisch begründet worden (S. F. d. M. XVIII. 1886. 653), gelangt der Verf. zu dieser Coordinatenbestimmung auf einem Wege, welcher dieselbe geradezu als eine notwendige erkennen lässt. Zu diesem Zwecke bedient er sich des Zwischengliedes der homogenen Coordinaten, welche den Uebergang von den rechtwinkligen Punkt- zu den rechtwinkligen Linien-Coordinaten vermitteln. Der Fall, in welchem die letzteren versagen, wird gebührend beachtet, auch der Zusammenhang derselben mit den Schwering'schen Linien-Coordinaten ausführlich und klar dargelegt. Es stellt sich dabei, wie zu erwarten, heraus, dass die Bestimmung eines Punktes durch seine Coordinaten im

Schwering'schen System reciprok ist der Bestimmung einer Geraden durch ihre Coordinaten im rechtwinkligen System.

Schg.

M. d'Ocagne. Les coordonnées parallèles de points. Nouv. Ann. (3) VI. 493-502.

Während das dem rechtwinkligen reciproke System von Parallelcoordinaten (s. die früheren Berichte in diesem Jahrb. über die einschlägigen Arbeiten von d'Ocagne und Schwering) zunächst nur zur Bestimmung von Geraden dient, lässt sich dasselbe, wie der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes zeigt, auch zur Bestimmung von Punkten verwenden. Ist nämlich ein System gegeben, gebildet aus zwei Parallelen p, q und einer Geraden, welche dieselben bezw. in den Punkten A und B senkrecht schneidet, sind ferner durch einen beliebigen Punkt P die Geraden BP und AP gezogen, welche bezw. p und q in den Punkten U und V schneiden, so sind die reciproken Werte der Abschnitte AU und BV die Coordinaten des Punktes P. Mittels dieser, den Plücker'schen Liniencoordinaten reciproken Coordinaten werden einfache Aufgaben über Punkte, Geraden und Kegelschnitte gelöst, und mit Hülfe des Dualitätsprincips auch einige complicirtere Resultate abgeleitet. Der Zusammenhang der neuen Coordinaten p, q mit den gewöhnlichen Cartesischen Punktcoordinaten x, y wird, wenn AB als Axe der X, und die in der Mitte O von AB errichtete Senkrechte als Axe der Y genommen wird, durch die einfachen Beziehungen hergestellt ($OA = OB = 1$ gesetzt):

$$p = \frac{1-x}{2y}; \quad q = \frac{1+x}{2y}.$$

Schg.

M. d'Ocagne. Les coordonnées cycliques. Mathesis VII. 148-154.

Cyklische Coordinaten eines Punktes M heissen die auf einer einzigen Axe vom Ursprunge aus gerechneten Abstände der Schnittpunkte der Cyklen von demselben Radius, die diesen

Punkt zum Centrum haben. Ein Cykel ist ein in einem bestimmten Sinne beschriebener Kreis von einem Punkte aus, der auf derselben Seite der Axe wie M liegt. Die Normale zu einer Curve $\varphi(\xi, \eta) = 0$ in cyklischen Coordinaten hat die Gleichung $n_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = n_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, wo n_1 und n_2 die Abstände des Punktes, in welchem die Normale die Axe schneidet, von den Punkten sind, in denen der Cykel des betrachteten Punktes auf der Curve dieselbe Axe trifft. Anwendungen der cyklischen Coordinaten auf die Kegelschnitte. Cyklische Dualität: Jedem Satze für Cartesische Coordinaten entspricht einer für cyklische. Beispiele.

Mn. (Lp.)

F. Groscurth. Ueber parabolische Coordinaten und die geodätischen Linien auf dem elliptischen Paraboloid. Diss. Marburg. 21 S. 4°.

C.-A. Laisant. Théorie et applications des équipollences. Paris. Gauthier-Villars. XVI u. 299 S. 8°.

Herr Laisant hat 1873 und 1874 eine französische Uebersetzung der „Darstellung der Methode der Aequipollenzen“ von G. Bellavitis veröffentlicht, und da diese Uebersetzung vergriffen war, so hat er den Gegenstand nun selbständig bearbeitet. Die Methode der Aequipollenzen ist bekanntlich diejenige geometrische Deutung der complexen Zahlen, welche in Deutschland wohl als Streckentheorie bezeichnet, und deren Grundlage am Anfange der Functionentheorie entwickelt zu werden pflegt. Die Darstellung der Theorie nimmt im vorliegenden Buche nur 51 Seiten ein: das wesentliche Interesse heftet sich an die Anwendungen. Denn, wie schon Salmon in der ersten Auflage seiner „Higher plane curves“ (1852) über die genau dieselben Ziele verfolgenden Bestrebungen seines Landsmannes Warren urteilt, „diese Rechnung giebt eine neue Form von Polarcoordinaten, die mit Recht gewählt werden dürfen, wenn es sich herausstellt, dass sie irgend welche Vorteile über die gewöhnliche Methode bieten“

(a. a. O. S. 306). Die Anwendungen umfassen viele Probleme der Elementargeometrie (unter ihnen z. B. das Modethema der Brocard'schen und Lemoine'schen Punkte), die Theorie der Curven, welche Hoüel bereits seinem „Cours de calcul infinitésimal" (Bd. II. S. 93-112, 1879) einverleibt hatte, die Theorie der ebenen Transformation und die Kinematik. Jedem Capitel sind viele Uebungsaufgaben angehängt.

Obschon die Methode der Aequipollenzen schneller bewältigt werden kann als die der Hamilton'schen Quaternionen und der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, so steht sie doch in der Anwendbarkeit hinter beiden zurück, da sie nur für die Ebene, nicht für den Raum existirt. Zur Kennzeichnung dessen, was sie leisten kann, ist das vorliegende Buch in jeder Beziehung sehr geeignet. Lp.

K. Hertz. Die Elemente der Hamilton'schen Quaternionen. Warschau. (Polnisch.)

Die Schrift enthält als Einführung in den Gegenstand die Theorie der Vectorenrechnung nebst Anwendung auf die Geometrie der Linien und der Flächen; es folgen dann die Grundsätze der Quaternionenrechnung, die Theorie der Indices, Algebra der Quaternionen, Differentiirung derselben, Auflösung der Gleichungen mit Quaternionen, mehrere Anwendungen und Uebungen. Dn.

E. B. Elliott. The quotients of space-directed lines. Wash. Bull X. 105-107.

Kurze Bemerkung über die ursprüngliche Vorstellung Hamilton's nebst Anwendung auf das Problem der Wechselwirkung der Elemente elektrischer Ströme. Lp.

Ed. Weyr. Ueber binäre Matrizen. Prag. Ber. 353. (Böhm.)

Enthält die Grundzüge einer Theorie der binären Matrizen nebst daran geknüpfter Theorie der Quaternionen. Std.

R. Raimondi. Sull' equazione vettoriale della circonferenza. Batt. G. XXV. 219-222.

Aus der Quaternionengleichung der Geraden ergiebt sich durch Inversion die Gleichung des Kreises, aus letzterer die sogenannte Vectorgleichung desselben. In der ersten dieser Kreisgleichungen erscheint der variable Vector als Function einer Variabeln X, in der zweiten als Function einer anderen Variabeln K. Durch die vorliegende Arbeit wird die zwischen beiden Variabeln bestehende Beziehung ermittelt. Schg.

G. G. Morrice. Note on the multiplication of nonions. Mess. (2) XVII. 104-105.

Die Note bezweckt eine Aufstellung der Multiplicationstabelle für Nonionen in ihrer besten Gestalt. Glr. (Lp.)

V. Balbin. Elementos de calculo de los cuaterniones y sus aplicaciones principales á la Geometría, al Análisis y á la mecánica. Buenos Aires. XIX + 359 S. 8°.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

R. A. Roberts. On the rectification of certain curves. Lond. M. S. Proc. XVIII. 97-129.

Voraus geht die Geschichte der Erfolge in der Aufsuchung von Curvenbogen, welche Functionen gegebener Form darstellen. Namentlich handelt es sich um die Darstellung der ersten Gattung elliptischer Integrale, und ist Serret in dieser Bestrebung am weitesten gelangt (s. Cayley's „Elliptic Functions“, Chap. 15). Um weitere Beiträge in dieser Richtung zu geben, sucht der Verfasser Beispiele von Curven, deren Bogen Logarithmen algebraischer Functionen sind. Die reciproke Parabel lässt sich

speciell zu einem Logarithmus machen, allgemeiner besteht der Ausdruck aus zwei Logarithmen. Auch Hypocykloiden von rationalem Radien-Verhältnis geben in gewissen Fällen Logarithmen. Weiterhin werden Fälle untersucht, wo ein Bogen die Summe mehrerer anderen ist, dann wo sein Ausdruck aus verschiedenartigen Integralen besteht, die sich auf eine geringere Anzahl reduciren lassen. Ausserdem werden viele Eigenschaften und Beziehungen von Curvenbogen im Anschluss an namhafte Arbeiten gefunden. H.

A. D. Risteen. On a theorem relating to closed plane curves. Annals of Math. III. 104.

Sei l die constante Länge einer Sehne einer geschlossenen ebenen Linie L, einer Sehne, deren beide Enden die ganze Linie durchlaufen. Ein Punkt auf der Sehne, dessen Abstände von deren Enden b und $a = l + b$ sind, erzeugt dabei eine geschlossene Linie M. Der Ring zwischen L und M ergiebt unmittelbar folgenden Inhalt:

$$(1) \qquad R = b\int_0^{2\pi} x d\vartheta + \pi b^2,$$

wenn x die Strecke vom Schnittpunkt zweier consecutiven Sehnen bis zum erstern Ende, und $d\vartheta$ den Winkel zwischen beiden bezeichnet. Setzt man $b = -l$, so dass M mit L zusammenfällt, so wird Gl. (1):

$$0 = -l\int_0^{2\pi} x d\vartheta + \pi l^2,$$

woraus nach Elimination des gemeinsamen Integrals:

$$R = \pi ab.$$

Das Resultat drückt das auf dem Titel angezeigte Theorem aus, für welches bereits in „Williamson's Calculus“ ein Beweis gegeben worden ist. Indem der Verfasser den vorstehenden eigenen Beweis giebt, macht er auf die beiläufig erhaltene Gleichung

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} x d\vartheta = \pi l$$

aufmerksam. In der That drückt diese ein von M unabhängiges bemerkenswertes Theorem aus. H.

M. D'OCAGNE. Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 313-316.

Der Verfasser giebt zuerst einen neuen und gleichfalls sehr einfachen Beweis für einen Satz von Mannheim, Journ. de Math. (2) XI. 193, welcher überdies zu einer Verallgemeinerung den Weg zeigt. Der Beweis stützt sich auf die zwei Relationen:

$$(1) \quad RR' = NN'; \qquad (2) \quad \frac{N}{R} + \frac{N'}{R'} = 2,$$

wo R, R' die Krümmungsradien zweier in Bezug auf einen Kreis O polar-reciproken Curven c, c' in entsprechenden Punkten M, M', ferner N, N' die Normalen in M, M', begrenzt durch die Lote aus O auf OM, OM', bezeichnen. Die Formel von Mannheim lautet dann:

$$RR' = \frac{r^2}{\cos^2 \alpha},$$

wo $\alpha = \angle MOM'$ und r der Radius des Richtkreises ist. Gl. (1) zeigt, dass für eine auf einen Pol O bezogene Curve die Projection des Krümmungsmittelpunkts auf den Radiusvector diesen in constantem Verhältnisse teilt. Ausserdem folgt die Relation:

$$\frac{R}{N} + \frac{N_1}{R_1} = 2,$$

wo R_1, N_1 sich auf die Fusspunktcurve c_1 von c beziehen. An die Stelle des Kreises setzt nun der Verfasser einen beliebigen centrischen Kegelschnitt k, in Bezug auf welchen c und c' polar reciprok sind. Dann geht Gl. (1) über in

$$RR' = \frac{\sin 2\omega \sin 2\omega'}{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'} NN',$$

wo ω, ω' die Winkel zwischen den Radienvectoren und der Focalaxe von k, und ϑ, ϑ' die Winkel der Tangenten an c, c' gegen dieselbe bezeichnen. Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so resultirt:

$$RR' = \frac{p^2}{\sin^3 \vartheta \sin^3 \vartheta'}.$$

H.

F. P. Ruffini. Della ragione che i raggi di curvatura di una linea piana hanno a quelli della sua evoluta. Bologna Mem. (4) VI. 715-730. (1886.)

Der Aufsatz behandelt folgende Aufgaben: 1) aus dem Verhältnis $\varrho_1 : \varrho$, wo ϱ der Krümmungsradius einer Curve, ϱ_1 der ihrer Evolute ist, ausgedrückt in Function von $u = \frac{dy}{dx}$, die Gleichung der Curve s zu finden; 2) aus der Gleichung jenes Verhältnis herzuleiten; 3) die Anwendung auf die zwei Fälle zu machen, wo zwei in Beziehung stehende Curven eine solche Gestalt und Lage haben, dass die entsprechenden Bogenelemente sich verhalten wie ihre Krümmungsradien und ihre Tangenten constante Winkel mit einander oder supplementare Winkel mit anderen Geraden bilden. Keine dieser Fragen bietet ein Problem dar; nur Ausrechnung wird verlangt, und es handelt sich hauptsächlich um Beispiele. H.

A. Mouchot. Propriétés descriptives segmentaires ou métriques de la circonférence de mode quelconque. C. R. CV. 602-604.

Dem Referenten ist es nicht gelungen, ein Ziel der hier angestellten Betrachtungen zu entdecken, die auf Neuheit keinen Anspruch machen. H.

M. Weill. Théorèmes de géométrie. Nouv. Ann. (3) VI. 269-272.

Der Herr Verfasser betrachtet zuerst zwei ebene Curven C und C' und einen Punkt O; sind M und M' zwei resp. auf C und C' derart angenommene Punkte, dass die in M und M' resp. an C und C' construirten Tangenten einander parallel sind, so ziehe man durch O eine Gerade gleich und parallel zu MM'; dann wird der Endpunkt μ dieser Geraden eine Curve C'' beschreiben. Es ist nun die Tangente an C'' in μ parallel den vorigen Tangenten; ferner ist das Bogenelement von C'' gleich der Differenz der entsprechenden Bogenelemente von C und C';

hieraus folgt, dass der Krümmungradius in μ gleich der Summe oder Differenz der Krümmungsradien in C und C' ist. Daraus ergeben sich noch einige Folgerungen.

Ferner werden wieder zwei Curven C und C' betrachtet; in einem Punkte M auf C wird die Tangente gezogen, welche C' in M' trifft, und es sei $\varrho = MM'$, und ω der Winkel, den MM' mit einer festen Geraden bildet. Das Flächenelement zwischen beiden Curven und zwei unendlich nahen Tangenten ist dann $\varrho^2 d\omega$. Geht nun durch einen Punkt O eine Gerade, die gleich und parallel MM' ist, so beschreibt der Endpunkt μ dieser Geraden eine Curve C'', deren Inhalt gleich dem zwischen C und C' liegenden Flächenstück ist. Auch hieran knüpfen sich interessante Zusätze.

Zum Schluss finden sich Bemerkungen über den Flächeninhalt von Fusspunktencurven. Mz.

E. Cesaro. Remarque de géométrie infinitésimale. Mathesis VII. 25-38.

Verschiedene Fragen aus der infinitesimalen Geometrie, die vermittelst der natürlichen Coordinaten der Curve (des Bogens s, des Krümmungsradius ϱ, u. s. w.) behandelt werden. Beispiele: 1) Die Hüllcurve der Kreise, welche die Krümmungsradien einer Epicykloide zu Durchmessern haben, ist eine inverse Curve dieser Epicykloide. 2) Die einzigen abwickelbaren Helikoide, auf denen ein freier Punkt sich derartig bewegen kann, dass die Axe sich auf einer abwickelbaren Oberfläche verschiebt, sind diejenigen, deren Wendungscurve als transformirte ebene Curve eine Tractrix ist. Mn. (Lp.)

H. G. L. Schotten. Ueber Fusspunktscurven. Progr. Gymn. Hersfeld.

Bewegt sich ein Winkel derart, dass jeder seiner Schenkel auf einer festen Curve gleitet, so beschreibt die Winkelspitze eine Curve, welche der Verfasser Scheitelpunktscurve nennt. Für bestimmte Formen der Grundcurven wird die Gleichung

jener Scheitelpunktscurve aufgestellt, und für einige Fälle discutirt. Aus der Specialisirung ergeben sich Fusspunktscurven. Bemerkenswertes bietet die Arbeit nicht. Schn.

G. Schlabach. Ueber die Enveloppen, welche bei der Bewegung einer Geraden längs einer gegebenen Curve entstehen. Diss. Marburg. 39 S. 8°.

B. Theorie der algebraischen Curven.

H. G. Zeuthen. Om algebraiske Kurvers Bestemmelse ved Punkter. Zeuthen T. (5) V. 65-79.

Herr Zeuthen giebt in diesem Aufsatz eine genaue und leichtfassliche Darstellung der gewöhnlichsten Sätze über die Bestimmung der ebenen algebraischen Curven durch Punkte. Diese Sätze werden ausschliesslich durch Constantenabzählungen hergeleitet.

Von den gegebenen Sätzen soll hier nur hervorgehoben werden:

Wenn P die vollständige Schnittpunktengruppe von $m_1 m_2$ Punkten zweier Curven φ_{m_1} und φ_{m_2} m_1^{ter} und m_2^{ter} Ordnung ist, so wird bekanntlich eine Curve $\varphi_{m_1+m_2-3}$ durch einen Punkt der Punktgruppe gehen, wenn sie durch die übrigen geht. Hier wird aber zugleich bewiesen, dass es für $\varphi_{m_1+m_2-3}$ immer $m_1 m_2-1$ Bedingungen sind, durch $m_1 m_2-1$ willkürliche Punkte unter den Punkten P zu gehen. Es wird vorausgesetzt, dass P keine zusammenfallenden Punkte enthält.

Der Riemann-Roch'sche Satz wird unter der folgenden Form gegeben:

Eine Punktgruppe P gehört zu der vollständigen Schnittpunktgruppe zweier Curven φ_{m_1} und φ_{m_2}. Die Curven φ_{m_1} und φ_{m_2} schneiden sich noch ausser in P in einer Punktgruppe Q.

Eine Curve φ_n geht durch P und wird durch l Punkte unter den Punkten P gehen müssen, wenn sie durch die übrigen geht; dann kann man immer durch Q und $l-1$ willkürliche Punkte eine Curve $\varphi_{m_1+m_2-n-3}$ legen.

Indem man immer $n \geqq m_1$ und $n \geqq m_2$ annimmt, sieht man, wie der ausgesprochene Satz die Untersuchung der Punktgruppen vereinfachen kann. V.

G. Humbert. Sur quelques propriétés métriques des courbes. Nouv. Ann. (3) VI. 526-547.

In dieser Arbeit wird zunächst eine ebene algebraische Curve n^{ten} Grades betrachtet, deren Gleichung in homogenen Coordinaten $f(x, y, z) = 0$ sei, und analog ein Büschel von Curven m^{ten} Grades, dessen Gleichung $F - u\varphi = 0$, wo u der variable Parameter ist. Irgend eine Curve des Büschels trifft $f = 0$ in $m \cdot n$ Punkten mit den Coordinaten:

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \ldots$$

Ist nun $\dfrac{Q(x, y, z)}{V(x, y, z)}$ der Quotient zweier homogenen Polynome in x, y, z, die überdies gleichen Grades sind, so ist die Summe

$$\sigma = \frac{Q(x_1, y_1, z_1)}{V(x_1, y_1, z_1)} + \frac{Q(x_2, y_2, z_2)}{V(x_2, y_2, z_2)} + \cdots$$

eine symmetrische Function der Coordinaten derjenigen Punkte, in denen die Curven $f = 0$, $F - u\varphi = 0$ sich schneiden; diese Summe ist daher eine rationale Function von u. Es wird nun bewiesen, dass diese Summe constant bleibt, wenn die Curven des Büschels, welche durch die Durchschnittspunkte der Curven $f = 0$, $V = 0$ gehen (wobei die Function $\dfrac{Q}{V}$ unendlich wird), in jedem dieser Punkte mit der Curve $f = 0$ eine Berührung haben, deren Ordnung wenigstens gleich dem Unterschiede unter den Ordnungen der Berührung ist, die die Curve $f = 0$ mit den Curven $V = 0$, $Q = 0$ im betrachteten Punkte hat. Geht die Curve $Q = 0$ überhaupt nicht durch diesen Punkt, so hat man, um das Theorem anzuwenden, die Ordnung ihrer Berührung mit

$f = 0$ als gleich -1 zu betrachten. Hieran schliessen sich zwei Corollare und mehrfache Anwendungen. Mz.

R. W. Genese. On relations between circles and algebraic curves with applications to dynamics. Lond. M. S. Proc. XVIII. 304-313.

Werden vom Mittelpunkte eines Kreises nach seinen Schnittpunkten mit einer Curve n^{ter} Ordnung Radienvectoren gezogen, so ist die Summe ihrer Azimuthe bezüglich einer gegebenen Axe unabhängig vom Radius und Mittelpunkte des Kreises. Naheliegende Anwendungen dieses und des von d'Ocagne bewiesenen Satzes, dass die Mitte des Schnittpunktsystemes eines Kreises mit einer Curve n^{ter} Ordnung unabhängig vom Kreisradius ist, auf mechanische Probleme beschliessen die Arbeit. Js.

M. Weill. Sur un théorème de Chasles. Nouv. Ann. (3) VI. 82-83.

Einfacher Beweis des bekannten Chasles'schen Satzes, den Salmon schon in die erste Auflage seiner Higher plane curves aufgenommen hatte: Das Centrum der mittleren Abstände der Berührungspunkte eines beliebigen Systems paralleler Tangenten bei einer gegebenen Curve ist ein fester Punkt. Lp.

R. Lachlan, A. R. Johnson, Matz. Solution of question 9011. Ed. Times XLVII. 106.

Das Product der drei Normalen, die man von einem Punkte eines Kegelschnittes an ihn ziehen kann, ist gleich dem Producte der Lote aus jenem Punkte auf die Asymptoten und des Durchmessers des Krümmungskreises in dem Punkte. Für eine Curve m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse ist das Product der $m+n-1$ Normalen aus einem ihrer Punkte gleich dem Producte der $n-2$ Tangenten, der m Lote auf die Asymptoten und des Durchmessers des Krümmungskreises. Lp.

W. Weiss. Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts. Math. Ann. XXIX. 382-385.

Es seien C_1 und C_2 zwei (ebene oder räumliche) algebraische Curven von den Ordnungen n_1, n_2, den Geschlechtern π_1, π_2 und mit β_1, β_2 Spitzen. Diese beiden Curven seien so aufeinander bezogen, dass jedem Punkte der C_1 x_2 Punkte auf C_2, und jedem Punkte der C_2 x_1 Punkte auf C_1 entsprechen, und dass dabei auf der ersten Curve t_1 und auf der zweiten Curve t_2 Coincidenzen auftreten.

Die Verbindungslinien correspondirender Punkte bilden dann eine Regelfläche (deren Geschlecht mit p bezeichnet sei), auf der C_1 eine x_2-fache Curve ist, die von einer Erzeugenden nur einmal getroffen wird, t_2 eigentliche pinch-points enthält und β_1 Rückkehrpunkte hat. Das Analoge gilt für C_2.

Dann gilt, wie der Verfasser rein geometrisch nachweist, die Relation

$$2p-2 = t_2+2x_2(\pi_1-1)$$

und entsprechend

$$2p-2 = t_1+2x_1(\pi_2-1).$$

Daraus folgt aber durch Subtraction:

$$t_1-t_2 = 2x_2(\pi_1-1)-2x_1(\pi_2-1),$$

d. i. die Zeuthen'sche Geschlechtsformel. My.

Fr. Meyer. Zur Erzeugung der rationalen Curven. Böklen Mitt. II_1. 33-37.

Herr Brill hat Münch. Ber. 1885. 276ff. gezeigt, wie man zu einer gegebenen rationalen Curve n^{ter} Ordnung im allgemeinen auf mannigfaltige Weise zwei rationale Klassencurven finden kann, deren Tangenten passend so auf einander bezogen werden können, dass die Punkte der gegebenen Curve die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Tangenten sind. Herr Meyer löst die gewissermassen umgekehrte Aufgabe, die gegebene Curve n^{ter} Ordnung (und von der Klasse $2n-2$) durch

ihre Tangenten zu erzeugen, indem er eine Schar von Ordnungscurven bestimmt, deren entsprechende Punkte auf derselben Tangente der gegebenen Curve liegen. R. M.

M. Weill. Sur les courbes unicursales. Nouv. Ann. (3) VI. 205-207.

Bedeuten $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ ganze Functionen n^{ten} Grades von λ, so beschreibt der Punkt $x = \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)}$, $y = \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}$ eine rationale ebene Curve n^{ter} Ordnung. Durch Partialbruchzerlegung der Quotienten $\frac{f}{h}$, $\frac{g}{h}$ gelangt der Verfasser zu dem Satze, dass der die Curve beschreibende Punkt aufgefasst werden kann als das Centrum der mittleren Entfernungen bezw. der p Ecken eines einfachen p-Eckes, die sich auf p festen, durch einen Punkt laufenden Geraden bewegen, während $p-1$ der Seiten ebensoviel feste Punkte passiren. My.

G. B. Guccia. Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p. Palermo Rend. I. 169-189.

Fortsetzung der Arbeit „Generalizzazione di un teorema di Nöther“ (F. d. M. XVIII. 1886. 671). Während dort der Fall $p = 0$ behandelt wurde, untersucht der Verfasser hier mittels derselben Methoden den Fall $p = 1$ und gelangt zu dem Resultate, dass jedes lineare System elliptischer Curven durch quadratische Transformationen auf eins der folgenden Systeme niedrigster Ordnung reducirt werden kann: 1) ein lineares System elliptischer Curven 3ter Ordnung mit 0 bis 7 einfachen Basispunkten, 2) ein ebensolches System von Curven 4ter Ordnung mit zwei doppelten Basispunkten, 3) ein Curvenbüschel von der Ordnung $3m$ mit 9 m-fachen Basispunkten. Der letzte, bereits von Bertini behandelte Fall tritt ein, wenn die Coefficienten der erzeugenden Curven des Systems nur von einem willkürlichen Parameter linear abhängig sind, die beiden

anderen Fälle, wenn die Zahl dieser Parameter grösser ist. An diesen Satz knüpfen sich verschiedene Folgerungen hinsichtlich der zwischen den charakteristischen Zahlen des reducirten Systems bestehenden Beziehungen und der Schnittpunktzahlen zweier Curven. Schliesslich gelangt der Verfasser zu Verallgemeinerungen der Sätze von Chasles und Jonquières über die Erzeugung algebraischer Curven, und schliesst mit einem Satze über die Anzahl der willkürlich wählbaren Basispunkte eines Büschels von Curven n^{ter} Ordnung, die auf einer gegebenen Curve m^{ter} Ordnung ($n < m$) liegen sollen. Schg.

K. Bobek. Ueber hyperelliptische Curven. Math. Ann. XXIX. 386-412.

Eine Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p > 1$ (C_m^p) besitzt nur eine einzige lineare einfach-unendliche Schar $g_2^{(1)}$ von Gruppen zu zwei Punkten, welche durch die adjungirten Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. Dieser Satz wird benutzt, um die C_m^p auf zwei rationale Curvenscharen möglichst niedriger Ordnung zu beziehen, deren Schnitte dann die C_m^p erzeugen. Die Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Im ersten wird zunächst der Satz bewiesen, dass für eine hyperelliptische C_m^p stets $m > p+1$ sein muss, und die C_m^p für $m = p+2$ immer einen p-fachen Punkt besitzt; dann folgt die Betrachtung der Enveloppen-Schar, welche durch die Verbindungslinien $\overline{a\alpha}$ der Punktepaare der $g_2^{(1)}$ gebildet wird. Diese Curven sind von der Klasse $c = m-p-1$, und sie sind die Curven niedrigster Ordnung, welche die $g_2^{(1)}$ auf der C_m^p ausschneiden. Ihre Gleichung enthält einen Parameter rational von der Ordnung c. Mittels dieser Enveloppen gelingt es dem Verfasser, der Curvengleichung eine bestimmte Form zu geben, welche gestattet, die hyperelliptischen Curven auf verschiedene Art zu erzeugen:

1) können sie erzeugt werden durch die adjungirten Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und die Tangenten der Enveloppen;

2) durch Kegelschnittsysteme und dieselben Tangenten;

3) durch ein Kegelschnittsystem und adjungirte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen behandelt der Autor im zweiten Teile die speciellen Curven C_{p+3}^{p} und C_{2p}^{p}, denn die zweite Erzeugungsart liefert für sie unmittelbar die Gleichungen selbst, welche aufgestellt werden. Schliesslich wird noch das vollständige System der zu C_{p+3}^{p} adjungirten Curven p^{ter} Ordnung gegeben, wobei man den Satz erhält, „dass jede zu C_{p+3}^{p} adjungirte Curve p^{ter} Ordnung, welche durch die beiden Punktepaare $b_1\beta_1$ und $b_2\beta_2$ geht, auch die Schnittpunkte der Geraden $b_1\beta_1$ und $b_2\beta_2$ enthalten muss“. Bm.

K. Bobek. Ueber hyperelliptische Curven. III.
Wien. Ber. 31-41.

Diese Note schliesst sich an zwei frühere Mitteilungen desselben Verfassers an (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 709 ff.). Sie bezieht sich auf diejenigen hyperelliptischen Curven C_{2p}^{p} von der Ordnung $2p$ und dem Geschlechte p, deren Gleichung durch Elimination von λ aus den Gleichungen

$$\prod_{1}^{p}{}_k(\lambda-\lambda_k)\sum_{1}^{p}{}_i\frac{A_i}{\lambda-\lambda_i}=0,\quad \tau_0+\sigma\lambda+\tau_1\lambda^2=0$$

hervorgeht. Hier bedeuten $A_1, A_2, \dots, A_p$ lineare und τ_0, σ, τ_1 quadratische Functionen der Coordinaten. Nachdem der Verfasser die Doppelpunkte einer solchen Curve C_{2p}^{p} bestimmt und die Gleichungen ihrer p adjungirten Curven $(2p-3)^{\text{ter}}$ Ordnung aufgestellt hat, wendet er sich zu der Frage, ob die betrachtete Curve C_{2p}^{p} die allgemeine ihrer Art ist. Er findet, dass dieses der Fall ist für die Curven von einer der Ordnungen 4, 6, 8 mit getrennt liegenden Doppelpunkten, dass dagegen die betrachteten Curven besondere Eigenschaften besitzen, sobald sie von höherer als der achten Ordnung sind. Bei dieser Untersuchung gelangt der Verfasser zu mehreren allgemeinen Sätzen über die hyperelliptischen Curven, z. B.:

„Legt man durch ein Punktepaar a, α einer hyperelliptischen

Curve C_m^p zwei Kegelschnitte K und K_1, welche C_m^p noch in den Gruppen (K) und (K_1) von je $2m-2$ Punkten treffen, so geht durch irgend welche p Paare von C_m^p und (K) respective (K_1) je eine zu C_m^p adjungirte Curve der $(m-1)^{\text{sten}}$ Ordnung, und beide Curven berühren einander in den d Doppelpunkten von C_m^p."

Hz.

C. Weltzien. Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters darstellen lassen. Math. Ann. XXX. 535-545.

Die Arbeit behandelt in zwei Abschnitten die Curven, welche durch die Gleichungen:

$$\varrho x_1 = (a_0 t + a_1).\sqrt{E(t)} + (a_2 t + a_3)\sqrt{F(t)},$$
$$\varrho x_2 = (b_0 t + b_1)\sqrt{E(t)} + (b_2 t + b_3)\sqrt{F(t)},$$
$$\varrho x_3 = (c_0 t + c_1)\sqrt{E(t)} + (c_2 t + c_3)\sqrt{F(t)}$$

dargestellt werden, in denen $E(t)$ und $F(t)$ ganze Functionen von t bedeuten.

Im ersten Abschnitte wird eine Methode zur Bildung der Curvengleichung in x_1, x_2, x_3 angegeben und für den Fall der elliptischen Curve vierter Ordnung ($E(t)$ und $F(t)$ quadratische Functionen), für die Curven fünfter Ordnung vom Geschlechte 2 ($E(t)$ und $F(t)$ Functionen dritten Grades) und für die Curven sechster Ordnung vom Geschlechte 3 ($E(t)$ und $F(t)$ Functionen vierten Grades) wirklich ausgeführt.

Im zweiten Abschnitte wird gezeigt, wie sich die Gleichung $n(n-3)^{\text{ten}}$ Grades bilden lässt, welche zur Bestimmung der Parameter der Doppelpunkte dient, und von der bereits Clebsch (J. für Math. LXIV) bewiesen hatte, dass sie durch eine Gleichung vom Grade $\frac{1}{2}n(n-3)$ und durch $\frac{1}{2}n(n-3)$ quadratische Gleichungen gelöst werden kann; endlich wird dann für die erwähnten speciellen Curven die Gleichung $\frac{1}{2}n(n-3)^{\text{ten}}$ Grades vollständig aufgestellt.

Bm.

W. GROSS. Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind. Diss. Tübingen.

Die Interpretation von binären Combinanten binärer Formen auf rationalen Curven (nämlich solchen, für welche die homogenen Coordinaten eines Punktes den gegebenen binären Formen proportional sind) ist seit geraumer Zeit mit Erfolg betrieben worden. Erst in letzter Zeit ist dagegen der Uebergang zu ternären, quaternären u. s. f. Combinanten binärer Formen gemacht worden, sowie zu der Verwertung derselben für die Untersuchung mehrfach ausgedehnter geometrischer Gebilde, welche in dem bez. Raume zu der rationalen Curve in invarianter Beziehung stehen.

Die vorliegende Arbeit behandelt in diesem Sinne das System von drei binären Formen dritten resp. vierten Grades, d. i. geometrisch die rationalen ebenen Curven dritter resp. vierter Ordnung.

Zuerst wird eine Reihe allgemeiner, von Herrn Brill stammender Principien angegeben für die Aufstellung sämtlicher binärer und ternärer Combinanten eines Systems von drei binären Formen n^{ten} Grades $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$, d. h. solcher Bildungen, die sich bei linearen Transformationen sowohl von λ wie der f_i invariant verhalten. Analog einem Gordan'schen Fundamentalsatze über die binären Combinanten lässt sich auch hier eine Reihe von viererlei „erzeugenden" Functionen aufstellen, aus denen durch einfache Ersetzungs- und Ränderungsprocesse alle möglichen ternären Combinanten erwachsen. Fast von selber fliesst daraus die Existenz eines „endlichen" Systems von Grundformen, der sogenannten „Elementarcombinanten": alle ternären Combinanten der f_i sind binäre simultane In- oder Covarianten jener. Ergiebt die Anwendung dieser Principien bereits im Falle $n = 3$ eine elegantere Gestaltung der bisherigen Theorie der rationalen Curven dritter Ordnung, sowie einen vollständigen Einblick in die sie erzeugenden Curvenscharen, so führt das entsprechende Studium der Curven vierter Ordnung zu einer Fülle einfacher und neuer Sätze über Curven der niedrigsten Ordnung und

Klasse, welche der gegebenen invariant zugeordnet sind. Ein besonderes Interesse erweckt unter anderen der Satz, dass der durch die sechs Wendepunkte gehende Kegelschnitt mit den beiden anderen Kegelschnitten, welche die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten passiren, resp. die sechs Wendetangenten berühren, einem und demselben Büschel angehören.

Auch die (in anderer Form zuerst vom Referenten angegebenen) die Curve einhüllenden Kegelschnittscharen erlauben eine elegante Darstellung. My.

J. Kraus. Die geometrische Deutung einer gewissen Invariante bei ebenen Collineationen. Math. Ann. XXIX. 234-238.

Das Verschwinden der zu drei ebenen Reciprocitäten gehörigen simultanen, trilinearen Invariante H wird geometrisch gedeutet.

Es wird gesagt, dass ein Viereck $abcd$ auf einem zweiten $a'b'c'd'$ (in der unendlichen Ebene gelegenen) „ruht“, wenn es ein Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ giebt, welches dem ersten Viereck „verkehrt eingeschrieben“ und dem andern umgeschrieben ist.

Ferner gehört zu zwei geraden Punktreihen einer Ebene xyz, $x'y'z'$ stets eine „Involutionslinie“, d. i. der Ort der Punkte, aus denen involutorische Strahlenpaare nach drei Punktepaaren xx', yy', zz' hingehen. Liegen nun in einer Ebene irgend zwei vollständige Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ mit den Nebenecken efg, $e'f'g'$, und man construirt zu je zwei homologen Punktreihen bce, $b'c'e'$ etc. die Involutionslinie, so beweist der Verfasser zunächst, dass die so entstehenden sechs Geraden wieder die Seiten eines vollständigen Vierecks, „des Involutionsvierecks“ der beiden gegebenen, bilden. Vermöge der drei gegebenen Reciprocitäten (oder der zwei ihnen äquivalenten Collineationen) mit verschwindender Invariante H werden dann jedem Viereck der Ebene zwei andere als entsprechend zugewiesen, derart, dass das Involutionsviereck je zweier der drei Vierecke auf dem dritten ruht.

My.

O. Schlesinger. Ueber conjugirte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve dritter Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve dritter Klasse. **Math. Ann. XXX. 455-477.**

Von p Punkten der Ebene wird gesagt, dass sie ein „Polar-p-eck“ einer Curve n^{ter} Klasse K_n bilden, wenn die letztere derjenigen linearen Schar von Curven n^{ter} Klasse angehört, welche sich aus den n-fach gezählten p Punkten zusammensetzt. Bekanntlich ist dann jede Curve n^{ter} resp. niedrigerer Ordnung, welche durch solche p Punkte hindurchgeht, zur K_n „conjugirt“ oder „apolar“, d. h. die bilineare Invariante der die Ordnungs- und Klassencurve darstellenden Formen verschwindet.

Es erhebt sich nun die umgekehrte Frage, diejenigen Polar-p-Ecke einer K_n aufzufinden, welche einer zu ihr conjugirten C_n einbeschrieben sind, eine Frage, die bisher nur für den Fall $n = 2$ genügend studirt worden ist.

Der Verfasser untersucht hier den Fall $n = 3$ und erhält als Hauptresultat, dass dann der C_3 einfach unendlich viele Polar-Fünfecke der K_3 einbeschrieben sind.

Nach Aufstellung einleitender Sätze über die einfachsten Eigenschaften eines Polarfünfecks einer K_3 behandelt der Verfasser allgemein die vorbereitende Frage, wie zwei gegebene Curvenbüschel n^{ter} und m^{ter} Ordnung projectivisch einander so zugeordnet werden können, dass sie eine zu einer gegebenen K_{m+n} conjugirte Curve erzeugen. Es ergiebt sich als Kriterium dafür, dass die gemeinte Zuordnung oder Homographie zu einer besonders ausgezeichneten Homographie der beiden Büschel (in binärem Sinne) conjugirt zu sein hat.

Die Anwendung dieses Ergebnisses auf den vorliegenden Fall ($n = 1$, $m = 2$) führt zu dem grundlegenden Satze: Ist K_3 zu C_3 conjugirt, und legt man durch zwei Punkte π_1, π_2 der C_3 die eine zu K_3 conjugirte C_2, welche C_3 noch in α_1, α_2, α_3, α_4 schneiden möge, so haben alle C_2 durch diese 4 Punkte bez. K_3 denselben Polarpunkt, und dieser liegt auf $\pi_1\pi_2$.

Die weitere Verfolgung dieses Satzes führt zu der Beant-

wortung der ursprünglichen Frage. Durch jeden Punkt π der C_3 geht eine und nur eine zu K_3 apolare C_2, deren fünf weitere Schnittpunkte mit C_3 ein Polarfünfeck der K_3 bilden. Dieselbe lässt sich durch Schnitte von Geraden und Kegelschnitten mit der C_3 einfach construiren.

Liegt umgekehrt ein der C_3 einbeschriebenes Polarfünfeck der K_3 vor, und schneidet der dem letzteren umbeschriebene Kegelschnitt C_2 aus C_3 noch den Punkt π aus, so ist C_2 gerade die durch den vorhergehenden Satz charakterisirte Curve zweiter Ordnung. Diese C_2 bilden eine dreigliedrige Schar y; durch jeden Punkt der Ebene gehen drei Curven dieser Art (welche demselben Büschel angehören).

Es mag bemerkt werden, dass der Verfasser nur mit den einfachsten Mitteln der symbolischen Rechnung operirt und auch der Geometrie der Curven dritter Ordnung nur wenige, fundamentale Sätze entlehnt. My.

G. Humbert. Sur les courbes algébriques rectifiables.
C. R. CIV. 1051-1053, Delft Ann. de l'Éc. Polyt. LVII. 171-188.

Die allgemeinen Resultate sind in den zwei Sätzen ausgesprochen: Die algebraischen ebenen Curven, deren Bogen sich als rationale Functionen der Coordinaten ergeben, sind Evoluten der „einfachen algebraischen Richtungscurven“. Sie sind Katakaustiken algebraischer Curven für parallel einfallende Strahlen, und umgekehrt. „Richtungscurve“ heisst eine Curve $f(x, y) = 0$, wenn $f_x^2 + f_y^2$ ein Quadrat in x, y ist. „Einfach“ heisst eine solche, wenn sie „von ihren Normalen orthogonal geschnitten wird“. Als specielle Curven von rationalem Bogen werden genannt: die Curve $\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{1}{3}\omega = a^{\frac{1}{3}}$, Katakaustik für Strahlen normal zur Axe; ausserdem Epicykloiden in zwei Fällen. Ein rationaler Bogen hat stets die Form

$$s = B(x, y) : C(x, y),$$

wo $B = 0$ und $C = 0$ die Gleichungen adjungirter Curven zu $f = 0$ sind. H.

G. Humbert. Sur les arcs des courbes planes algébriques.
Ann. de l'Éc. Pol. LVII. 171-188, C. R. CIV. 1826-1827.

Der ausgesprochene Zweck dieser Arbeit ist der Nachweis, dass man von einer beliebigen Curve auf unendlich viele Arten eine gewisse Anzahl von Bogen bestimmen kann, deren Summe rectificabel ist. Es werden folgende Sätze hergeleitet. Zieht man die gemeinsamen Tangenten an eine beliebige algebraische Curve und an eine Curve, deren Gleichung in tangentiellen und rechtwinkligen Coordinaten die Form hat

$$F^2(u, v, w) - \lambda(u^2+v^2)G^2(u, v, w) = 0,$$

wo F und G homogen, resp. vom Grade μ und $\mu-2$ sind, und lässt man den Parameter λ variiren, so ist die algebraische Summe der von den Berührungspunkten auf der festen Curve durchlaufenen Bogen rational in $\sqrt{\lambda}$ ausdrückbar. Zieht man an eine algebraische Curve alle Tangenten, auf denen zwei feste Gerade ein Stück $= l$ begrenzen, und lässt dann l variiren, so durchlaufen die Berührungspunkte auf der Curve Bogen, deren Summe eine rationale Function von l ist. Zieht man die gemeinsamen Tangenten an eine algebraische Curve und an einen Kreis von festem Mittelpunkte und lässt dessen Radius variiren, so ist die algebraische Summe der von den Berührungspunkten durchlaufenen Bogen in jedem Augenblicke bis auf eine Constante gleich der Variation der algebraischen Summe der Längen der gemeinsamen Tangenten. Die 2ν Berührungspunkte einer algebraischen Curve ν^{ter} Klasse mit den gemeinsamen Tangenten dieser Curve und eines Kreises lassen sich zu zweien derart gruppiren, dass sie auf der Curve ν Bogen bestimmen, deren algebraische Summe der algebraischen Summe der Längen der Tangenten gleich ist. Zieht man an eine algebraische Curve, welche nicht durch die cyklischen Punkte der Ebene geht, die denselben Kreis berührenden Normalen und lässt dann dessen Radius variiren, so variirt die algebraische Summe der von den Basen der Normalen auf der Curve durchlaufenen Bogen proportional dem Radius. Die algebraische Summe der von denjenigen Punkten durchlaufenen Bogen, in welchen eine algebraische Curve eine gegebene

Krümmung hat, ist Null. Auf einer algebraischen Curve n^{ten} Grades, welche nicht durch die cyklischen Punkte der Ebene geht, bestimmen die Basen der einen Kreis vom Radius r berührenden 2ν Normalen ν Bogen, deren algebraische Summe $2nr$ ist. Betrachtet man auf einer solchen Curve die Punkte, wo die Tangente, bis zu einer festen Geraden gerechnet, eine gegebene Länge hat, und lässt diese Länge um v variiren, so ist die algebraische Summe der von den Punkten durchlaufenen Bogen $2nv$. Ebenso wenn statt der Tangente die Normale genommen wird.

H.

L. Raffy. Sur la rectification des courbes planes unicursales. C. R. CIV. 892-893.

Ist der Bogen einer algebraischen ebenen Curve rational, so ist die Evolvente rational und umgekehrt. Als Evolute ist wieder erstere rational, wenn die Krümmung der letzteren rational ist. Daher ist die rationale Krümmung der Evolvente notwendige und ausreichende Bedingung für den rationalen Bogen der Evolute. Vorausgesetzt ist, dass die Coordinaten des laufenden Punktes der Evolute x, y rational in einem Parameter t sind. Alle Curven von rationaler Krümmung nun sind Enveloppen von Geraden der Form

$$\beta^2 u - \alpha^2 v - 2\gamma = 0,$$

wo $u = x + iy$, $v = x - iy$, und α, β, γ rationale Functionen eines Parameters sind. Hieraus folgt der allgemeine Ausdruck der Curven von rationalem Bogen. Insbesondere ergiebt sich, dass die Krümmung der Bogen einer kubischen Curve rationaler Krümmung stets eine kubische ganze Function ist. H.

A. Fuchs. Untersuchung der Brennpunktseigenschaften höherer algebraischer Curven, insbesondere derer der dritten und vierten Ordnung. Diss. Marburg. 55 S. 8°.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

W. Veltmann. Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Coordinaten der Eckpunkte. Schlömilch Z. XXXII. 339-345.

Nach einigen einleitenden geometrischen Betrachtungen, in welchen einfach und mehrfach geschlossene Polygone definirt werden, ferner die Zerlegung eines mehrfach geschlossenen Polygons in einfach geschlossene und die Zerlegung eines einfach geschlossenen Polygons in Dreiecke besprochen ist, wird die Determinante einer geraden Strecke *AB* als

$$D_{ab} = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix}$$

definirt $[A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b)]$. Hat man nun ein einfach geschlossenes Polygon

$$P_1 P_2 \ldots P_n, \; [P_1 = (x_1, y_1), \; P_2 = (x_2, y_2), \ldots],$$

so ergiebt sich der Inhalt *F* des Polygons aus der Formel:

$$2F = D_{12} + D_{23} + \cdots + D_{n-1,n} + D_{n,1}.$$

Dieselbe Formel ist auch beim mehrfach geschlossenen Polygon anwendbar, wobei *F* die Summe der einfach geschlossenen Polygone bedeutet, in die das mehrfach geschlossene sich zerlegen lässt. Der Inhalt eines jeden solchen einfach geschlossenen Polygons ist dabei positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem sein Umfang die rechtläufige oder rückläufige Richtung hat.

Mz.

R. Hoppe. Das Viereck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. Hoppe Arch. (2) V. 345-350.

Von den Werten der Coordinaten der vier Ecken des Vierecks, bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen, ausgehend, stellt der Verf. zuerst die Bedingung dafür auf, dass das Viereck trägheitscentrisch ist, d. h. derart, dass allen durch den Schwerpunkt gehenden Axen gleiche Trägheitsmomente entsprechen, dann die Bedingung dafür, dass das Viereck ein Kreissehnen-

viereck ist; endlich veranlasst die Frage nach der Bedingung dafür, dass das Viereck ein Kreistangentenviereck ist, eine etwas umständliche, verschiedene Einzelfälle unterscheidende Untersuchung. Lp.

H. Seipp. Einige Sätze über Massenmittelpunkte. Hoppe Arch. (2) V. 178-189.

Der Verfasser nimmt in den Eckpunkten eines beliebigen (räumlichen oder ebenen) Vielecks gleich grosse Massen an und beweist mit Hülfe der bekannten Ausdrücke für die Coordinaten des Massenmittelpunktes mehrere einfache rein geometrische Sätze, von denen der erste ohne Rechnung sofort klar ist. Der zweite schon in Poinsot's Éléments de statique § 166 stehende Satz lautet: In jedem räumlichen oder ebenen n-Eck ist die n-fache Quadraten-Summe der von dem Schwerpunkte E der Ecken nach den Ecken gezogenen Geraden gleich der Summe der Quadrate sämtlicher Seiten des vollständigen n-Ecks. Ein dritter Satz bezieht sich auf die algebraische Summe gewisser Dreiecksflächen. Lp.

E. Pascal. Costruzioni geometriche di tre poligoni regulari. Batt. G. XXV. 82-97.

In dieser Arbeit wird die geometrische Construction solcher regulären Vielecke gezeigt, bei denen ein Kegelschnitt erforderlich ist. Die ersten drei Fälle, in denen $p-1$ den Factor 3 nur einmal und sonst nur den Factor 2 enthält (wobei p eine Primzahl und zugleich die Anzahl der Seiten des Polygons ist), sind folgende: $p=7$, $p=13$, $p=97$. Es handelt sich in jedem dieser Fälle um die Construction der Wurzeln einer kubischen Gleichung. Für $p=7$, 13, 97 hat man bezw. die Gleichungen:

$$x^3+x^2-2x-1=0,$$
$$x^3+x^2-4x+1=0,$$
$$x^3+x^2-32x-79=0.$$

Eine jede dieser Gleichungen wird zunächst durch Substitution von $x=y-\frac{1}{3}$ in eine andere mit y, die vom zweiten Gliede

frei ist, verwandelt. Letztere wird dann nach bekannter Art angesehen als entstanden aus zwei Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = a^2, \quad y^2 = mx$$

durch Elimination von x. Nach passender Constantenbestimmung ergiebt sich die Construction mit Hülfe von Kreisen und einer Parabel. Mz.

E. Neovius. Ueber eine specielle geometrische Aufgabe des Minimums. Gött. N. 407-410.

Es handelt sich um die bekannte Aufgabe, in einer Ebene durch einen Punkt M eine Gerade zu legen, auf welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels eine möglichst kleine Strecke abschneiden. Der Herr Verfasser macht darauf aufmerksam, dass, wenn die drei Wurzeln der kubischen Gleichung, auf welche das Problem führt, reell sind, einer derselben ein Maximum entspricht, den beiden andern ein Minimum. A.

J. J. Walker, T. R. Terry. Solution of question 8556. Ed. Times XLVI. 69.

Man bezeichne mit S das Resultat der Einsetzung der Coordinaten eines Punktes P in die allgemeine Gleichung eines Mittelpunkts-Kegelschnittes. Dann ist S dem Quadrate des Inhaltes des Vierecks proportional, das die beiden Tangenten von P an den Kegelschnitt und die Verbindungslinien des Mittelpunktes mit den Berührungspunkten zu Seiten hat. Lp.

Th. Meyer. Lehrsatz von den Kegelschnitten. Hoppe Arch. (2) V. 211-214.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass auf der Hauptaxe einer Curve zweiter Ordnung im allgemeinen zwei Paare von Punkten R, S und R', S' vorhanden sind, die eine besondere Eigenschaft haben. Zieht man nämlich von einem beliebigen Curvenpunkte P die Gerade nach R und verlängert $\overline{PR}$ bis zum zweiten Durchschnitt P_1 mit der Curve, construirt dann an die Curve in P_1

die Tangente, so ist diese allemal senkrecht zu der Geraden, die P mit S verbindet. Ferner sind R', S' symmetrisch zu R, S in Bezug auf den Mittelpunkt der Curve und haben im übrigen dieselbe Eigenschaft wie R, S. Ist Q der Durchschnitt von $\overline{PS}$ mit der Tangente in P_1, so ist das Product $\overline{PS}.\overline{SQ}$ unveränderlich. Auch sind R, S durch die Brennpunkte der Curve harmonisch getrennt.

Die Existenz der Punkte R, S, R', S' mit diesen Eigenschaften wird nun durch eine räumliche Betrachtung nachgewiesen, wobei der gegebene Kegelschnitt als Projection eines solchen Rotationskegels erscheint, bei welchem jede die Axe enthaltende Ebene zu einander lotrechte Linien aus dem Kegel ausschneidet. Hier mag nur für die Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ angegeben werden, dass Punkt S durch die Coordinaten:

$$x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\,.\sqrt{a^2-b^2}}{a},\qquad y=0$$

und Punkt R durch:

$$x=\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y=0$$

gegeben ist. Analoges gilt für die Hyperbel und mit einiger Modification für die Parabel. Mz.

E. Goursat. Remarques sur la détermination des foyers d'une conique. Nouv. Ann. (3) VI. 465-468.

Die Brennpunkte eines Kegelschnitts mit der Gleichung:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

sind die Durchschnitte der beiden Curven:

$$(b^2-ac)(x^2-y^2)+2(be-cd)x+2(ae-bd)y+c^2-d^2+f(a-c)=0,$$
$$2(b^2-ac)xy+2(bd-ae)x+2(be-cd)y+2(bf-de)=0.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit i (d. i. $\sqrt{-1}$) und addirt sie zur vorletzten, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$Az^2+Bz+C=0,$$

wo $z = x + yi$ gesetzt ist. Diese letzte Gleichung wird aufgelöst und discutirt. Hierauf wird das Problem der Brennpunkte einer beliebigen algebraischen Curve behandelt. Die Tangentialgleichung einer solchen sei:

$$\varphi(m, p) = 0,$$

wobei $y = mx + p$ die Gleichung einer Tangente dieser Curve ist. Sind nun x_1, y_1 die Coordinaten eines reellen Brennpunktes dieser Curve, so muss

$$\varphi(i, y_1 - ix_1) = 0$$

sein; oder, wenn wieder $z = x_1 + iy_1$ gesetzt ist:

$$\varphi(i, -iz) = 0.$$

Am Schluss wird aus diesen Betrachtungen der bekannte Satz hergeleitet, dass die Brennpunkte aller einem Dreiecke eingeschriebenen Parabeln auf dem diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreise liegen. Mz.

M. d'Ocagne. Sur les cordes communes à une conique et à un cercle de rayon nul: application à la théorie géométrique des foyers dans les coniques. Edinb. M. S. Proc. V. 84-92.

Ist $K = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts und $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$ die eines Punktkreises P, so enthält das System

$$K + \lambda\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\} = 0$$

ein einziges Paar reeller Geraden, welche hier zum Punkte P und Kegelschnitte K „conjugirt“ (conjointes) genannt werden. Bezüglich der Conjugirten wird folgender Satz aufgestellt: Bei der Transformation durch reciproke Polaren in Bezug auf einen Kreis sind die zu den Brennpunkten eines Kegelschnitts gehörigen Elemente die Conjugirten vom Mittelpunkte des Leitkreises (Mittelpunkt der Transformation) und vom bezüglichen Kegelschnitt. Dieser Satz wird zur Herleitung der Brennpunktseigenschaften eines Kegelschnitts aus den Eigenschaften der Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes benutzt. Gbs. (Lp).

K. Pelz. Zum Normalenproblem der Ellipse. Wien. Ber. XCV. 481-491.

Der Herr Verfasser erwähnt nach Angabe des allgemeinen Normalenproblems der Ellipse besondere Fälle, in denen die Lösung einfacher wird. Dies findet unter anderem statt, wenn der Punkt, von dem die vier Normalen an die Ellipse gehen sollen, auf einer der Axen oder in unendlicher Entfernung ist. Ferner, wenn der Punkt auf einem mit der Ellipse concentrischen Kreise liegt, dessen Radius entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbaxen der Ellipse ist. In dieser Arbeit wird nun noch ein neuer Fall mitgeteilt, in welchem sich das Problem vereinfacht. Construirt man nämlich in der Ellipse: $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ die beiden conjugirten Durchmesser, welche gleiche Länge haben, und zu diesen die senkrechten Durchmesser, so sind diese beiden letzteren Linien von der Art, dass, wenn ein Punkt auf einer von ihnen gegeben ist, die vier Normalen, die durch diesen Punkt an die Ellipse gehen, sich sehr einfach mit Zirkel und Lineal finden lassen. Denn die zur Construction dienende gleichseitige Hyperbel:

$$(a^2-b^2)xy+b^2\beta x = a^2\alpha y$$

hat in diesem Falle mit der Ellipse ein gemeinsames Poldreieck, von welchem der unendlich entfernte Punkt der Geraden $ay = bx$ (oder auch $ay = -bx$) die eine Ecke sein muss.

Mz.

E. Oekinghaus. Ueber die Normalen der Kegelschnitte. Hoppe Arch. (2) VI. 112.

Wenn von einem Punkte, dessen Polarcoordinaten R, φ sind, an die Ellipse $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ die vier Normalen construirt werden, deren Längen bez. n_1, n_2, n_3, n_4 seien, so ist:

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2 = 4R^2+2(a^2+b^2)-\frac{2R^2}{c^2}(a^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi).$$

Von diesem Ausdruck werden Anwendungen auf Sätze über Normalen an Kegelschnitten gemacht. So ist z. B. der Ort aller Punkte, bei denen die von ihnen an die Ellipse gehenden vier

Normalen eine constante Quadratsumme haben, ein Kegelschnitt; für die gleichseitige Hyperbel wird dieser Kegelschnitt ein Kreis, u. dgl. m. Mz.

A. Gordon, J. Young, T. Galliers. Solution of question 8547. Ed. Times XLVI. 124.

1) Der Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate der Normalen an die Parabel $y^2 = lx$ constant ($= c^2$) ist, ist die Ellipse $3y^2 + (x+l)^2 = \frac{3}{4}l^2 + c^2$.

2) Der entsprechende Ort für die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung ist ein Kegelschnitt.

Andere Aufgaben über die Normalen von Kegelschnitten sind gestellt von S. Rây (No. 8280, XLVI. 36), Asparagus (No. 8269, XLVI. 38-39), T. R. Terry (No. 8260, XLVI. 47), C. E. McVicker (No. 8541, XLVI. 71), T. A. E. Sanderson (No. 8619, XLVI. 103-104), A. F. Torry, (No. 8538, XLVI. 123), R. Tucker (No. 8786, XLVII. 61-62), É. Vigarié (No. 8931, XLVII. 81-82) und von verschiedenen andern Geometern gelöst worden. Lp.

W. J. C. Miller, A. M. Nash. Solution of question 7434. Ed. Times XLVI. 79-80.

Der geometrische Ort für die Fusspunkte der Normalen, die man von einem festen Punkte an die einem Quadrate eingeschriebene Kegelschnittschar ziehen kann, hat die Gleichung

$$(x^2-a^2)(x-X)^2 = (y^2-a^2)(y-Y)^2,$$

wenn die Seiten des Quadrates die Gleichungen $x = \pm a$, $y = \pm a$ haben, und X, Y die Coordinaten des gegebenen Punktes sind. Die Formen dieser Curve werden erörtert.

Lp.

Genese, G. B. Mathews, A. M. Nash. Solution of question 8555. Ed. Times XLVI. 68.

Zwei beliebige Kreise sind reciprok polar zu einander in

Bezug auf vier Kegelschnitte, deren Mittelpunkte in den Aehnlichkeitspunkten beider Kreise liegen. Die vier Kegelschnitte sind imaginär, wenn die Kreise sich ausschliessen; zwei von ihnen sind reell, wenn der eine Kreis den andern völlig umschliesst, und in diesem Falle ist der innere Aehnlichkeitspunkt ihr Centrum. Bedeuten a und b die Halbaxen eines reellen der Kegelschnitte, so ist a senkrecht zur Centrale der Kreise, und a^2/b ist die mittlere Proportionale zwischen den Radien der beiden Kreise. Lp.

F. P. Ruffini. Delle coniche polari inclinate per l'angolo zero principalmente in rispetto alle coniche conjugate. Bologna Mem. (4) VII. 753-772.

Der Aufsatz zerfällt in zwei Teile. Im ersten beweist der Verf. durch die Hülfsmittel der analytischen Geometrie einige von den Sätzen, welche Hr. Ed. Dewulf in seiner Abhandlung: „Essai d'une théorie géométrique des polaires inclinées" (Darboux Bull. (2) II. 41-48, 372-379; F. d. M. X. 1878. 396) auf synthetische Weise in grösserer Allgemeinheit hergeleitet hat. Zum Verständnisse des Inhaltes wiederholen wir, dass „geneigte Polare eines Punktes P bezüglich einer algebraischen Curve C_n von der Ordnung n" der geometrische Ort eines Punktes M ist, dessen geradlinige (gewöhnliche) Polare bezüglich der Curve C_n mit dem Strahle PM einen constanten Winkel α bildet. Im allgemeinen ist die geneigte Polare eine neue Curve n^{ter} Ordnung, wie gross auch α sein mag. Ist daher α gleich Null und die Curve C_n ein Kegelschnitt C_2, so sind die geneigten Polaren für den Winkel Null Kegelschnitte, welche der Verf. „parallele Polaren" bezüglich des Kegelschnittes C_2 nennt.

Im zweiten Teile entwickelt der Verfasser die Formeln, aus denen die Beziehungen folgen, in welchen die parallelen Polaren bezüglich der Kegelschnitte einiger Kegelschnittscharen, insbesondere bezüglich der conjugirten Kegelschnitte zu einander stehen, u. dgl. m. Den früheren Arbeiten des Hrn. Ruffini ähnlich, ist auch die vorliegende weniger durch neue Resultate als

durch eine sehr klare, zur Breite hinneigende Darstellung ausgezeichnet. Lp.

Fr. Machovec. Beitrag zur Ableitung der Gleichung der Evolute einer Curve zweiter Ordnung und der Ausdrücke für die Coordinaten ihrer Krümmungsmittelpunkte. Casop. XVI. 235. (Böhmisch.)

Ist

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=C$$

die Gleichung einer centrischen C_2, und bezeichnen x', y' rechtwinklige Coordinaten eines beliebigen Punktes, so sind die Liniencoordinaten seiner Polare bezüglich C_2

$$\xi'=\frac{x'}{AC},\quad \eta'=\frac{y'}{BC},$$

die Coordinaten der zu dieser Polare senkrecht conjugirten Geraden

$$\xi_1=\frac{A}{(A-B)x'},\quad \eta_1=\frac{B}{(B-A)y'},$$

und die Coordinaten des Poles dieser Geraden

$$x_1=\frac{A^2C}{(A-B)x'},\quad y_1=\frac{B^2C}{(B-A)y'}.$$

Daraus folgen u. a. die Gleichungen

$$(1)\qquad x'x_1=\frac{A^2C}{A-B},\quad y'y_1=\frac{B^2C}{B-A},$$

$$(2)\qquad x'\xi_1=\frac{A}{A-B},\quad y'\eta_1=\frac{B}{B-A}.$$

Wenn der Punkt (x', y') eine beliebige Curve C beschreibt, so umhüllt seine reciproke Gerade (ξ_1, η_1) eine Curve Γ, deren Gleichung in Liniencoordinaten man aus der Gleichung von C erhält, wenn man in dieser Gleichung x, y durch die aus den Gleichungen (2) für x', y' sich ergebenden Ausdrücke ersetzt. Wenn z. B. der Punkt (x', y') die gegebene Curve C_2 durchläuft, so umhüllt seine reciproke Gerade die Evolute von C_2, deren

Gleichung in Liniencoordinaten man auf Grund des angeführten sogleich hinschreiben kann.

Der reciproke Punkt (x_1, y_1) von (x', y') beschreibt in diesem Falle eine andere Curve, und die Pole von Tangenten dieser Curve bezüglich C_2 sind Krümmungsmittelpunkte von C_2 in den betreffenden Punkten (x', y'). Auf dieser Grundlage können mit Hülfe der Gleichungen (1) die Coordinaten dieser Krümmungsmittelpunkte leicht gefunden werden.

Zum Schlusse zeigt der Verfasser, wie die in den Gleichungen (1) und (2) enthaltenen Transformationen mit der allgemeinen quadratischen Transformation zusammenhängen. Std.

A. Cayley. System of equations for three circles which cut each other at given angles. Mess. (2) XVII. 18-21.

Ueber den drei Seiten eines Dreiecks ABC als Grundlinien beschreibe man nach aussen gleichschenklige Dreiecke aBC, bCA, cAB mit den Basiswinkeln bezw. α, β, γ. Man zeichne einen Kreis, welcher aB, aC in den Punkten B, C berührt; einen zweiten, welcher bC, bA in den Punkten C, A berührt; einen dritten, welcher cA, cB in A, B berührt. Diese Kreise bilden ein krummliniges Dreieck ABC, dessen Winkel bezw. $A+\beta+\gamma$, $B+\gamma+\alpha$, $C+\alpha+\beta$ sind.

Für den Mittelpunkt des Umkreises des ursprünglichen Dreiecks als Coordinaten-Anfang und für eine beliebige Gerade durch ihn als x-Axe schreibt der Verf. die Gleichungen der Kreise nieder und bewahrheitet, dass sie durch die geeigneten Punkte gehen und sich unter den geeigneten Winkeln schneiden.

Glr. (Lp.)

A. Cayley. On the system of three circles which cut each other at given angles and which have their centres in a line. Mess. (2) XVII. 60-69.

In dem Systeme von Kreisen, das in dem vorigen Artikel betrachtet wurde, ist die Bedingung leicht auszudrücken,

die drei Mittelpunkte in eine Gerade fallen. Nimmt man jedoch diese Bedingung als erfüllt an, so scheint kein einfacher Ausdruck für die Gleichung der Geraden durch die drei Mittelpunkte zu bestehen. Daher untersucht der Verf. diesen besonderen Fall unabhängig, indem er die Gerade, auf welcher die Mittelpunkte liegen, zur x-Axe nimmt. Glr. (Lp.)

F. Schiffner. Ueber den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, die durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. Hoppe Arch. (2) V. 442-448.

Die gegebenen Punkte seien A, B und die gegebene Gerade sei G. Zunächst wird der Fall ausgeschlossen, in welchem die Punkte A und B mit G in derselben Ebene sind. Dann legt man durch die Gerade AB diejenige Ebene, welche mit G parallel ist. Ferner sei dies die Ebene OXZ, AB die Z-Axe; die rechtwinkligen Coordinaten von A seien $(0, 0, m)$ die von B: $(0, 0, -m)$. Die Gerade G habe die Gleichungen:

$$z = ax + b, \quad y = c.$$

Der gesuchte Ort ist dann eine ebene Curve dritten Grades in der Ebene OXY mit der Gleichung:

$$c^2(1+a^2)x^2+2abcxy+(c^2+b^2-m^2)y^2-2cy(x^2+y^2) = 0.$$

Diese Curve wird nun eingehender untersucht. Der Coordinatenanfang O ist für diese Curve Knotenpunkt, Rückkehrpunkt oder isolirter Punkt, je nachdem:

$$m^2(1+a^2) \gtreqless c^2(1+a^2) - b^2.$$

Die Curve geht durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte, und auch durch den Punkt $x = \infty$, $y = \frac{c}{2}(1+a^2)$. Die Asymptoten werden gleichfalls angegeben, ebenso die punktweise Construction, die Construction der Tangenten, die Darstellung der Coordinaten eines Curvenpunktes als rationale Functionen eines Parameters und noch einiges Andere. Mz.

O. STONE. Solution of an exercise. Annals of Math. III. 27.

Sind p_1, p_2, p_3 die excentrischen Anomalien für drei Punkte einer Ellipse, so drücken sich die rechtwinkligen Coordinaten aus durch $x_i = a\cos p_i$ und $y_i = b\sin p_i$, und die Dreiecksfläche, welche durch jene drei Punkte bestimmt ist, stellt sich durch jene Parameter in der Form dar:

$$\varDelta = 2ab\sin\tfrac{1}{2}(p_1-p_2)\sin\tfrac{1}{2}(p_2-p_3)\sin\tfrac{1}{2}(p_3-p_1).$$

Die Mittelpunktscoordinaten des jenem Dreieck umgeschriebenen Kreises werden durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)\cos\tfrac{1}{2}(p_2+p_3)\cos\tfrac{1}{2}(p_3+p_1),$$

$$y = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)\sin\tfrac{1}{2}(p_2+p_3)\sin\tfrac{1}{2}(p_3+p_1).$$

Rücken jene drei Punkte in einen zusammen, so ergeben sich für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts die Werte

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 p; \quad y = -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 p.$$

Schn.

W. M. THORNTON. Solution of an exercise. Annals of Math. III. 62.

Wenn drei Punkte auf einer Ellipse durch ihre excentrischen Anomalien gegeben sind, so werden die Coordinaten des Höhenschnitts durch jene drei Parameter dargestellt. Soll das von jenen drei Punkten gebildete Dreieck die grösste Fläche haben, so ergiebt diese Forderung eine Bedingungsgleichung für die Coordinaten, welche ausdrückt, dass die Höhenschnitte aller jener Maximaldreiecke wieder auf einer Ellipse gelegen sind.

Schn.

F. J. VAN DEN BERG. Over zoodanige stelsels van twee cirkels in het platte vlak of op den bol of ook van twee coaxiale ellipsen in het platte vlak, dat daarin en daarom eenzelfde veelhoek past. Nieuw Arch. XIV. 95-116, 125-192.

Die ausführliche Arbeit handelt über solche Systeme von zwei Kreisen in der Ebene oder auf der Kugel, oder auch von zwei coaxialen Ellipsen in der Ebene, in und um welche dasselbe Vieleck beschrieben werden kann. Zunächst wird die Literatur des Gegenstandes nachgewiesen. Euler gab die Beziehung zwischen den Kreisen, welche in und um dasselbe Dreieck beschrieben werden können. Darauf folgten die Untersuchungen von Fuss, Poncelet, J. Steiner, Jacobi, Richelot und andern über ein- und umgeschriebene Vielecke. In vorliegender Arbeit wird ein anderer Weg für eine solche Untersuchung eingeschlagen, durch Anwendung von Functionen, für welche verschiedene, sowohl einfache als periodisch zurücklaufende Beziehungen entwickelt werden. Weiter wird der durch Richelot festgestellte Uebergang vom ebenen zum sphärischen Fall mit Hülfe von elliptischen Transcendenten durch geometrische Umformung ersetzt. Endlich wird gezeigt, dass für ein ebenes Vieleck von gegebener Seitenzahl völlige Uebereinstimmung besteht zwischen der erwähnten Beziehung für zwei Kreise und der für das Axenverhältnis von zwei coaxialen Ellipsen, in und um welche ein solches Vieleck passt. G.

R. H. Graves. On the focal chord of a parabola.
Annals of Math. III. 153.

Zieht man durch den Brennpunkt einer Parabel eine Sehne und construirt über derselben als Seite jederseits einen Rhombus (sodass das zweite Seitenpaar der Axe parallel ist), so sind die vier Diagonalen dieser Rhomben die Tangenten und Normalen in den Endpunkten der Sehne. Werden die Normalen soweit verlängert, dass sie Parabelsehnen werden, so schneiden sie sich gegenseitig im Verhältnis 1 : 3, und die Verbindungslinie ihrer Endpunkte ist eine neue Sehne, welche der ursprünglichen parallel ist, dreimal so lang ist als diese und zur Einhüllenden eine confocale Parabel hat. R. M.

R. H. Graves. On the chord common to a parabola and the circle of curvature at any point. Annals of Math. III. 50.

Wenn eine Parabel $y^2 = 2px$ von einem beliebigen Kreise geschnitten wird, so besteht zwischen den Ordinaten der vier Schnittpunkte die Relation $y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$. Indem der Verf. diese Gleichung auf den Krümmungskreis anwendet, erhält er eine Reihe von bekannten Eigenschaften der diesem Kreise und der Parabel gemeinsamen Sehne; sie wird von der Axe im Verhältnis 1 : 3 geteilt, die Enveloppe aller möglichen Sehnen ist die Parabel $y^2 = -6px$. R. M.

J. Neuberg, P. H. Schoute, G. B. Mathews. Solution of questions 8277, 8641. Ed. Times XLVI. 64-65, 114-115.

Der Krümmungskreis einer Ellipse im Punkte M treffe dieselbe zum zweiten Male in M_1, der in M_1 schneide sie in M_2, u. s. w. Es wird die Bedingung ermittelt, dass die gebrochene Linie $MM_1M_2M_3\dots$ sich schliesst, und bewiesen, dass die Sehnen MM_1, MM_2, MM_3, ... Orthogonalprojectionen von Epicykloiden einhüllen. Lp.

C. Bergmans. Théorèmes sur la parabole. Mathesis VII. 136-138.

Mn.

W. Myjkowski. Was für eine Linie beschreibt der Schatten eines von der Sonne beleuchteten festen Punktes, z. B. des Scheitels eines Lotes im Laufe des Tages auf einer Horizontalebene? Pr. Wadowice. (Polnisch.)

Eine analytische ziemlich einfache Lösung der elementaren Aufgabe. Dn.

G. König. Ein Beitrag zu dem mathematischen Unterrichte in der Prima. Pr. Realgymn. Bützow (No. 606). S. 3-7. 4°.

Auch mit dem besonderen Titel: „Zwei geometrisch

Schüleraufgaben". Die Behandlung der beiden Aufgaben nach den einfachsten Methoden der analytischen Geometrie zeigt, dass die fraglichen Oerter Kegelschnitte sind. Lp.

Barisien. Solution de la question de géométrie analytique donnée au concours d'agrégation des sciences mathématiques (1886). Nouv. Ann. (3) VI. 372-391.

Es giebt eine einfach unendliche Schar von Kegelschnitten, welche eine gegebene Gerade *D* in einem gegebenen Punkte *O* berühren und eine zweite gegebene Gerade *D'* zur Directrix haben; der Ort ihrer Brennpunkte ist ein Kreis; durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei solcher Kegelschnitte. Verfasser liefert eine ausführliche Discussion der Natur dieser Kegelschnitte, je nach der Lage des Punktes *P*. Diese beiden Kegelschnitte schneiden sich ausser in *P* in einem zweiten Punkt *P'*. Es giebt Curven, welche gleichzeitig Ort für *P* und *P'* sind. Die Fälle, wo *D* und *D'* senkrecht oder parallel sind, sind besonders behandelt. R. M.

N. Goffart. Solution analytique de la question proposée en 1884 pour l'admission à l'École Polytechnique. Nouv. Ann. (3) VI. 395-399.

Ein Punkt einer Ellipse oder Hyperbel wird mit den beiden Brennpunkten verbunden; es werden die ein- und anbeschriebenen Kreise dieses Dreiecks untersucht, die geometrischen Oerter ihrer Mittel- und Berührungspunkte bestimmt. Werden bei der Ellipse zwei solcher Dreiecke gezeichnet, so geht die Chordale der beiden einbeschriebenen Kreise durch die Mitte der zugehörigen Ellipsensehne. R. M.

V. Berghoff. Die Brennpunktscurve einer Schar doppelt berührender Kegelschnitte. Pr. Städt. Gewerbesch. Dortmund. 28 S. 4°.

Die bezeichnete Curve ergiebt sich für ein passend ge-

wähltes Coordinatensystem in der Form:

$$(x^2+y^2)(ax-by)-ab(x^2-y^2)=0,$$

sie ist also eine unicursale Curve dritter Ordnung, deren Doppelpunkt (0, 0) ist. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei conjugirte Punkte, d. h. zwei Brennpunkte desselben Kegelschnitts, so findet man $x_1x_2 = y_1y_2$. Specielle conjugirte Punkte sind (0, a) und (b, 0); für jeden derselben ist die Curve sich selbst kreisverwandt, während sie ersichtlich für den Anfangspunkt als Inversionscentrum in eine gleichseitige Hyperbel übergeht.

R. M.

J. J. Sylvester, J. Neuberg. Solution of question 2231. Ed. Times XLVI. 48-49.

Herr Neuberg giebt einen ganz kurzen Beweis des von Hrn. Sylvester aufgestellten Satzes: Wenn eine Kegelschnittschar eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt, wo alle Kegelschnitte dieselbe Krümmung besitzen, und wenn ferner alle durch einen zweiten gegebenen Punkt gehen, so besteht der Ort für die Brennpunkte der Schar aus den beiden circularen kubischen Curven:

$$2by(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0,$$
$$2ax(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0,$$

wobei die Halbirungslinien der Winkel zwischen der gegebenen Geraden und der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte die Axen, a und b die Coordinaten des zweiten Punktes sind.

Lp.

C. Döhlmann. Ueber einige Eigenschaften des Systems der Kegelschnitte, die drei feste Gerade berühren. Schlömilch Z. XXXII. 120-127.

Die beiden Brennpunkte eines Kegelschnittes mit drei festen Tangenten sind bekanntlich in der involutorisch-quadratischen Verwandtschaft einander zugeordnet, deren Fundamentalpunkte mit den gegenseitigen Schnittpunkten der drei Tangenten zusammenfallen und deren Doppelpunkte die Mittelpunkte der vier

Kreise sind, welche die drei Tangenten berühren. Wird der eine Brennpunkt über eine Curve n^{ter} Ordnung geführt, so durchläuft der andere eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung, welche die drei Fundamentalpunkte n-fach enthält. Die Axe des veränderlichen Kegelschnitts umhüllt als Verbindungslinie entsprechender Punkte eine Curve $3n^{ter}$ Klasse; Doppeltangenten sind die n^2 Geraden, welche die den beiden Curven gemeinsamen Punktepaare enthalten. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes wie jeder Punkt, welcher den Abstand der Brennpunkte in einem constanten Verhältnis teilt, beschreibt nach einer kurzen analytischen Entwickelung eine Curve $3n^{ter}$ Ordnung. Sie enthält die unendlich fernen Punkte der gegebenen Curve, die anderen Asymptotenrichtungen geben die Axen der $2n$ Parabeln an, welche die drei Tangenten berühren und ihre Brennpunkte auf der gegebenen Curve haben. Die angegebenen Zahlen würden sich vermindern, wenn die gegebene Curve einzelne Grundpunkte oder Doppelpunkte enthielte.

E. K.

F. Gerbaldi. Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche. Palermo Rend. I. 327-337.

Bestimmen zwei Kegelschnitte den Büschel B und die Schar S, so haben die Discriminanten der Gleichungen, welche die zerfallenden Elemente von B bezw. S angeben, immer gleiches Vorzeichen. Sind sie negativ, so sind sechs Fälle möglich: 1. Die Grundpunkte P von B und die Grundlinien L von S sind reell; 2. P reell, L imaginär; 3. P imaginär, L reell; 4. P und L imaginär und die Kegelschnitte reell; 5. P, L und ein Kegelschnitt imaginär; 6. P, L und beide Kegelschnitte imaginär. Hier werden einige einfache Kriterien zur Unterscheidung dieser Fälle aufgestellt.

Vi.

B. Sporer. Einiges über Gebilde zweiten Grades und deren reciproke Inversen. Schlömilch Z. XXXII. 56-59.

Beweis des Satzes: Dreht sich der Scheitel eines rechten Winkels um den reellen Doppelpunkt einer circularen Inverse

C^4 eines Kegelschnittes, so bestimmen dessen Schenkel auf der Curve eine Sehne, deren Halbirungspunkt einen Kreis zum Orte hat. Dieser Satz wird einerseits specialisirt, andererseits auf den Raum ausgedehnt, wobei sich u. a. der von Steiner aufgestellte Satz ergiebt: Schneiden sich in einem Oktaeder die Diagonalen unter rechten Winkeln, so liegen die acht Fusspunkte der vom Diagonalenschnitt auf die Oktaederflächen gefällten Lote auf einer Kugel. Schg.

Fr. Hofmann. Zur geometrischen Interpretation binärer Formen, speciell solcher von der vierten Ordnung, im ternären Gebiete. Schlömilch Z. XXXII. 363-368.

Man kann die Wurzeln einer binären Form f vierten Grades geometrisch darstellen durch vier Punkte auf einem Kegelschnitte B, dessen Gleichung durch $xz-y^2=0$ gegeben ist. Unter dem Büschel von Kegelschnitten durch jene vier Punkte ist besonders einer, F_1, projectivisch ausgezeichnet (nämlich der zu B conjugirte). Der zu B und F harmonische Kegelschnitt schneidet dann aus B vier Punkte aus, welche die Wurzeln der Hesse'schen Form der Grundform f repräsentiren.

Der Verfasser untersucht die so entstehende Configuration genauer unter Anwendung einfacher geometrischer Principien. Man vergleiche übrigens die bezüglichen, früher von Hrn. Lindemann und dem Referenten gewonnenen Ergebnisse. My.

D. Andere specielle Curven.

V. Jamet. Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre. S. M. F. Bull. XV. 35-38.

Das berühmte Salmon'sche Theorem von der Erhaltung des Doppelverhältnisses der vier Tangenten, die von einem Punkte der Curve dritter Ordnung an dieselbe führen, leitet Herr J. aus

einem von Herrn Picard herrührenden Theorem ab, nach dem vier particuläre Integrale einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx}+Ay^2+By+C=0,$$

wo A, B, C Functionen von x sind, ein constantes Doppelverhältnis ergeben. Ist nun ξ, η der Tangentialpunkt von x, y und $y=ux+v$ die Gleichung der Tangente, so sind u, v und x vierwertige Functionen von ξ. Jedes mit ξ (und η) stetig sich verändernde u genügt aber der Differentialgleichung

$$\sqrt{a}\frac{du}{d\xi}=\frac{3\xi+p}{4\sqrt{f(\xi)}}-\frac{au^2}{4\sqrt{f(\xi)}},$$

wobei die Gleichung der Curve in der Form

$$ay^2=x^3+px^2+qx+r=f(x)$$

angenommen wird, was bekanntlich gerechtfertigt ist. Die vier verschiedenen u und damit die vier von ξ, η ausgehenden Tangenten haben mithin ein unveränderliches Doppelverhältnis.

E. K.

F. Morley. On critic centres. American J. X. 141-148.

In dem Büschel der Curven dritter Ordnung, welche ihre neun Wendepunkte gemeinsam haben, giebt es 12 Curven, welche einen Doppelpunkt besitzen. Diese 12 Doppelpunkte werden die kritischen Centra des Büschels genannt. Indem Herr M. die kanonische Form $x^3+y^3+z^3+6mxyz=0$ zu Grunde legt, untersucht er die Configuration dieser 12 Punkte und der durch sie bestimmten Geraden. Ein besonderes Interesse erregt folgendes Paradoxon. Es giebt Curven fünfter Ordnung, welche durch diese 12 Punkte und die 9 Wendepunkte hindurchgehen und trotzdem noch zwei variable Parameter enthalten, die 12 Centra zählen nur als 9 Bedingungen; die vier übrigen Schnittpunkte von zwei solchen Curven sind (entgegen den bekannten allgemeinen Schnittpunktssätzen) variabel, liegen aber in gerader Linie. Analoge Verhältnisse lassen sich auch für die kritischen Centra von Curven höherer Ordnung nachweisen. R. M.

R. DE CRÈS. Solution de la question du concours d'admission à l'École Normale (1886). Nouv. Ann. (3) VI. 369-372.

Unter den durch die Gleichung $x^2y+a^2x=\lambda$ bei variablem λ repräsentirten Curven dritter Ordnung sind zwei, welche die Gerade $y=mx+p$ berühren. Die Coordinaten jedes der beiden Berührungspunkte lassen sich eindeutig durch die des anderen ausdrücken; die beiden Punkte sind reell, imaginär oder vereinigt, je nachdem die Gerade die gleichseitige Hyperbel $4xy+3a^2=0$ schneidet, nicht schneidet oder berührt. Der geometrische Ort der zusammenfallenden Berührungspunkte ist die gleichseitige Hyperbel $3xy+2a^2=0$. R. M.

F. MORLEY. On plane cubics which inflect on crossing their asymptotes. Mess. (2) XVII. 51-57.

Der Verfasser betrachtet den Fall einer Curve dritter Ordnung mit singulärem Punkte, welche im Schnittpunkte mit einer Asymptote einen Wendepunkt hat, und auch den Fall, wenn sie im Schnittpunkte mit einer zweiten Asymptote einen Wendepunkt besitzt. Er ermittelt auch die Hüllcurve der Wendepunktsgeraden einer Curve dritter Ordnung ohne Singularitäten, welche im Schnittpunkte mit jeder Asymptote einen Wendepunkt hat.

Glr. (Lp.)

J. J. WALKER. On the diameters of plane cubics. Lond. R. S. Proc. XLII. 334-335.

Auszug aus einer in den Lond. Phil. Trans. 1888 erschienenen Abhandlung. Cly.

H. BROCARD. Bibliographie des questions 8396 et 8516. Ed. Times XLVI. 81-82.

SIRCOM. Solution of question 8516. Ed. Times. XLVI. 115-116.

Die kubische Curve, welche den Gegenstand der Aufgaben 8396 (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 694) und 8516 bildet, ist bereits früher behandelt worden, zuerst von Hrn. G. Darboux in N...

Ann. (2) V (1866), danach von Hrn. Ed. Lucas in der Nouvelle Correspondance Mathématique II. 94 (1876), ferner von Hrn. H. van Aubel, ib. IV. 261-272, 355-356, V. 81-87, VI. 56-65, von Hrn. E. Dewulf in Nouv. Ann. (2) XV. 550-555. Herr Brocard führt aus diesen Aufsätzen die hauptsächlichsten Ergebnisse an. Lp.

Aug. Pánek. Eine Bemerkung über die Cissoide des Diokles. Cas. XVI. 33. (Böhmisch.)

Liefert die Cissoide als geometrischen Ort eines bestimmten Bedingungen unterworfenen Dreiecksscheitels. Std.

G. Kohn. Ueber die zu einer allgemeinen Curve vierter Ordnung adjungirten Curven neunter Klasse. Wien. Ber. XCV. 338-348.

Es sei f eine ebene algebraische Curve n^{ter} Ordnung, m^{ter} Klasse mit nur einfachen Doppel- und Rückkehrpunkten, Doppel- und Wendetangenten als Singularitäten; die zu f „adjungirten" Ordnungscurven C sind solche, welche durch die Doppel- und Rückkehrpunkte von f einmal hindurchgehen, die adjungirten Klassencurven K solche, welche die Doppel- und Wendetangenten von f einmal berühren. Unter ihnen sind diejenigen von der Ordnung $n-3$, resp. der Klasse $m-3$ ausgezeichnet, sie seien mit C_{n-3} resp. K_{m-3} bezeichnet. Dann stimmt bekanntlich die Schar der Punktgruppen, welche die C_{n-3} auf f ausschneiden, überein mit der Schar der Berührungspunkte, welche die K_{m-3} auf f bestimmen, mithin sind sich die beiden Curvenscharen einander eindeutig zugeordnet.

Für eine allgemeine Curve vierter Ordnung f ist $n=4$, $m=12$, also $n-3=1$, $m-3=9$. Zu jeder Geraden C_1 der Ebene gehört also eine K_9, welche f in den vier Schnittpunkten mit C_1, sowie ausserdem die 28 Doppeltangenten und die 24 Wendetangenten von f berührt, und sich demgemäss hierin ganz so verhält, wie die erste Polare von C_1 bez. f. Bildet man die erste Polare von C_1 mittels der Clebsch'schen Darstellung

von f als Klassencurve $S^3-T^2=0$, so lassen sich unmittelbar eine Reihe einfacher Sätze daraus ableiten, z. B.: „Die zu C_1 gehörige K_9 wird von allen jenen Geraden umhüllt, welche um ihren Schnittpunkt mit C_1 unendlich wenig gedreht werden können, ohne dass das Doppelverhältnis ihrer vier Schnittpunkte mit f geändert wird."

„Alle Curven neunter Klasse, welche sämtliche Doppel- und Wendetangenten von f berühren (im besondern also auch die K_9), tangiren ausserdem noch dieselben 21 Geraden, nämlich die geraden Bestandteile der 21 zerfallenden kubischen Polaren von f."

Die Modificationen, welche für nicht allgemeine (z. B. rationale) Curven vierter Ordnung eintreten, sind leicht angebbar.

My.

G. Kohn. Zur Theorie der rationalen Curven vierter Ordnung. Wien. Ber. XCV. 318-337.

Die Clebsch'sche Darstellung für eine allgemeine ebene Curve vierter Ordnung f in Liniencoordinaten $S^3-T^2=0$ geht für eine rationale Curve f über in $D^2F=0$, wo $D=0$ das Product der Gleichungen ihrer drei Doppelpunkte bezeichnet.

Sei P ein Punkt von f, so bilde man bez. f die kubische und quadratische Polare, die mit C_3 resp. C_2 bezeichnet seien. Dann sind die vier Tangenten, welche von P an C_3 gehen, identisch mit den vier Tangenten, welche von P an die Curve $S=0$ gelegt werden können, und die sechs von P an die Curve $T=0$ gehenden Tangenten projiciren gerade die sechs weiteren Schnittpunkte von f mit C_2. Dieser Satz erlaubt eine Reihe von interessanten Folgerungen bez. des Verhaltens der Singularitäten von f zu den Curven $S=0$ und $T=0$. My.

W. Stahl. Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung. J. für Math. CI. 300-325.

„Die Behandlungsweise der rationalen ebenen Curve vierter Ordnung R_4 ist in diesem Aufsatze eine analytische, doch be-

ruhen die Operationen meist auf synthetischen Ueberlegungen."
Eigenschaften der R_4 werden aus der Theorie der rationalen Raumcurve vierter Ordnung ϱ_4 abgeleitet, als deren perspectives Bild R_4 angesehen werden kann. Zu Hülfe genommen wird insbesondere die Schar der einfach unendlich vielen von Hrn. Jolles Osculanten genannten Raumcurven dritter Ordnung ϱ_3, welche auf der Tangentenfläche von ϱ_4 liegen und deren Schmiegungsebenen eine Steiner'sche Fläche umhüllen. Die Bilder dieser ϱ_3 in der Ebene von R_4 sind die Osculanten R_3 letzterer Curve.

Nach Darstellung der Coordinaten von R_4 als Functionen eines Parameters λ wird unter Benutzung der Osculanten R_3 die Gleichung für die Parameterwerte der Wendepunkte von R_4 und die Gleichung derjenigen Curve F_3 abgeleitet, welche von den Wendetangenten aller R_3 umhüllt wird. Die Parameterwerte λ solcher vier Punkte der R_4, welche ein Quadrupel der fundamentalen biquadratischen Involution J_4 bilden, genügen einer Gleichung vierten Grades in λ, deren Coefficienten linear von einer veränderlichen Grösse abhängen. Durch die Involution werden die Osculanten R_3 in Gruppen von je vier geordnet. Drei R_3 einer Gruppe besitzen drei je zweien gemeinsame Wendetangenten, welche sich in einem Punkte H schneiden. Der geometrische Ort von H ist ein auf R_4 projectiv bezogener Kegelschnitt K. Auf synthetischem Wege wird nachgewiesen, dass die sechs Wendepunkte von R_4 auf einem Kegelschnitt w liegen (Satz von Brill und Grassmann), und es wird eine Parameterdarstellung für die Punkte von w gegeben. Die vier Doppeltangenten von R_4 sind die Grundtangenten einer Kegelschnittschar. Jede Curve dieser Schar hat ausser den Doppeltangenten mit R_4 und mit K je vier gemeinsame Tangenten, deren Berührungspunkte entsprechende Quadrupel der Involution J_4 bilden. Nach Angabe einer Methode zur Berechnung der Parameterwerte für die Doppelpunkte der R_4 wird die Gleichung der Curve dritter Ordnung C_3 aufgestellt, welche durch die Doppel- und Wendepunkte von R_4 geht. Ist δ derjenige Kegelschnitt, welcher C_3 in den Doppelpunkten von R_4 berührt, so lässt sich die Gleichung der R_4 auf die Form bringen $C_3 . l = w . \delta$ (l be-

deutet eine gewisse gerade Linie). Die biquadratische Involution auf ϱ_4 führt auf einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, deren scheinbare Grenze in der Ebene von R_4 die Kegelschnitte f_2 einer Schar sind, welche einem linearen Gewebe zweiter Stufe angehört. Dasselbe besteht aus den ersten Polaren aller Geraden in Bezug auf eine bestimmte Curve dritter Klasse ψ_3. Die ersten Polaren der Tangenten von K sind die f_2, die zweiten Polaren derselben sind Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte auf R_4 liegen. Jeder Geraden entspricht bezüglich ψ_3 eine zweite Polare, deren Mittelpunkt das perspective Bild eines Punktes der erwähnten Steiner'schen Fläche ist. Letztere ist somit eindeutig auf das Geradenfeld der Ebene von R_4 abgebildet. Zufolge dieser Abbildung ist dem Kegelschnitte w in derselben Ebene ein Strahlenbüschel zugeordnet, dessen Mittelpunkt als der Mittelpunkt einer gewissen Involution zweiten Grades auf K gefunden wird, die zur Fundamentalinvolution projectiv ist. Durch zwei Quadrupel der Fundamentalinvolution ist die R_4, von collinearen Veränderungen abgesehen, vollständig bestimmt. Um dies analytisch klar zu legen, werden aus den Coefficienten der beiden Formen vierten Grades, welche die beiden Quadrupel bestimmen, die Gleichungen aller die Involution tragenden, unter einander collinearen R_4 abgeleitet. F.

K. Bobek. Ueber Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Zwei, ihre Systeme berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten. Wien. Abh. LIII. 119-154.

Die Gleichung einer allgemeinen ebenen Curve vierter Ordnung Φ vom Geschlecht zwei (d. h. mit einem Doppelpunkte) entsteht durch Elimination von λ aus der Gleichung eines Strahlenbüschels

$$A-\lambda B = 0$$

und einer Ordnungs-Kegelschnittschar vom Index 2:

$$\Theta_a+2H\lambda+\Theta_b\lambda^2 = 0.$$

Aber auch umgekehrt kann man, wie der Verfasser beweist, in mannigfaltiger Weise jede vorgelegte Curve vierter Ordnung Φ

mit einem Doppelpunkte d auf die angegebene Art erzeugen. Die Schar der „erzeugenden“ Kegelschnitte besitzt eine Enveloppe K_4, welche die Grundcurve Φ überall berührt, wo sie ihr begegnet, mithin achtmal. Diese acht Berührungspunkte von K_4 auf Φ bilden dann mit d die Basispunkte eines Curvenbüschels dritter Ordnung, welcher zu der gemeinten Erzeugung der Curve Φ in der innigsten Beziehung steht.

Haben umgekehrt irgend acht Punkte der Curve Φ die Eigenschaft, mit d die Basispunkte eines Curvenbüschels dritter Ordnung zu bilden, so sind sie auch stets die Berührungspunkte eines Büschels von Curven vierter Ordnung K_4. Von irgend einer der letzteren ausgehend, kann man zu einer erzeugenden Kegelschnittschar zurückgelangen (während der erzeugende Strahlenbüschel den Doppelpunkt d zum Centrum hat).

Durch geeignete Specialisirung der erzeugenden Kegelschnitte wird der Verfasser auf zwei „kanonische“ Gleichungsformen der Curve Φ geführt, die beide nur noch von fünf wesentlichen Constanten abhängen. An diese beiden Formen lässt sich die Aufstellung der vierfach berührenden Kegelschnitte einerseits, die der Doppeltangenten andererseits ungezwungen anschliessen. Die schwierigere Untersuchung ist die der vierfach berührenden Kegelschnitte. Die 63 Systeme derselben, die bei einer Curve vierter Ordnung vom Geschlecht 3 existiren, zerlegen sich bei Entstehung eines Doppelpunktes d in drei Gruppen. Eines der Systeme geht über in das der doppelt zählenden Geraden durch d, 32 werden zu 16 (doppelt zählenden) Systemen der die Curve Φ dreimal berührenden und durch d gehenden, d. h. adjungirten Kegelschnitte, sodass nur 30 Systeme eigentlich vierfach berührender Kegelschnitte übrig bleiben. Die letzteren lassen sich den vom Doppelpunkte d an die Curve Φ gehenden Tangenten in eigentümlicher Weise zuordnen, nämlich so, dass jeder der 15 Combinationen jener sechs Tangenten zu zweien je zwei „conjugirte“ der 30 Systeme angehören. Dabei heissen zwei Systeme vierfach berührender Kegelschnitte conjugirt, wenn die zweimal vier Berührungspunkte von zwei Individuen der beiden Systeme mit d die Basispunkte eines Curvenbüschels dritter Ordnung sind.

Hierauf lässt sich eine vollständige und übersichtliche Einteilung der vierfach berührenden Kegelschnitte gründen. Das Resultat wird in sorgfältigen Tabellen niedergelegt.

Die Untersuchung der Doppeltangenten wird an die der adjungirten, die Curve Φ noch dreimal berührenden Kegelschnitte geknüpft. Die 16 Systeme dieser Art werden nämlich geradezu repräsentirt durch die 16 Doppeltangenten von Φ, insofern irgend eine der Doppeltangenten, mit einer bestimmten der von d ausgehenden Tangenten, stets zu einem bestimmten jener Systeme gehört. Andererseits ordnen sich die Doppeltangenten nach einfachen Gesetzen in die 30 Systeme der vierfach berührenden Kegelschnitte ein, was wiederum durch eine Reihe von Tabellen illustrirt wird.

Die Modificationen, welche eintreten, wenn ein resp. zwei Wendepunkte in den Doppelpunkt hineinrücken, und wenn der letztere zur Spitze wird, lassen sich ohne fremde Hülfsmittel direct aus dem Obigen ableiten. My.

WEILL. Sur la courbe du quatrième degré à 2 points doubles. Nouv. Ann. (3) VI. 272-274.

Zunächst wird die Gleichung eines Kegelschnitts mit veränderlichem Parameter aufgestellt, der durch zwei feste Punkte und durch drei Ecken eines veränderlichen Dreiecks geht, das einem festen Kegelschnitt eingeschrieben und zugleich einem andern festen Kegelschnitt umgeschrieben ist. Mit dieser Gleichung ist also eine Schar von Kegelschnitten ausgedrückt; und die Enveloppe dieser Schar ist eine Curve vierten Grades, welche die zwei festen Punkte zu Doppelpunkten hat. Diese Curve wird genauer betrachtet, und es wird gezeigt, dass jede Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten in dieser Weise erzeugt werden kann. Nimmt man die cyklischen Punkte der Ebene zu diesen Doppelpunkten, so erhält man die anallagmatischen Curven vierter Ordnung. Diese können daher als Enveloppe eines veränderlichen Kreises betrachtet werden, d. i. aller Kreise, die Dreiecken umgeschrieben sind, von denen jedes einem Kegel-

schnitt eingeschrieben und zugleich einem andern umgeschrieben ist. Die allgemeine Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten kann in homogenen Punktcoordinaten x, y, z so ausgedrückt werden:

$$x : y : z = C^2 : 1 : \varphi(C),$$

wo

$$\varphi(C) = \frac{aC^2 + bC + c \pm \sqrt{a'C^4 + \cdots}}{a''C^2 + b''C + c}.$$

Hieraus ergiebt sich die Parameterdarstellung mit Hülfe elliptischer Functionen. Mz.

G. de Longchamps. Rapprochement entre la trisectrice de Mac-Laurin et la cardioïde. Prag. Ber. 601-608.

Der Herr Verfasser stellt den Satz voran: Die trisecirende Curve des Maclaurin und die Kardioide können aus einander durch Transformation mittels reciproker Polaren erzeugt werden, wobei die vermittelnde Figur ein passend gewählter Kreis ist. Dies wird in sehr einfacher und leicht verständlicher Weise gezeigt. Ohne die Deduction hier zu wiederholen, mögen nur die bezüglichen Gleichungen angegeben werden. Der vermittelnde Kreis hat die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Die Gleichung der trisecirenden Curve ist:

$$x(x^2 + y^2) = 4R^3 - 3R(x^2 + y^2).$$

Von jedem Punkte dieser Curve gehen an den Kreis zwei Tangenten, und die Enveloppe aller Berührungssehnen hat die Gleichung in Polarcoordinaten:

$$3\varrho = 2R\cos\omega + 2R,$$

wobei die X-Axe die Axe des Polarcoordinatensystems ist, der Pol die Coordinaten $x = -\frac{R}{3}$, $y = 0$ hat, und ϱ, ω die laufenden Polarcoordinaten sind. Es werden einfache Tangentenconstructionen für die Curven angegeben; auch wird die trisecirende

Curve quadrirt, und zum Schluss finden sich Bemerkungen über die Krümmung beider Curven. Mz.

M. Chini. Una proprietà della lemniscata di Bernoulli. Batt. G. XXV. 51-53.

Der Herr Verfasser beweist zuerst von der Bernoulli'schen Lemniskate folgenden Satz: Jeder Punkt dieser Curve hat Abstände von den beiden Brennpunkten, deren Differenz gleich der Diagonale desjenigen Quadrates ist, welches die Entfernung des Curvenpunktes von der Mitte der Curve zur Seite hat. Auf diese Weise tritt die Lemniskate zur gleichseitigen Hyperbel in Beziehung, und die Punkte der Lemniskate ergeben sich als Durchschnitte einer Schar concentrischer Kreise mit einer Schar confocaler gleichseitiger Hyperbeln. Später werden die Gleichungen angegeben; es zeigt sich, dass die Elimination von z aus den Gleichungen:

$$x^2+y^2 = z^2; \quad \frac{2x^2}{z^2}-\frac{2y^2}{2a^2-z^2} = 1,$$

zu der Gleichung der Lemniskate führt:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2) = 0.$$

Mz.

F. Zumkley. Analytische Untersuchung einer Gruppe verwandter Umhüllungslinien. II. Teil. Pr. Progymn. Eupen. (No. 411). S. 3-22 u. 3 Taf. 4°.

Der Bericht ist mit dem über Teil I zusammen gegeben in F. d. M. XVIII. 1886. 698-699. Lp.

J. Mister. Propriétés de la courbe d'Agnesi. Mathesis VII. 5-6.

Mn.

G. Maisano. Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der doppelten Tangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet. Math. Ann. XXIX. 431-446.

Die drei Restpunkte, welche die an eine C_5 gelegte Tangente aus dieser noch ausschneidet, hängen von einer Gleichung dritten Grades ab. Die Discriminante Δ der letzteren, gleich Null gesetzt, muss zu der Gleichung der Curve $F_{48} = 0$ führen, welche durch die Berührungspunkte der 120 Doppeltangenten der C_5 hindurchgeht. In der That existirt die Relation:

$$\Delta = 4(A_0 A_2 - A_1^2)(A_1 A_3 - A_2^2) - (A_0 A_3 - A_1 A_2)^2 = u_x^{14} F$$

unter der Voraussetzung, dass die Gleichung der C_5 erfüllt sei.

Mittels eingehender symbolischer Rechnung werden die A durch Formen der ersten sechs Grade des Systems der (die C_5 repräsentirenden) Grundform f ausgedrückt. My.

D. Barcroft. Forms of non-singular quintic curves. American J. X. 131-140.

Bezeichnet $u = 0$ eine Curve dritter Ordnung, $v = 0$ eine Curve zweiter Ordnung und k einen beliebig klein zu wählenden Parameter, so kann aus der zerfallenden Curve $uv = 0$ auf Gestalt, Wendepunkte und Doppeltangenten der Curve $uv = k$ geschlossen werden; z. B. je nachdem u und v sich in 6, 4, 2, 0 reellen Punkten schneiden, hat die abgeleitete Curve 15, 11, 7, 3 reelle Wendepunkte. In Verfolg dieses Gedankens zählt der Verfasser 80 Formen nicht singulärer Curven fünfter Ordnung auf. Beigegeben sind 47 Figuren von Formen der Curven mit 15 reellen Wendepunkten. R. M.

F. Morley. Note on geometric inferences from algebraic symmetry. American J. X. 173-174.

Wenn an einer in x, y symmetrischen Function eine in x, y symmetrische Operation vorgenommen wird, so muss das Resultat auch in x, y symmetrisch sein. Gestützt auf diese evidente Bemerkung leitet der Verfasser ohne jede Rechnung einige auf die singulären Punkte und Tangenten der beiden Curven:

$$(yz+zx+xy)^2-kx^2yz=0,$$
$$(yz+zx+xy)^3+9kx^2y^2z^2=0$$

bezüglichen Gleichungen und Sätze ab. R. M.

W. Beisswanger. Analytische Behandlung einiger Curven höherer Ordnung. Pr. Realanst. Reutlingen (No. 555). 42 S. u. 5 Taf. 4°.

Die Gleichungen der betrachteten Curven in rechtwinkligen Coordinaten sind:

$$y^n = cx^{n-1} \qquad (n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7),$$
$$y^{2n+1} = c^2x^{2n-1} \qquad (n=1,\ 2,\ 3),$$
$$x^{2n+1}+y^{2n+1} = c^{2n+1} \qquad (n=1,\ 2,\ 3),$$
$$y^{2n}(c-x)-x^{2n+1}=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3).$$

Nachdem die Form der Curve festgestellt ist, berechnet der Verfasser (ohne Differentialrechnung anzuwenden) die Gleichungen der Tangente und Normale, die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, den Krümmungsradius, die Länge der Subtangente u. dgl. m., zuerst für die besonderen Zahlenwerte von n, nachher für das allgemeine n. Lp.

M. Baker. A collection of solutions of the trisection problem. Wash. Bull. X. 96-100.

Bericht über eine private Sammlung zur Literatur der Aufgabe der Dreiteilung eines Winkels, welche Hr. Baker seit mehreren Jahren sich angelegt hat unter den Rubriken: 1. Historische Einleitung. 2. Dreiteilung durch Kegelschnitte. 3. Dreiteilung durch besondere oder höhere Curven. 4. Dreiteilung durch Mechanismen. 5. Dreiteilung durch Näherung. 6. Falsche Dreiteilungen. 7. Bibliographie. Hr. Curtis ergänzt die Angaben des Hrn. Baker aus einer von ihm seit acht Jahren angelegten ähnlichen Sammlung und hebt hervor, dass eigentlich nur die Curven brauchbar sind, welche durch geeignete Mechanismen

gezeichnet werden können, wie Hr. W. Hillhouse aus New Haven dies jüngst mit fünf verschiedenen Curven ausgeführt hat.

Lp.

H. Ekama. Die Lissajous'schen Curven. Hoppe Arch. (2) VI. 39-68.

Die aus der Physik bekannten Lissajous'schen Stimmgabelcurven werden in dieser Arbeit eingehend untersucht. Die beiden Schwingungsrichtungen, welche bei der Entstehung dieser Curven statthaben, werden zu Coordinatenaxen gewählt. Da der allgemeine Fall vorausgesetzt ist, in welchem die Richtungen einen Winkel ω bilden, so wird ein schiefwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt. Die Amplituden der beiden Schwingungsbewegungen seien a für die eine, in der Axe OX stattfindende, und b für die andere, die in der Axe OY geschieht; und in der Zeit, in welcher die eine Bewegung n Schwingungen macht, möge die andere m Schwingungen machen. Hier können n und m als ganzzahlig ohne gemeinsamen Factor vorausgesetzt werden. Wird nun die Zeit von dem Augenblick an gerechnet, in welchem der Punkt sich auf der Axe OY befindet, so sind zur Zeit t die Coordinaten des schwingenden Punktes:

$$(1) \qquad x_1 = a\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad y_1 = b\sin 2\pi\left(\frac{t}{T'}+\frac{p}{\lambda'}\right),$$

p ist die Phasendifferenz beider Bewegungen; T Schwingungszeit und λ Wellenlänge der Bewegung in der X-Axe; T' und λ' die entsprechenden Grössen für die Y-Axe. Auch ist:

$$nT = mT' \text{ und } n\lambda = m\lambda'.$$

Durch Elimination von t aus den Gleichungen (1) erhält man die allgemeine Gleichung der Lissajous'schen Curven. Diese werden nun ausführlich betrachtet. (Vgl. den Bericht über die Arbeit desselben Verfassers im Nieuw Archief XIII. 184-212, F. d. M. XVIII. 1886. 704).

Mz.

O. Walterhöfer. Ueber die Gestalt der Schwingungscurven, welche durch das Zusammenwirken zweier

unter einem Winkel von 90^0 erfolgenden hin- und hergehenden Bewegungen mit ungleichen Schwingungsanfängen entstehen. Pr. Realprogymn. Frankenhausen. 32 S. 4°.

Der Verfasser berechnet und zeichnet 20 von den bekannten, zuerst durch Lissajous studirten Schwingungscurven, welche durch die Zusammensetzung der beiden geradlinigen Schwingungen

$$x = r\cos\frac{2\pi}{T}t,\quad y = r_1\cos\frac{2\pi}{T_1}(t-\alpha)$$

entstehen, indem er für $\frac{T_1}{T}$, $\frac{r_1}{r}$, $\frac{\alpha}{T_1}$ einfache rationale Werte annimmt. R. M.

G. Chrystal. On certain inverse roulette problems. Edinb. M. S. Proc. V. 38-50.

Die Erzeugung gewisser Curven als Rouletten bildet den Hauptgegenstand dieses Aufsatzes, und die Untersuchungsmethoden beruhen auf der Pedalgleichung (p, r-Gleichung) einer Curve. Im ersten Teile des Aufsatzes ist nach Annahme der Centroden-Raum gegeben und die durchgeführten Fälle sind einige, in denen der Centroden-Raum 1) eine gerade Linie, 2) ein Kreis ist. Ist dann der Centrodenkörper gegeben, so werden Fälle untersucht, in denen derselbe eine Gerade ist. Zuletzt wird die Erzeugung einer Curve mittels identischer Centroden erklärt. Gbs. (Lp.)

P. G. Tait. Note on Milner's lamp. Edinb. M. S. Proc. V. 97-98.

A. Cayley. On a differential equation and the construction of Milner's lamp. Edinb. M. S. Proc. V. 99-101.

Hr. Tait bezieht sich auf De Morgan's „Budget of paradoxes“ S. 149, wo die Lampe beschrieben wird als ein „hohler Halbcylinder, aber nicht mit einer circularen Curve“, der sich auf Zapfen dreht. Die Gestalt des Cylinders ist so, dass er sich dreht, wie viel Oel er auch enthalten mag, bis das Oel dem

Dochte zufliesst, der am Rande befestigt ist. Beim Aufsuchen der Gestalt der Curve hatte Hr. Tait einen Kreiscylinder gefunden. Da er jedoch an der Richtigkeit zweifelte, so wandte er sich an Hrn. Cayley, der die verlangte Differentialgleichung, nämlich

$$b^3\cos(\alpha+\theta) = a\cos\theta\int_\theta^\beta r^3 d\theta$$
$$-\tfrac{2}{3}\left\{\cos\theta\int_\theta^\beta r^3\cos\theta d\theta + \sin\theta\int_\theta^\beta r^3\sin\theta d\theta\right\}$$

in einer für die Aufgabe geeigneten Form auflöste.

Gbs. (Lp.)

Schoentjes. Sur un mode de génération de la spirale hyperbolique. Mathesis VII. 248-249.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Teil 1 u. 2. Paris. Gauthier-Villars. 1887-89.

Der um die Infinitesimalgeometrie hoch verdiente Meister hat durch die Herausgabe dieser Vorlesungen ein Lehrbuch geschaffen, welches bestimmt erscheint, auf lange Zeit hinaus die Schritte der Geometer zu leiten. Sein bewundernswerter Fleiss und seine umfassendste Kenntnis alles bisher auf dem behandelten Gebiete Geleisteten werden dem vollendeten Werke, von dem bisher zwei Teile erschienen sind, den Wert einer fast selbst-

ständigen Bibliothek der Infinitesimalgeometrie verleihen. Auf jeder Seite, und auch da, wo der Verfasser Bekanntes abhandelt, findet der Leser überraschend elegante Darlegungen und Wendungen, so wie eine Fülle originaler Gedanken. Bei dieser Sachlage würde eine eingehende Besprechung des nicht genug zu empfehlenden Werkes einen Raum beanspruchen, der den an dieser Stelle zu Gebote stehenden weit überschreiten müsste. Wir können uns daher nur auf eine kurze andeutende Inhaltsangabe beschränken.

Der erste Teil des Werkes zerfällt in drei Bücher von neun, acht und zwölf Capiteln. Das erste Buch behandelt die Anwendungen der Geometrie auf die Theorie der relativen Bewegungen. Als Grundlage der Theorie der krummen Linien und Flächen giebt der Verfasser eine Reihe von Sätzen über die Bewegung eines festen Trieders, bei welcher die drei Rotationscomponenten und die Geschwindigkeitscomponenten der Eckpunkte als Functionen eines oder zweier Parameter gegeben gedacht werden. Er zeigt auf eleganteste Weise, dass bei dieser Angabe die Ermittelung der Richtungscosinus der Triederkanten auf die Integration einer allgemeinen Riccati'schen Gleichung zurückgeführt werden kann, und giebt eine Menge interessanter Anwendungen des Vorgetragenen. Darauf wendet er sich zu den krummlinigen Coordinaten und zu den Flächen, die durch kinematische Eigenschaften definirt werden, giebt die Sätze von Bour über die Schraubenflächen und die weiter gehenden von Maurice Lévy, so wie Sätze über die durch Bewegung fester Curven erzeugten Flächen.

Im zweiten Buche werden verschiedene Systeme krummliniger Coordinaten behandelt. Zunächst diejenigen, welche zu einem System conjugirter Linien einer krummen Fläche führen, in welche ein Theorem von Königs einführt. Darauf folgen allgemeine und umfangreiche Betrachtungen über Krümmungslinien und asymptotische Linien. Alsdann die orthogonalen und isothermen Systeme und ein ausgezeichnet schönes Capitel über conforme Abbildung. Weiter wird das durch die Krümmungslinien gegebene Orthogonalsystem behandelt und die Theorie der

pentasphärischen Coordinaten angeknüpft. Es folgt eine meisterhafte Darstellung der Theorie der Tangentialcoordinaten (Ebenencoordinaten der Tangentialebene) sowie eine Reihe interessanter Anwendungen.

Im dritten Capitel wendet sich Hr. Darboux zu den Minimalflächen. Nach einer vortrefflichen historischen Einleitung in die Theorie folgen die in eleganter und eigenartiger Form dargelegten Formeln von Weierstrass und der Zusammenhang derselben mit den Functionen eines complexen Arguments.

Es werden weiter Sätze von Minding, Bour, Bonnet und Enneper'sche Flächengattungen besprochen, die Bonnet'schen adjungirten Flächen und deren Schwarz'sche Verallgemeinerung.

Daran schliesst sich die Mitteilung der Lie'schen Untersuchungen, seine schöne Entdeckung der Doppelflächen und eine Betrachtung über Flächen, die nur eine Seite darbieten. Die bisher bekannten Untersuchungen über algebraische Minimalflächen werden in grosser Vollständigkeit mitgeteilt. Darauf folgen die Schwarz'schen Formeln für die Bestimmung einer Minimalfläche, welche eine gegebene Curve enthält und in jedem Punkte derselben eine gegebene Tangentialebene besitzt. Demnächst kommen einige Sätze von Lie, die sich auf Eigenschaften algebraischer Minimalflächen beziehen, zur Besprechung. Die Arbeiten von Riemann, Schwarz und Weierstrass über Minimalflächenstücke, die durch geradlinige Contouren vollständig begrenzt werden, werden in eigenartigster Weise dargestellt und weitere Anwendungen der Theorien dieser Geometer gegeben.

Hiermit schliesst die ausgezeichnete Darstellung der Theorie der Minimalflächen, die mit Ausnahme der Untersuchungen über die Grenzen, innerhalb deren Minimalflächenstücke wirkliche Minima darstellen, alles bisher auf diesem Gebiete Geleistete besprochen hat.

Der zweite Teil des Werkes (1889 erschienen) beginnt mit einer Darstellung der Theorie der Congruenzen, die in wichtigem und elegantem Uebergang geradezu in die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einführt, und zwar in die Laplace'sche Methode der Integration derselben.

Die neuen Untersuchungen, welche der Verfasser im zweiten Capitel des vierten Buches mitteilt, gehören zu den schönsten und fruchtbarsten, welche bisher in der Theorie dieser Differentialgleichungen veröffentlicht worden sind, und geben einen neuen Beweis der hohen Meisterschaft des Verfassers. Sie erledigen die Frage nach den durch die Laplace'sche Methode integrirbaren Differentialgleichungen endgültig, eine Frage, die von Moutard schon für gewisse Formen derselben mit Erfolg behandelt worden war. Wir bedauern, eine ausführliche Darstellung dieser schönen und umfassenden Untersuchungen hier nicht geben zu können.

Hierauf wendet sich Hr. Darboux zu der Behandlung der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen Charakteristiken, von der ein besonderer Fall schon durch Euler bei seinen Untersuchungen über Schallfortpflanzung behandelt wurde, und geht dazu über, einen Gedanken von Riemann, der die Integration dieser Gleichung in seiner berühmten Abhandlung über die Fortpflanzung von Luftwellen von endlicher Schwingungsweite gegeben hat, in wahrhaft meisterhafter Weise darzustellen und weiter zu führen. Auch hier müssen wir es uns versagen, eine ausführlichere Besprechung der wichtigen Darlegungen zu geben, die von jedem Freunde mathematischer Wissenschaften gelesen werden sollten. Bei der Riemann'schen Integrationsmethode spielt die Lagrange'sche Adjungirte der zu behandelnden Differentialgleichung eine wesentliche Rolle. Beide Differentialgleichungen sind gleichzeitig integrirbar, die eine durch die Integration der anderen. Hr. Darboux fasst den von Riemann kaum angedeuteten Zusammenhang in seiner vollen Allgemeinheit ins Auge und beschäftigt sich daher mit den allgemeinen Eigenschaften der Lagrange'schen Adjungirten in eigenartiger und elegantester Darstellung. Nach der Untersuchung in Beziehung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, wendet er sich zu den Analogien bei den linearen partiellen Differentialgleichungen und speciell denen zweiter Ordnung mit zwei Variabeln. Das sechste Capitel des vierten Buches bringt eine Vervollständigung der Untersuchungen über die Laplace'sche Integrationsmethode und endigt mit einer directen

Berechnung der Invarianten, welche den nach dieser Methode zu bildenden Reihen von neuen linearen Differentialgleichungen entsprechen, und der Angabe der vollständigen Lösung jeder dieser Differentialgleichungen. Auch hier ist es nicht möglich, die ganze Fülle des wichtigen mitgeteilten Stoffes auch nur anzudeuten.

Das siebente Capitel beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen, deren Invarianten gleich sind, deren Integral, wenn es durch die Methode von Laplace überhaupt erlangt werden kann, explicite gegeben wird. Zusammenhang mit den Untersuchungen von Moutard. Von hohem Interesse und grosser Wichtigkeit ist das achte Capitel, welches die Zurückführung der Integration linearer partieller Differentialgleichungen auf andere behandelt, derart, dass an jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung eine Reihe von ebensolchen Gleichungen geknüpft ist, deren jede mit der ursprünglichen gleichzeitig integrabel ist.

Das neunte Capitel behandelt eine besondere Klasse der Differentialgleichungen von gleichen Invarianten, die Hr. Darboux harmonische Gleichungen nennt, eine Klasse, die bei geometrischen und mathematisch-physikalischen Problemen häufig auftritt. In Beziehung auf sie giebt Hr. Darboux tiefe und wichtige Studien von überraschender Eleganz, die die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mannigfach bereichern und die grösste Aufmerksamkeit der Geometer verdienen. Gleiches gilt von den, geometrische Anwendungen enthaltenden, Capiteln X-XV des vierten Buches.

Das fünfte Buch des Werkes handelt von den auf krummen Flächen gezogenen Linien und bringt zunächst die Formeln von Codazzi und eine Reihe von Anwendungen derselben. Er entwickelt weiter die Krümmungs- und Torsionsverhältnisse der auf Flächen gezogenen Linien und Sätze von Laguerre, Bonnet, Beltrami, Enneper.

Das sechste Buch geht über zur Theorie der geodätischen Linien der krummen Flächen, die Hr. Darboux wiederum in vollendeter Weise vorträgt und wesentlich bereichert. Der Zu-

sammenhang der Theorie der geodätischen Linien mit einem besonderen Fall der Bewegung eines Punktes auf einer krummen Fläche giebt ihm Gelegenheit, an die allgemeinsten Transformationen der Gleichungen der Dynamik elegante und wichtige Untersuchungen anzuschliessen, die wertvolle Anwendungen auf geometrische Probleme ermöglichen. Auch über diese hervorragenden Untersuchungen, welche den zweiten Teil des Werkes endigen, Ausführlicheres mitzuteilen, erlaubt uns der beschränkte Raum unseres Referates nicht.

Wie schon im Anfange bemerkt, und wie wir am Schlusse wiederholen, würde eine alle Teile des ausgezeichneten Werkes würdigende ausreichende Besprechung selbst auf den Umfang eines Buches anwachsen müssen. Wir mussten uns darauf beschränken, nur den tiefen Eindruck anzudeuten, den das Darboux'sche Werk, dessen Fortsetzung wir mit Spannung entgegensehen, auf uns gemacht hat. Wgt.

E. Goursat. Sur un problème relatif aux courbes à double courbure. Ann. de la Fac. d. Sc. Toul. I. C. 1-26.

Das Problem, um welches es sich handelt, ist, eine Curve durch Coordinatengleichungen darzustellen, wenn ihre Krümmung und Torsion als Functionen des Bogens gegeben sind. Nach gegenwärtigem Standpunkt reducirt sich das Problem auf eine imaginäre lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese hat die Eigenschaft, dass aus einer Lösung der conjugirte Wert einer zweiten durch Differentiation hervorgeht. Nachdem beide bekannt sind, verursacht die Bestimmung der Constanten gemäss der Orthogonalität der neun Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale noch eine etwas längere Rechnung. Ueber diesen Standpunkt geht auch die vorliegende Arbeit nicht hinaus. Zunächst bedarf nun eine Behauptung des Verfassers der Berichtigung, welche die vorgängige Erreichung der genannten Resultate in Zweifel stellt. Er citirt (indem er einer Mitteilung von anderer Seite folgt) die Arbeit: Hoppe, über die Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion, Crelle J. LX. 182,

LXIII. 122, sagt aber, sie beschäftige sich nur mit einem speciellen Falle jenes Problems. Nach einer späteren Stelle S. 19 wird sogar eine sphärische Curve als Gegenstand angegeben. Hierauf ist zu erwidern: Jene Arbeit umfasst vollständig dasselbe Problem wie die vorliegende, die Reduction, die genannte Eigenschaft und die Constantenbestimmung, und von dem angeblichen Inhalt steht kein Wort darin. Sind aber auch die drei genannten Resultate seit 30 Jahren bekannt, so enthält doch die Arbeit eine wertvolle Leistung in der Form und Methode der Reduction. Die Differentialgleichung ist zwar weniger einfach, aber ihre Gesuchte steht mit den Gesuchten des Problems in directer, einfacher und symmetrischer Beziehung. Das Verfahren ist folgendes: Sind α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente, α'', β'', γ'' die der Binormale, so setzt man

$$u = \alpha + i\alpha''; \quad v = \beta + i\beta''; \quad w = \gamma + i\gamma''$$

und erhält durch Differentiation und Elimination eine lineare Gleichung dritter Ordnung für u, der auch v und w genügen. Da $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, so ist nach einem Satze von Laguerre die Möglichkeit ihrer Reduction auf die zweite Ordnung gewährleistet. Sei nun $u = Y^2$ und

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} = a \frac{\partial Y}{\partial s} + bY,$$

dann findet man durch Differentiation und Elimination gleichfalls eine lineare Gleichung dritter Ordnung für u, welche, mit der vorigen identificirt, drei Gleichungen für a und b ergiebt. Die dritte zeigt sich identisch erfüllt, wenn a, b den zwei ersten genügen. Nach Einsetzung der Werte von a und b hat Gl. (5) die Form:

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} = \frac{\partial V}{V \partial s} \frac{\partial Y}{\partial s} - \tfrac{1}{4} V V_0 Y,$$

wo $V = \frac{1}{R} + \frac{i}{T}$, R und T Krümmungs- und Torsionsradius, und V_0 conjugirter Wert von V ist. Auf eine Lösung von Gl. (8) reduciren sich die Werte von α, β, γ, nämlich:

$$\alpha = R\left[-\frac{2Y}{V_0}\frac{\partial Y_0}{\partial s}\right];\quad \beta = \frac{R}{2}\left[iY^2 + \frac{4i}{V_0^2}\left(\frac{\partial Y_0}{\partial s}\right)^2\right];$$

$$\gamma = \frac{R}{2}\left[Y^2 - \frac{4}{V_0^2}\left(\frac{\partial Y_0}{\partial s}\right)^2\right],$$

woraus die 6 übrigen Richtungscosinus leicht hervorgehen.

H.

A. E. Pellet. Sur les normales aux courbes. C. R. CIV. 1501-1502.

Auf der Normale N einer Curve s, welche mit der Hauptnormale den constanten Winkel α bildet, wird die constante Strecke l bis zum Punkte (x_1, y_1, z_1) abgeschnitten. Dieser beschreibt bei Variation des Bogens s eine Curve s_1. Es werden für den Fall, wo N Hauptnormale von s_1 ist, drei bemerkenswerte Beziehungen zwischen beiden Curven ohne Beweis mitgeteilt. Seien ϱ und r Krümmungs- und Torsionsradius von s, ϱ_1 und r_1 von s_1 und $u = \sin\alpha\int\frac{ds}{\varrho} + \text{const.}$ Dann ist die Bedingung des Falles:

$$\frac{l}{r}\cot u + \frac{l\cos\alpha}{\varrho} - 1 = 0,$$

und zwar drückt u den Winkel zwischen beiden Normalebenen aus; s_1 ist Kürzeste auf der Canalfläche, welche die um Punkte von s mit dem Radius l beschriebenen Kugeln umhüllt. Die drei Relationen sind:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{r_1^2}\right)ds_1^2 = \left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right)ds^2,$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{l\cos\alpha - \varrho\sin^2 u}{l(\varrho - l\cos\alpha)};\quad rr_1\sin^2 u = l^2.$$

Es wird dann der besondere Fall betrachtet, wo s_1 eine Helix ist. Zu bemerken ist, dass die Curve s hinsichtlich der Richtungs- und Krümmungsverhältnisse beliebig ist und nur ihre Dimensionen durch die Bedingung beeinflusst werden. H.

C. Stolp. Eene formule uit de analytische meetkunde. Nieuw Arch. XIV. 201-208.

Die vorliegende Arbeit handelt über die bekannte Formel für den unendlich kleinen Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Geraden desselben Systems. Diese Formel wird in eine etwas andere Gestalt gebracht und dann zur Bestimmung der drei Krümmungswinkel von Raumcurven brauchbar gemacht; die erhaltenen Resultate führen auf einfache Weise zu dem Theorem von Lancret. Sodann werden sie angewandt auf die Krümmung des Durchschnittes zweier Oberflächen, und daraus wird das Theorem von Meunier abgeleitet. G.

G. Koenigs. Sur l'emploi de certaines formes quadratiques en géométrie. Toul. Ann. I. E. 13-43.

Moment zweier Geraden heisst das Product ihres normalen Abstands und des Sinus des Winkels zwischen ihnen. Sind die Geraden zwei consecutive Lagen einer bewegten Geraden $x = az+p$, $y = bz+q$, so heisst es das elementare Moment der letzteren und hat den Ausdruck

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1+a^2+b^2}.$$

Variirt die Gerade mit drei Parametern u_1, u_2, u_3, so stellt sich dasselbe als ternäre quadratische Form von du_1, du_2, du_3 dar, deren Discriminante $\varDelta$ den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bildet, die sich auf den Fall $\varDelta = 0$ beziehen, dessen Bedingungen und Consequenzen sie ermitteln. Wie Cayley entdeckt und nachher Klein allgemein bewiesen hat, ist $\varDelta = 0$ notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gerade Tangente einer constanten Fläche ist. Gegenwärtig fragt der Verfasser weiter, welche Bedingung hinzukommt, damit sie Secante einer Curve wird? Wenn $\varDelta = 0$, zerfällt $\varDelta$ in zwei lineare Factoren. Als notwendige und ausreichende Bedingung ergiebt sich, dass einer der Factoren durch einen Multiplicator integrabel wird. Eine Anwendung der Resultate führt zur Be-

stimmung der asymptotischen Linien auf der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung, wie schon Klein durch Anwendung elliptischer Coordinaten gefunden hatte. Ferner wird Anwendung gemacht auf die Transformation der asymptotischen Linien in Krümmungslinien und auf die singulären Complexe von Kugeln.

H.

G. Koenigs. Sur la forme des courbes à torsion constante. Toul. Ann. I. E. 1-8.

In Ermangelung der notwendigsten Angaben dem Ref. unverständlich. H.

F. P. Ruffini. Di alcune proprietà della rappresentazione sferica del Gauss. Bologna Mem. (4) VIII. 661-680.

Die Coordinaten eines Punktes M einer Fläche seien durch die Krümmungsparameter u und v dargestellt, und es sei das Quadrat des Linienelementes $ds^2 = Edu^2+Gdv^2$; r_1 und r_2 seien die beiden Hauptkrümmungsradien. Die Fläche sei in der bekannten Weise auf die Gauss'sche Kugel abgebildet, d. h. so, dass in entsprechenden Punkten die Normalen beider Flächen gleichgerichtet sind. Sucht man nun diejenigen Elemente in M, welche mit den entsprechenden Elementen der Kugel einen gegebenen Winkel bilden, dessen Cosinus gleich A sei, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{G^2}{r_1^2}(1-A^2)dv^4+EG\left(\frac{2}{r_1r_2}-A\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\right)du^2dv^2 + \frac{E^2}{r_2^2}(1-A^2)du^4 = 0.$$

Es giebt also in jedem Punkte im allgemeinen vier Richtungen, welche die Bedingung erfüllen. Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für die Untersuchungen des Herrn Verfassers, durch welche viele bekannte Resultate der Flächentheorie in anderer Form wiedergewonnen werden. Die abwickelbaren Flächen,

bei welchen die Gauss'sche Abbildung in eine sphärische Curve degenerirt, und die Minimalflächen werden besonders untersucht.

A.

Em. Barbier. Sur une généralisation de l'indicatrice de Ch. Dupin. C. R. CV. 516-518.

Als wesentlichen Inhalt der vorliegenden Note, wenn auch in etwas anderer Form dargestellt, möchte Referent folgendes angeben. Wenn zwei Flächen von unveränderlicher Gestalt in den gewöhnlichen Flächenpunkten P und P_1 gemeinschaftliche Normalen haben, und die eine translatorisch so bewegt wird, dass die Distanz $PP_1 = +\delta$ oder $= -\delta$ unendlich klein wird, so kann für ein unendlich kleines Flächenstück in der Nähe der Normale der Durchschnitt beider Flächen als ein Kegelschnitt angesehen werden, welchen man als den der betreffenden Berührung entsprechenden Dupin'schen Kegelschnitt bezeichnen kann. Ausserdem schneidet die Tangentialebene der festen Fläche in P die bewegliche Fläche, und die Tangentialebene der bewegten Fläche in P_1 schneidet die feste Fläche je in einer Curve, die in der Nähe der Normale ebenfalls als Kegelschnitte angesehen werden dürfen, nämlich als die Dupin'schen Kegelschnitte im engeren Sinne. Zwischen diesen drei unendlich kleinen Kegelschnitten, welche im Grenzfall in die gemeinschaftliche Tangentialebene fallen, findet folgende Beziehung statt: Legt man durch P irgend eine Tangente, welche auf den Dupin'schen Kegelschnitten im engeren Sinne die Vectoren $\varrho\sqrt{\delta}$ und $\varrho_1\sqrt{\delta}$ bestimmt, dagegen auf dem Durchschnitt der Flächen, d. h. dem Dupin'schen Kegelschnitt im weiteren Sinne, den Vector $r\sqrt{\delta}$, so ist $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho_1^2}$. Sind also die Dupin'schen Kegelschnitte bekannt, so lässt sich der Durchschnitt der beiden Flächen in der Nähe von P construiren. Indem man den Aehnlichkeitsfactor $\sqrt{\delta}$ durch die Einheit ersetzt, erhält man drei endliche Kegelschnitte, welche die Beziehung veranschaulichen. Es ist zu beachten, dass ϱ, ϱ_1 und r reell und imaginär, also ihre Quadrate

positiv und negativ sein können. Berühren sich zum Beispiel zwei positiv gekrümmte Flächen gleichartig, und wird die nach der convexen Seite gerichtete Normale positiv gezählt, so ist bei der oben gewählten Bezeichnung ϱ stets reell, ϱ_1 stets imaginär, so dass r entweder immer reell, oder immer imaginär bleiben kann (reelle oder imaginäre Ellipse) oder auch teilweise reell, teilweise imaginär sein kann (Hyperbel). Ersetzt man δ durch $-\delta$, geschieht also die Annäherung von entgegengesetzter Seite, so erhalten ϱ^2, ϱ_1^2 und r^2 durchweg die entgegengesetzten Vorzeichen.

A.

Genty. Note sur la courbure des sections normales d'une surface. Nouv. Ann. (3) VI. 24-29.

Wenn die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für einen Flächenpunkt gegeben sind, den Krümmungsmittelpunkt für einen beliebigen andern Normalschnitt zu construiren.

Die Construction wird mit Hülfe der Euler'schen Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

für positiv gekrümmte Flächen in sehr einfacher Weise ausgeführt. Aus der Construction ergiebt sich dann sofort der Zusammenhang zwischen den Krümmungen von Hauptschnitten in conjugirten Richtungen. Es werden an diese Construction noch einige weitere Betrachtungen geknüpft. Namentlich wird darauf hingewiesen, dass sie bei Aufgaben der descriptiven Geometrie (Schattenconstructionen) von Nutzen ist.

Endlich wird gezeigt, wie sich die Aufgabe der Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugirten Durchmessern mit denselben Hülfsmitteln lösen lässt.

Dass die mitgeteilte Construction bei negativ gekrümmten Flächen nicht gültig ist, hätte wohl erwähnt werden müssen.

A.

M. Demartres. Sur la courbure totale des surfaces. S. M. F. Bull. XV. 34-35.

M. Demartres. Sur un point de la théorie des surfaces.
S. M. F. Bull. XV. 129-133.

Ist M ein beliebiger Punkt einer Fläche, h sein Abstand von einer festen Ebene, ϑ der Neigungswinkel der Tangentialebene in M gegen jene Ebene, φ der Winkel, welchen die Spur der Tangentialebene in der festen Ebene mit irgend einer festen Geraden in dieser Ebene bildet, und lässt man den Punkt M in einer bestimmten Richtung zu einem Nachbarpunkt M' übergehen, so erhalten die betrachteten Grössen Incremente, und der Herr Verfasser nennt den Ausdruck

$$f = \frac{dh}{d\varphi \sin^2 \vartheta}$$

die Flexion des Elementes MM', und beweist den folgenden Satz. Sind f und f' die zu zwei conjugirten Richtungen in M gehörigen, auf dieselbe feste Ebene bezogenen Flexionen, R und R_1 die beiden Hauptkrümmungs-Radien in M, so ist $ff' + RR_1 = 0$.

Das Product der beiden zu conjugirten Richtungen gehörigen Flexionen ist somit unabhängig von der Wahl dieser Richtungen und von der Lage der festen Ebene. Fällt insbesondere MM' in die Richtung einer Asymptote des Dupin'schen Kegelschnittes in M, so ist $f = -\sqrt{RR'}$. Hierdurch wird man auf eine grosse Zahl bekannter Resultate geführt, namentlich bei Regelflächen.

In der zweiten Note werden nun hieran folgende weitere Betrachtungen geknüpft.

Die Flexion eines Elementes ändert sich nicht, wenn die Ebene, auf die sie bezogen ist, sich um ihren Durchschnitt mit der Tangentialebene in M dreht, oder wenn sie sich parallel mit sich selbst verschiebt.

Hierdurch kommt man dazu, die Flexion einer Tangentenrichtung D' in M in Bezug auf eine zweite D zu betrachten, welche mit (DD') bezeichnet wird. Es ergiebt sich dann, dass $(DD') = -(D'D)$ ist. Ferner zeigt sich, dass, wenn DD' einen vorgeschriebenen Wert haben soll, D und D' zwei homographische Büschel beschreiben, welche die Asymptoten des Dupin'schen Kegelschnittes zu Doppelstrahlen haben. Endlich ergiebt sich der Satz:

Wenn die Richtungen D und D' auf einander senkrecht stehen, so ist der absolute Wert von (DD') und $(D'D)$ gleich der entsprechenden geodätischen Torsion, wie dieselbe von Herrn Bertrand in die Flächentheorie eingeführt ist.

A.

R. Lipschitz. Zur Theorie der krummen Oberflächen.
Acta Math. X. 131-136.

R. Lipschitz. Sur les surfaces où la différence des rayons de courbure principaux en chaque point est constante. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)
C. R. CIV. 418.

In der zuerst genannten Abhandlung wird die Aufgabe, diejenigen Flächen zu bestimmen, für welche die Differenz der Hauptkrümmungsradien constant ist, ausführlich behandelt. Die zweite Veröffentlichung enthält nur eine kurze Angabe des Resultats, in welche sich überdies einige Versehen eingeschlichen haben, so dass das Referat sich auf die erst genannte Arbeit beschränken kann. Die Methode knüpft an die in den Berl. Ber. 1883 veröffentlichte Abhandlung des Herrn Verfassers an: Untersuchung über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften (Ref. F. d. M. XV. 1883. 626).

Die Lösung, welche der Herr Verfasser giebt, ist keine allgemeine, vielmehr ist noch eine beschränkende Bedingung hinzugefügt, nämlich, dass der bereits in der früheren Arbeit definirte Stellungswinkel σ nur von einem der beiden Parameter, nämlich von ϑ abhängig sei, nicht aber von φ. Alsdann ergiebt sich folgendes Resultat.

Sind L und M beliebige Constanten und setzt man

$$\sin^4\vartheta-(L+M\cos\vartheta)^2 = F(\cos\vartheta),$$

$$\int\frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = P,\quad \int\frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta}\, d\vartheta = Q,$$

dann ist

$$x = \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}[(2P+M\varphi)\cos\vartheta - 2Q + L\varphi],$$

$$y = \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\left[(2P+M\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{L\cos\vartheta+M}{\sin\vartheta}\sin\varphi\right],$$

$$z = \frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\left[(2P+M\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{L\cos\vartheta+M}{\sin\vartheta}\cos\varphi\right].$$

ϱ_1, ϱ_2 und σ sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\sin 2\sigma\sin^2\vartheta = L+M\cos\vartheta,\quad \cos 2\sigma\sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)},$$

$$\varrho_1+\varrho_2 = (\varrho_1-\varrho_2)\left(2P+\frac{\sqrt{(F\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta}+M\varphi\right).$$

A.

V. Rouquet. Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. Toulouse Mém. (8) IX. 233-268.

Die Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien eben sind, wurden bekanntlich schon vielfach untersucht, u. a. von den Herren O. Bonnet und J. Serret, welche der Herr Verfasser citirt, aber auch von Enneper. (Gött. Abh. XXIII, XXVI, F. d. M. XII. 1880. 579.) Der Herr Verfasser selbst hat früher in einer Thèse de doctorat, Montpellier 1882, für diese Flächen, so wie für solche mit einem System sphärischer Krümmungslinien eine Construction gegeben. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine möglichst einfache analytische Darstellung, welche der Herr Verfasser dadurch erreicht, dass er die Fläche auf Krümmungsparameter bezieht. Die Grundlage der Untersuchung ist die folgende. Bildet man eine Fläche in bekannter Weise auf die Gauss'sche Kugel ab, so dass auf beiden Flächen die Punkte mit gleichgerichteten Normalen einander entsprechen, so sind die Krümmungslinien dadurch ausgezeichnet, dass jedes Bogenelement einer Krümmungslinie dem ihm entsprechenden Element auf der Gauss'schen Kugel parallel ist. Hieraus folgt weiter, dass einer ebenen Krümmungslinie ein Kugelkreis entsprechen muss. Soll also eine Fläche zwei Systeme ebener Krümmungslinien besitzen, so müssen ihnen auf der Kugel zwei Systeme von Kreisen entsprechen, die sich gegenseitig orthogonal durchschneiden. Daraus folgt aber, dass diese Kreise zwei conjugirte

Kreisscharen auf der Kugel bilden müssen, d. h. zwei Scharen, welche durch Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, deren Axen H und H' harmonisch polar einander zugeordnet sind. Diese Axen schneiden somit eine Centrale der Kugel rechtwinklig, und das Product ihrer Abstände vom Mittelpunkte ist gleich dem Quadrat des Kugelradius, d. h. gleich 1. Da die Ebenen der Krümmungslinien den Ebenen der entsprechenden Kugelkreise parallel sind, so folgt, dass die Ebenen jeder Schar von Krümmungslinien einen Cylinder umhüllen, und dass die Seiten des einen der beiden Cylinder mit denen des anderen einen rechten Winkel bilden. Nennt man nun den Abstand der Geraden H' vom Mittelpunkte der Kugel $\cos k$, so sind bei passender Wahl der Coordinatenaxen die Coordinaten eines Punktes der Kugel in folgender Art auszudrücken:

$$x = \frac{\cosh u \cos k - \cos v}{\cosh u - \cos k \cos v},$$

$$y = \frac{\sinh u \sin k}{\cosh u - \cos k \cos v},$$

$$z = \frac{\sin v \sin k}{\cosh u - \cos k \cos v}.$$

Hierin bedeutet

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \mathrm{tgh}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}};$$

u variirt zwischen $-\infty$ und $+\infty$, für reelle Kugelpunkte zwischen 0 und $+\infty$; v variirt zwischen 0 und 2π. Die Curven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ sind die beiden conjugirten Kreisscharen.

Die Gleichung der Tangentialebene einer beliebigen Fläche in dem den Parameterwerten u, v entsprechenden Punkte ist

$$x(\cosh u \cos k - \cos v) + y \sin k \sinh u + z \sin k \sin v = F(u, v),$$

wo $F(u, v)$ eine beliebige Function bedeutet. Um den Berührungspunkt dieser Tangentialebene zu ermitteln, hat man nur diese Gleichung partiell nach u, respective nach v zu differentiiren und aus den drei Gleichungen x, y und z zu berechnen.

Wenn man nun u constant lässt und v um dv vermehrt, so erhält man den Nachbarpunkt der Curve $u = \text{const.}$, und die Be-

dingung, dass das Bogenelement dieser Parameterlinie dem entsprechenden Element der Gauss'schen Kugel parallel sei, führt auf die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0,$$

deren Integral ist

$$F(u, v) = U + V,$$

wo U willkürliche Function von u, V willkürliche Function von v ist. Hiermit ist das Problem gelöst. Für den Fall $k = 0$ tritt eine Singularität ein. Es berühren sich dann alle Kreise je einer Schar in demselben Punkte, und die gemeinsamen Tangenten H und H' beider Scharen schneiden sich rechtwinklig. In diesem Falle werden die Formeln illusorisch. Ersetzt man aber die Parameter u und v durch ku und kv, so kann man den Fall als Grenzfall betrachten, indem man k unendlich klein werden lässt; dann drücken sich die Coordinaten eines Punktes der Gauss'schen Kugel, wie folgt, aus:

$$x = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}, \quad y = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad z = \frac{2v}{u^2+v^2+1}.$$

Die Tangentialebene der gesuchten Fläche nimmt die Form an:

$$x(u^2+v^2-1)+2uy+2vz = F(u, v),$$

wo wie oben zu setzen ist

$$F(u, v) = U + V.$$

Die hier entwickelte Darstellung wird benutzt, um die gefundenen Flächen zu construiren, ebenso ihre Mittelpunktsflächen, und um verschiedene speciellere Arten von Flächen, die darunter mit einbegriffen sind, zu untersuchen, z. B. Enveloppen von Kugeln, Moulures-Flächen und Minimalflächen; der gegenwärtig veröffentlichte Teil der Arbeit, welche fortgesetzt werden soll, behandelt die Minimalflächen noch nicht. A.

R. v. Lilienthal. Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen. Math. Ann. XXX. 1-14.

Der Herr Verfasser wendet die in seinen „Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme" (Bonn 1886 bei E. Weber, Ref. F. d. M. XVIII. 1886. 736-738) entwickelte Theorie auf die Untersuchung der Krümmungsmittelpunktsflächen an. Er stellt die Gleichungen der beiden Krümmungsmittelpunktsflächen auf und bestimmt ihre Hauptkrümmungsradien, ihre Krümmungslinien und ihre asymptotischen Linien. Als specielles Resultat ergiebt sich u. a., dass, wenn die Urfläche eine Minimalfläche ist, dem System der Krümmungslinien auf einer Mittelpunktsfläche ein orthogonales Curvensystem auf der Urfläche entspricht. A.

A. Cayley. On Rudio's inverse centro-surface. Quart. J. XXII. 156-158.

Eine kurze Bemerkung, welche sich auf die Arbeiten von Herrn Rudio (Dissertation, Berlin 1880 und „Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind", J. für Math. XCV. 240-246, F. d. M. XV. 1883. 625) bezieht. Die dort vorkommenden Integrale sind dieselben, welche bei der Bestimmung der geodätischen Linien der Flächen zweiter Ordnung auftreten. Man vergleiche übrigens in dieser Beziehung auch die Arbeit des Herrn Rudio selbst und die des Herrn von Braunmühl: „Ueber die reducirte Länge des geodätischen Bogens", München 1883, Franz (F. d. M. XV. 1883. 655). A.

H. Resal. Note sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution. Nouv. Ann. (3) VI. 57-60.

Rotirt eine ebene Curve um die y-Axe, und betrachtet man auf der Rotationsfläche eine geodätische Linie, welche mit der Meridiancurve in einem beliebigen ihrer Punkte, dessen Abscisse x ist, den Winkel α bildet, so ist $x \sin\alpha = k$ constant. Dies folgt aus dem Flächensatz, wenn man berücksichtigt, dass die geodätische Linie die Bahn eines Massenpunktes ist, auf welchen keine Kräfte wirken, und der gezwungen ist, sich auf der Fläche zu bewegen, und dass die absolute Geschwindigkeit dieses Massen-

punktes constant ist, wenn keine Reibung wirkt. Ist ferner die Länge der Normale der Meridiancurve bis zur y-Axe gleich R', der Krümmungsradius derselben gleich R, der Krümmungsradius der geodätischen Linie $= \varrho$, so ergiebt sich

$$\frac{x^2}{R}+\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)K^2=\frac{x^2}{\varrho}.$$

Hieraus würden sich merkwürdige Eigenschaften für die Rotationsflächen ergeben, deren Meridian eine Cykloide, eine Kettenlinie ist, oder auch für Rotationsflächen die zugleich Minimalflächen sind.

Für Rotationsflächen zweiten Grades leitet der Herr Verfasser eine bereits von Gudermann für das Ellipsoid gefundene Relation ab, nämlich die, dass $\frac{R}{\varrho}$ constant ist. A.

V. Jamet. Théorème sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. Belg. Bull. (3) XIII. 421-424.

E. Catalan. Sur les lignes géodésiques des surfaces de révolution. Belg. Bull. (3) XIII. 425-432.

Man bezeichne mit Oz die Axe einer Umdrehungsfläche, mit xOy eine zu ihr senkrechte Ebene, mit S eine geodätische Linie, mit Σ den Durchschnitt einer Kugel vom Radius R um O als Mittelpunkt mit dem Kegel, dessen Spitze O ist und dessen Erzeugende zu den Tangenten von S parallel sind, mit s und σ die Projectionen von S und Σ auf xOy. Wird R passend gewählt, so fällt σ vermöge einer Viertelumdrehung um Oz mit der reciproken Polare von σ bezüglich des Kreises vom Radius R zusammen. Umkehrung. Hr. Catalan ermittelt eine der Formeln des Hrn. Jamet und sucht den Krümmungsradius einer geodätischen Linie auf. Mn. (Lp.)

Barbarin. Retrouver les éléments d'une surface de révolution dont on ne possède qu'un fragment. Ass. Franç. (Toulouse). 123-126.

DE SALVERT. Mémoire sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans les problèmes de Mécanique et les lignes géodésiques des surfaces isothermes. Brux. S. sc. XI. B. 1-138; Paris. Gauthier-Villars.

P. MANSION. Rapport.[1] Brux. S. sc. XI. A. 46-62.

Die beiden ersten Teile dieser Abhandlung sind im vorangehenden Bande derselben Annalen S. 293-408 erschienen. Folgendes ist eine summarische Uebersicht über das Ganze: I. Sind $\varphi(x, y, z) = \varphi$, $\psi(x, y, z) = \psi$ die Gleichungen zweier Systeme von Oberflächen, welche eine dritte Oberfläche $F(x, y, z) = 0$ nach Curven schneiden, die zu einander senkrecht sind, so bestimmen diese drei Oberflächen die Lage eines beweglichen Punktes, welcher längs den Normalen zu den drei Flächen die Beschleunigungen U, V, W, die Geschwindigkeiten u, v, w habe. Man setze:

$$H\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]=1,$$

$$K\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]=1,$$

$$P=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\psi} & \frac{\partial y}{\partial\psi} & \frac{\partial z}{\partial\psi} \end{vmatrix}, \quad S=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\psi} & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\psi} & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\partial\psi} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\psi} & \frac{\partial y}{\partial\psi} & \frac{\partial z}{\partial\psi} \end{vmatrix},$$

Q gleich einem Ausdruck wie P, in welchem φ und ψ vertauscht sind. Dann ist

$$U\sqrt{H} = H\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{\partial H}{\partial\psi}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} -\tfrac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial\varphi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

$$W\sqrt{HK} = P\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+Q\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+2S\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}.$$

Aus der letzten Formel leitet man leicht die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche ab.

II. Die als constant vorausgesetzte Kräftefunction sei

$$F(\varphi, \psi), \quad H_1 = H(F+C), \quad K_1 = K(F+C);$$

dann ist

$$u^2 d(v^2) - v^2 d(u^2) = (u^2+v^2)\left[u^2 \frac{\partial \log H_1}{\partial \psi} d\psi - v^2 \frac{\partial \log K_1}{\partial \varphi} d\varphi\right].$$

Falls man dazu gelangt, diese Gleichung zu integriren, d. h. eine Beziehung zwischen φ und ψ zu finden, so kann die Gleichung der lebendigen Kraft zur Bestimmung der krummlinigen Coordinaten als Function von t dienen. Der Verf. macht verschiedene Fälle bekannt, in denen die Integrationen auf Quadraturen führen; danach giebt er vier Anwendungen: 1) Bewegung eines Punktes auf einem Ellipsoide unter der Einwirkung einer vom Centrum ausgehenden und der Entfernung proportionalen Anziehungskraft. 2) Aehnliche Aufgabe für den Kegel, wenn auf den Punkt zwei Kräfte einwirken, die eine umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der Spitze, die andere umgekehrt proportional dem Würfel der Entfernung von der Axe und senkrecht zur Axe gerichtet. 3) Problem von C. Neumann, J. für Math. LVI. 46-63. 4) Bewegung eines schweren Massenpunktes auf einem Paraboloide mit verticaler Axe.

III. Untersuchung der geodätischen Linien. Der Verf. findet ihre Differentialgleichung durch die Annahme $F(\varphi, \psi) =$ const.; er behandelt die folgenden besonderen Fälle: 1) Ebene. 2) Umdrehungs-Cylinder. 3) Cylinder. 4) Umdrehungs-Kegel. 5) Umdrehungs-Oberflächen. 6) Kegel. 7) Oberflächen zweiter Ordnung. 8) Oberflächen, die ein dreifach isothermes orthogonales System bilden.

Drei Noten vervollständigen die Abhandlung. 1) Der Verfasser giebt an, wie er die Fälle gefunden hat, in denen die Aufgabe des zweiten Teiles auf Quadraturen zurückkommt. 2) Berührungspunkte seiner Lösung der Bewegung auf dem Ellipsoide mit denen von Jacobi und Schellbach. 3) Bestimmung des Krümmungsradius für die Bahn eines beweglichen Punktes, der gezwungen wird, auf einer Oberfläche zu bleiben.

Mn. (Lp.)

L. BIANCHI. Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante. Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 221-256.

Ausdehnung auf die in Räumen von constanter Krümmung liegenden Flächensysteme einiger in Batt. G. XXI. 275-292, XXII. 333-374; Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 163-166, 243-246, II. 19-22; Brioschi Ann. (2) XIII. 177-234 (Bericht in F. d. M. XV. 1883. 668, XVI. 1884. 673, XVII. 1885. 729, XVIII. 1886. 726) erhaltenen Resultate. Nachdem der Verfasser die Existenz orthogonaler Tripel nachgewiesen, den Ausdruck des Linienelementes eines Raumes von constanter Krümmung für den Fall aufgestellt, wo ein Flächensystem des Beziehungstripels aus parallelen Flächen besteht, und einen bekannten Weingarten'schen Satz auf gleichförmig gekrümmte Räume ausgedehnt hat, kommt er auf den Hauptgegenstand seiner Arbeit, die Untersuchung der Weingarten'schen Tripel, das ist derjenigen Tripel, welche ein Flächensystem enthalten, dessen Elemente eine und dieselbe constante absolute Krümmung $k=+1$ oder $k=-1$ haben. Ist K die Krümmung des Raumes, und bezeichnet man als „relative Krümmung" des Flächensystemes die Differenz $k-K$, so gelangt man zu wesentlich verschiedenen Resultaten, jenachdem die relative und die absolute Krümmung gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wir bezeichnen immer durch $\frac{1}{R^2}$ den absoluten Wert von $k-K$, durch $w=$ const. das Flächensystem von constanter Krümmung.

Sei erstens $k(k-K)>0$. Dann ist das Linienelement durch:

$$\text{(a)}\qquad ds^2=\cos^2\theta\,du^2+\sin^2\theta\,dv^2+R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2$$

oder durch:

$$\text{(b)}\qquad ds^2=\text{csh}^2\theta\,du^2+\text{sh}^2\theta\,dv^2+R^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2dw^2$$

gegeben, jenachdem $k=\mp1$ ist. Die Gleichungen, welche θ definiren, stimmen mit denjenigen, die für den euklidischen Raum gelten (F. d. M. XVII. 1885. 730, Gl. (4) und (5)), vollkommen überein. Hieraus ergiebt sich, dass jedem im euklidischen

Raume liegenden Weingarten'schen Tripel, für welches das Linienelement die Form:

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

oder:

$$ds^2 = \operatorname{csh}^2\theta\, du^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

hat, ein in einem gleichförmig gekrümmten Raume liegendes Weingarten'sches Tripel entspricht, für welches das Linienelement die Form (a) bezw. (b) annimmt. Man kann sogar beweisen, dass jedem Ribaucour'schen Tripel ein Ribaucour'sches Tripel, jedem Weingarten'schen Tripel von constanter Flexion ein ebensolches Tripel entspricht.

Ist zweitens $k(k-K) < 0$, so nimmt ds^2 für $k = -1$ die Form (b), für $k = +1$ die Form (a) an; θ wird durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \operatorname{sh}\theta \operatorname{csh}\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right) - \operatorname{csh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} + \frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u\partial v\partial w} - \frac{\operatorname{sh}\theta}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w} - \frac{\operatorname{csh}\theta}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} = 0,$$

bezw.:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right) = -\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial w} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial w}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w},$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u\partial v\partial w} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}$$

gegeben.

Wenn $k = -1$, $k-K < 0$, also $k(k-K) > 0$ ist, so kann man durch wiederholte Ausübung der complementaren Transformation (F. d. M. XVII. 1885. 732) auf eine pseudosphärische Fläche ein Flächensystem erhalten, welches einem cyklischen Tripel angehört. Ist dagegen $k-K > 0$, also $k(k-K) < 0$, so

ist die complementare Transformation nicht mehr anwendbar; man kann dennoch durch aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen entnommene Betrachtungen beweisen, dass auch in diesem Falle cyklische Tripel existiren. Die Orthogonalkreise sind aber Kreise mit ideellem Mittelpunkte (Linien gleichen Abstandes).

Betrachtet man nun solche Tripel, welche ein System von pseudosphärischen Flächen mit von Element zu Element veränderlicher Krümmung enthalten, und beschränkt man sich auf ein Gebiet, innerhalb dessen $k-K$ sein Vorzeichen nicht ändert, so findet man, wenn $k=-\frac{1}{R^2}$ ist:

Für $k-K<0$ (also für $k(k-K)>0$):

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \frac{1}{\frac{1}{R^2}+K}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

wo θ durch dieselben Gleichungen bestimmt wird, die für den ebenen Raum gelten (F. d. M. XVIII. 1886. 727);

für $k-K>0$ (also für $k(k-K)<0$):

$$ds^2 = \operatorname{csh}^2\theta\, du^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2 + \frac{1}{-\frac{1}{R^2}-K}\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2,$$

wo θ die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=\frac{\operatorname{sh}\theta\operatorname{csh}\theta}{R^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\operatorname{csh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)+\frac{1}{\operatorname{sh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{R}\right),$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w}=\operatorname{tgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}+\operatorname{ctgh}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}$$

befriedigen muss.

Fasst man irgend eines der Gleichungssysteme, welchen θ in den verschiedenen Fällen genügt, ins Auge, und setzt:

$$\text{(c)}\qquad \theta=\psi_0+\psi_1 w+\frac{\psi_2}{2!}w^2+\cdots+\frac{\psi_n}{n!}w^n+\cdots,$$

wo die ψ_n analytische Functionen von u, v sind, so zeigt

Verfasser, wie man diese Functionen successiv berechnen kann; er beweist ferner, dass, wenn eine pseudosphärische Fläche Σ_0 und eine orthogonale Trajectorie C_0 willkürlich vorgegeben sind und C_0 eine analytische Curve ist, die Functionen ψ_n eindeutig bestimmt sind, folglich höchstens ein einziges Weingarten'sches Tripel existirt, von dessen pseudosphärischem Flächensysteme Σ_0 ein Element und C_0 eine orthogonale Trajectorie ist. Zur strengen, analytischen Begründung des Satzes A (F. d. M. XVII. 1885. 731) bliebe es nur noch übrig, die Existenz des Tripels, oder, was dasselbe ist, die Convergenz der Reihe (c) nachzuweisen.

Vi.

ADAM. Thèse d'Analyse. Sur les systèmes triples orthogonaux. Paris. 80 S. 4°.

DEMARTRES. Mémoire sur les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 145-158.

DEMARTRES. Sur les surfaces qui ont pour lignes isothermes une famille de cercles. C. R. CIV. 217-220.

Um die Flächen zu finden, welche eine Familie von Kreisen als Isothermen haben, betrachtet der Herr Verfasser die von einem mit dem Parameter l veränderlichen Kreise beschriebenen Flächen und ermittelt die Bedingung, unter welchen das Quadrat des Linienelementes in die Form $t(du^2+dv^2)$ gebracht werden kann.

Er gelangt nach einer kurzen Analyse zu folgendem Resultat: Die gesuchten Flächen sind diejenigen anallagmatischen Flächen, deren Deferente eine Regelfläche ist, welche die Director-Kugel in einer asymptotischen Linie schneidet.

Die erste in der Ueberschrift genannte Abhandlung behandelt das Problem ausführlicher, die zweite in kürzerem Auszuge.

A.

A. Offenhauer. Ueber eine bestimmte Art von Flächenverbiegung. Diss. Halle. 46 S. 8°.

J. Weingarten. Eine neue Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. Gött. N. 28-31.

Es ist bis jetzt nur für eine Ebene und für zwei specielle Klassen von Rotationsflächen die Gesamtheit aller darauf abwickelbaren Flächen vollständig dargestellt. Der Herr Verfasser hat eine neue Klasse auf einander abwickelbarer Flächen gefunden, zu deren Individuen keine Rotationsflächen gehören. Es sind dies diejenigen Flächen, bei denen das Quadrat des Linienelementes sich in die Form bringen lässt

$$(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})(d\alpha^2+d\beta^2).$$

Ihre geodätischen Linien sind, wie aus einem Liouville'schen Satze gefolgert werden kann, durch Quadraturen bestimmbar.

Diese Flächen werden durch gewisse Relationen aus der Klasse der Minimalflächen hergeleitet, in der Art, dass jeder speciellen Minimalfläche eine specielle Fläche der auf einander abwickelbaren entspricht, und umgekehrt. A.

E. Combescure. Sur l'application des surfaces. C. R. CV. 434-435.

Der Herr Verfasser zeigt an, dass es ihm gelungen ist, das Problem der Abwickelung der Flächen, welches allgemein die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung erfordert, die zu einer Klasse von Gleichungen gehört, wie sie von Monge, Ampère und anderen behandelt sind, durch eine besondere Wahl der Parameter auf eine Gleichung einfacherer Form zurückzuführen, bei welcher nämlich die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nur in linearer Form auftreten. Er ist zu dieser Vereinfachung durch Benutzung gewisser Gleichungen gekommen, welche bei Betrachtung von Rotationen benutzt werden können. Im Anschluss daran lässt sich das gewissermassen umgekehrte

Problem behandeln, nämlich alle diejenigen auf einander abwickelbaren Flächen zu bestimmen, welche einem gegebenen System von Rotationen entsprechen. Dieses Problem führt auf eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. A.

E. Amigues. Sur les surfaces applicables. C. R. CIV. 564-566.

Der Herr Verfasser nennt zwei geradlinige Flächen geradlinig auf einander abwickelbar, wenn die eine sich so auf die andere biegen lässt, dass die geradlinigen Erzeugenden der einen Fläche denen der anderen entsprechen. Das Problem dieser „geradlinigen Biegung“ ist analytisch von einer willkürlichen Function abhängig.

Um diese willkürliche Function zu bestimmen, stellt der Herr Verfasser das speciellere Problem, eine geradlinige Fläche geradlinig so zu biegen, dass die Strictionslinie eine ebene Curve werde. Er behauptet, dass dies Problem durch eine Quadratur gelöst werden könne, und dass es nur eine Lösung zulasse, abgesehen von der Lage der gefundenen Fläche.

Referent hat die erstere Behauptung, welche ohne Beweis mitgeteilt ist, nicht bestätigt gefunden, ist vielmehr auf eine Differentialgleichung geführt, welche zwar von sehr einfacher Form ist, aber im allgemeinen nicht auf Quadraturen zu führen scheint.

Das vom Herrn Verfasser gegebene Beispiel ist insofern nicht entscheidend, als er als gegebene Fläche ein geradliniges Rotationshyperboloid wählt, welches schon eine ebene Strictionslinie besitzt. In diesem Falle gelingt zwar die Integration, aber die gefundene Fläche ist, abgesehen von der Lage, mit der gegebenen identisch. Es ist also gar keine Biegung, sondern nur eine Aenderung der Lage der ganzen Fläche vollzogen.

A.

H. Molins. Sur les surfaces gauches dont la ligne de striction est plane et qui sont coupées partout sous le même angle par le plan de cette ligne. Toulouse Mém. (8) IX. 516-547.

Die Aufgabe ist, wie der Titel besagt, die Aufsuchung der geradlinigen Flächen, welche eine ebene Strictionslinie besitzen, und welche die Ebene dieser letzteren unter constantem Winkel schneiden. Diese Aufgabe führt auf eine Differentialgleichung, welche sich integriren lässt. Die Strictionslinie selbst kann eine beliebig gegebene ebene Curve sein, sie ist nach dem bekannten Satz von Joachimsthal zugleich eine Krümmungslinie der Fläche, so dass die Normalen der Fläche längs der Strictionslinie eine abwickelbare Fläche bilden. Steht die Fläche überall senkrecht auf der Ebene der Strictionslinie, so ist diese zugleich Kürzeste der Fläche.

Bemerkenswert ist, dass für jede Wahl des constanten Winkels der Directorkegel, d. h. der Kegel, dessen Seiten der Erzeugenden parallel sind, immer dieselbe Gestalt hat, wie auch die Gestalt der Strictionslinie sei, und zwar tritt derselbe Kegel, wenn man seinen Scheitelpunkt festhält, nur in zwei verschiedenen Lagen auf, von welchen die eine aus der andern hervorgeht, wenn der Kegel um die normal zur Ebene der Strictionslinie durch den Scheitel gelegte Gerade eine Drehung um 180° macht. Schneidet die Fläche die Ebene der Strictionslinie rechtwinklig, so ist sie algebraisch, wenn die Strictionslinie algebraisch ist. Die Angabe des Herrn Verfassers, dass unter den algebraischen Flächen das einschalige Rotationshyperboloid die einzige sei, bei welcher die Strictionslinie zugleich Kürzeste ist, ist nicht richtig, vielmehr kann jede algebraische Curve als Strictionslinie auftreten.

Die Methode, welche der Herr Verfasser gewählt hat, ist etwas umständlich. Die Betrachtung wird wesentlich vereinfacht, wenn man zunächst nur die Winkel in Betracht zieht, also die dimensionslosen Grössen, und erst nachher die Dimensionen des Bogens der Strictionslinie berücksichtigt. A.

Astor. Lignes géodésiques des surfaces réglées dont les génératrices coupent la ligne de striction sous un angle constant, et dont le paramètre de distribution est constant. Ass. Franç. (Toulouse). 1-12.

G. Pirondini. Sulle superficie rigate. Batt. G. XXV. 25-41, 115-154.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der früheren Abhandlungen über infinitesimale Geometrie, welche der Verf. im Giornale di Matematiche veröffentlicht hat; besonders hängt sie mit den „Studii geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe“ (Batt. G. XXIII, F. d. M. XVII. 1885. 741) eng zusammen, deren Ergebnisse hier benutzt und verallgemeinert werden. Die Methoden der Untersuchung und der Darstellung sind in der neuen Arbeit dieselben wie in den älteren: Jene erhalten ihr Gepräge durch die stetige Deutung der Gleichungen, welche in der Absicht geschieht, zu Constructionen der Gebilde zu gelangen, auf die man stösst; diese durch eine sehr grosse Menge von Lehrsätzen, welche auf einander folgen, und welche der Verf. gehäuft zu haben scheint, ohne ihre Bedeutung im voraus erkannt zu haben. Dies macht es uns unmöglich, über die neue Arbeit des Hrn. Pirondini eine Uebersicht zu geben. Um jedoch dem Leser eine Vorstellung von dem Inhalte zu verschaffen, wollen wir in gedrängter Form die Aufgaben hersetzen, welche darin behandelt sind. Freilich ist dies nicht die beste Art der Berichterstattung; sollte jedoch ein Leser, der von unserem Artikel nicht befriedigt ist, zur näheren Einsicht auf die Abhandlung selbst zurückgreifen, so dürfte er nach unserer Meinung finden, dass die Unzulänglichkeit unseres Berichtes nicht so ganz dem Ungeschick des Berichterstatters zuzuschreiben ist, und wird vielleicht den Wunsch aussprechen, dass der Verf. das Eindringen in seine künftigen Arbeiten durch eine bessere Abfassung weniger mühsam machen möchte.

Folgendes ist das Verzeichnis der hauptsächlichsten, von Hrn. Pirondini behandelten Aufgaben.

I. Construction von Regelflächen, welche gegebene Bedingungen erfüllen.

Construction einer Regelfläche, welche längs ihrer Strictionslinie eine gegebene Regelfläche berührt. Construction einer Regelfläche, wenn man die Abwickelbare ihrer Berührungsebenen im Unendlichen kennt. Construction der rectificirenden Abwickelbaren einer gegebenen Curve. Construction der Abwickelbaren der Berührungsebenen einer Raumcurve in den Punkten ihrer Strictionslinie.

II. Construction von Regelflächen mit gewissen Eigenschaften.

Regelfläche, bei welcher die Strictionslinie eine sphärische Curve ist, welche mit ihren Parallelen ein System von Krümmungslinien der Oberfläche bildet; besonderer Fall, in welchem die Oberfläche eine Leitebene hat. Oberflächen, welche man erhält, indem man an den Hauptnormalen einer Raumcurve eine Drehung von gegebenem Winkel um die entsprechenden Punkte und in den entsprechenden Normalebenen vollzieht. Regelflächen, welche als asymptotische Linie eine die Erzeugenden unter einem constanten Winkel schneidende Curve besitzen, und als geodätische Linie eine andere ähnliche Trajectorie. Regelflächen, deren Leitkegel ein Umdrehungskegel ist und deren Berührungsebenen in den Punkten der Strictionslinie die Oberfläche unter einem constanten Winkel schneiden. Regelflächen mit einer gegebenen Strictionslinie, welche auf der Oberfläche eine geodätische Krümmung hat, die als eine bekannte Function des Bogens ausgedrückt wird.

III. Besondere Umgestaltungen der Regelflächen und Umgestaltungen besonderer Regelflächen.

Ueberführung einer Regelfläche in eine andere unter der Bedingung, dass die Strictionslinie der ersteren eine geodätische oder eine asymptotische Linie der transformirten werde, oder auch dass eine beliebige Linie (welche weder eine Erzeugende, noch eine senkrechte Trajectorie der Erzeugenden sein darf) der ersteren eine Krümmungslinie der letzteren werde. Bedingungen, denen eine Regelfläche genügen muss, damit es möglich ist, sie

in eine andere, eine Kugel längs ihrer Strictionslinie berührende zu transformiren; oder in eine solche, welche als Strictionslinie eine Krümmungslinie hat, welche auf einer zur Oberfläche senkrechten Kugel gezogen ist, u. s. w.

IV. Bestimmung von Curven mit gegebenen Eigenschaften.

Notwendige Bedingungen, damit man durch eine Drehung der Hauptnormalen einer Raumcurve von einem und demselben Winkelbetrage um ihre Punkte und in ihren Normalebenen zu einer aus den Binormalen einer anderen Curve gebildeten Regelfläche gelange. Bestimmung solcher Raumcurven, bei denen man durch Vollziehung einer Schraubenbewegung an einer von ihnen eine Oberfläche erhält, deren verschiedene Lagen der Erzeugenden asymptotische Linien sind; oder bei denen eine Schraubenbewegung um zwei Raumcurven zwei Oberflächen erzeugt, deren verschiedene Lagen der Erzeugenden geodätische Linien sind.

La. (Lp.)

G. Pirondini. Sulla similitudine delle curve. Annali di Mat. (2) XV. 53-66.

Aus den bekannten Bedingungen, welche zur Aehnlichkeit zweier räumlichen Vielecke notwendig sind, folgert der Verf. leicht die Bedingungen für die Aehnlichkeit zweier Raumcurven L, L_1; diese Bedingungen bestehen darin, dass die Punkte der beiden Curven sich in der Weise eindeutig entsprechen, dass die Bogenelemente ds, ds_1, die Radien ϱ, ϱ_1 der ersten Krümmung, die Radien r, r_1 der zweiten bei beiden Curven in den entsprechenden Punkten proportional sind, wobei also die drei Verhältnisse der Proportionen unter einander gleich sind. Dies ist übrigens fast selbstverständlich; denn beim Uebergange von einer Curve zu einer ähnlichen braucht man ja nur eine Aenderung im Masse der linearen Einheit vorzunehmen. Sind $\varrho = \varphi(s)$, $r = \psi(s)$ die charakteristischen Gleichungen von L, so sind $\varrho_1 = \frac{1}{k}\cdot\varphi(ks_1)$, $r_1 = \frac{1}{k}\cdot\psi(ks_1)$ die von L_1, und k ist das Aehnlichkeitsverhältnis von L zu L_1.

Insbesondere: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ebene Curve L_1 der ebenen Curve L mit der charakteristischen Gleichung $\varrho = \varphi(s)$ ähnlich sei, ist die, dass L_1 die analoge Gleichung $\varrho_1 = \frac{1}{k}\varphi(ks_1)$ habe; dabei ist k das Aehnlichkeitsverhältnis von L zu L_1. Es sei L_1 die Hüllcurve (sviluppoide) der durch die verschiedenen Punkte von L unter einem constanten Winkel i gegen seine Tangenten gezogenen Geraden; die Bedingung der Aehnlichkeit von L mit L_1 besteht dann darin, dass die Function φ identisch die Gleichung befriedigt:

$$\varphi[k(s\cos i + \varphi(s)\sin i - m)] = k\left[\cos i + \frac{d\varphi(s)}{ds}\sin i\right]\varphi(s),$$

wo m eine willkürliche Constante ist. Der Verf. wendet diesen Satz auf den Fall $\varphi(s) = \sqrt{a+2bs+cs^2}$ an. Wenn die Beziehung zwischen der Curve L und ihrer Hüllgeradencurve derartig ist, dass jedem Punkte P von L der Berührungspunkt von L_1 mit ihrer durch P gehenden Tangente entspricht, so ist die Aehnlichkeit nur möglich, wenn L eine logarithmische Spirale ist. — Man bestimme nun die Hüllgeradencurve L_2 von L_1, welche dem Winkel i' zugehört; es ist leicht, die Bedingungen der Aehnlichkeit von L mit L_2 hinzuschreiben. Nimmt man $i' = \pi - i$, so findet Hr. Pirondini, dass L mit L_2 nur dann ähnlich ist, wenn L die charakteristische Gleichung $\varrho = \sqrt{a+2bs+cs^2}$ hat (vgl. oben).

In den Raum zurückkehrend, merkt der Verfasser an, dass die Bedingungen für die Aehnlichkeit zweier Raumcurven in manchen Fällen sich einfacher und zweckmässiger als im allgemeinen fassen lassen. Es handle sich z. B. um zwei auf zwei Kugeln mit den Radien R, R_1 gezogenen Curven L, L_1; s und s_1 mögen die Bogen, ϱ_g und ϱ_{1g} die geodätischen Krümmungsradien beider Curven sein. Ist $\varrho_g = \varphi(s)$ die Gleichung, welche die Curve L auf der ersten Kugel bestimmt, so ist die Gleichung von L_1, wenn sie L ähnlich ist, $\varrho_{1g} = \frac{R_1}{R}\varphi\left[\frac{R}{R_1}s_1\right]$ und R/R_1 ist das Aehnlichkeitsverhältnis von L zu L_1. Nehmen wir dagegen an, dass die beiden Curven Schraubenlinien sind, so be-

stehen ihre Bedingungen der Aehnlichkeit darin, dass sie auf Cylindern gezeichnet sind, deren senkrechte Querschnitte ähnliche Curven sind, und dass sie zu den entsprechenden Erzeugenden ihrer bezüglichen Cylinder dieselbe Neigung besitzen. Das Aehnlichkeitsverhältnis der beiden Schraubenlinien ist dann demjenigen der senkrechten Querschnitte ihrer Cylinder gleich. Durch Anwendung dieses Satzes findet der Verf., dass die einzige Schraubenlinie, welche der Strictionslinie der durch ihre Hauptnormalen gebildeten Oberfläche ähnlich ist, die cylindro-konische ist, bei welcher die logarithmische Spirale, der senkrechte Querschnitt des correspondirenden Cylinders, gegen die Fahrstrahlen eine Neigung von $\frac{1}{4}\pi$ besitzt.

Der Verf. schliesst seine Arbeit mit der Untersuchung der charakteristischen Gleichungen der sphärischen Linien, welche geodätische von Kegeln sind. Haben s, r, p die obigen Bedeutungen, und sind a, b, m, n Constanten, so sind diese Gleichungen:

$$\frac{\varrho}{r} = as+b, \quad \varrho = \sqrt{n+2bms+(am-b^2)s^2-abs^3-\tfrac{1}{4}a^2s^4}.$$

La. (Lp.)

W. Hosenfeldt. Zur Theorie der abwickelbaren Flächen. Diss. Rostock. 71 S. 8°.

E. Amigues. Théorèmes sur les surfaces gauches. C. R. CIV. 1092-1094.

Js.

G. Humbert. Sur quelques propriétés des surfaces coniques. C. R. CV. 739-741.

Eine geschlossene konische Fläche schneide eine Kugelfläche vom Radius R in zwei getrennten geschlossenen Curven. Es werden die Grundzüge einer Theorie der sphärischen Zone zwischen beiden Curven entwickelt. „Orientationsebene“ des Kegels heisst die Ebene $\lambda x+\mu y+\nu z = 0$, deren Coefficienten

$$\lambda = \int \frac{zdy - ydz}{x^2+y^2+z^2}, \quad \mu = \int \frac{xdz - zdx}{x^2+y^2+z^2}, \quad \nu = \int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2+z^2}$$

sind; die Spitze ist Anfang der x, y, z, die Integrale erstrecken sich über den ganzen reellen Umfang des Kegels; „Orientationsaxe" heisst die Normale zu jener Ebene im Anfang, „Orientationsmodul" die Grösse $\varrho = \sqrt{(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}$. Bezeichnet d den Abstand des Kugelmittelpunkts von der Orientationsebene, so ist die Zone $= 2\varrho Rd$. Der Ort der Kugelmittelpunkte für gegebenen Kegel und gegebenen Wert der Zone ist ein System zweier, der Orientationsebene in gleichem Abstande parallelen Ebenen. Der Wert der Zone bleibt constant, wenn der Kegel um seine Orientationsaxe rotirt. Die Orientationsaxe eines Kegels zweiten Grades ist dessen innere Hauptaxe. Der Modul hat hier den Wert $2\pi \sin\alpha \sin\beta$, wo α und β die Winkel zwischen dieser Hauptaxe und den zwei Erzeugenden, die in Hauptebenen fallen, bezeichnen. Eine analoge Theorie bieten die abwickelbaren Flächen, welche eine sphärische Zone begrenzen. Der Wert der Zone hat denselben Ausdruck. Die algebraische Summe der sphärischen Flächenstücke zwischen einer beliebigen Fläche und ihrer asymptotischen Fläche (mit Vorbehalt gewisser Bedingungen der Realität) ist Null. Die von einem einschaligen Hyperboloid begrenzte sphärische Zone hat gleichfalls den Ausdruck $2\varrho Rd$, wo sich R und d auf die asymptotische Fläche beziehen.

H.

L. Lindelöff. Observations relatives à une note récente de M. P. Serret, sur un théorème de géométrie. Lettre à M. le Secrétaire perpetuel. C. R. CIV. 43.

Es wird auf einen kleinen Irrtum in der Note des Herrn Serret (Ref. F. d. M. XVIII: 1886. 725) hingewiesen. A.

Pellet. Sur les sphères tangentes à deux surfaces. Ass. Franç. (Toulouse). 116-118.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

Fr. Machovec. Wie viel einfache Bedingungen repräsentirt die Angabe einer r-fachen Geraden einer Fläche n^{ter} Ordnung? Casop. XVI. 230.

Indem der Verfasser die Glieder, welche in einer allgemeinen Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung fehlen müssen, damit diese Fläche eine der Coordinatenaxen zu ihrer r-fachen Geraden habe, abzählt, erhält er für jene Zahl den Ausdruck

$$\tfrac{1}{6}r(r+1)(3n-2r+5).$$ Std.

A. R. Johnson. Symmetric products in relation to curves and surfaces. Quart. J. XXII. 325-369.

Da symmetrische Functionen der Wurzeln algebraischer Gleichungen sich rational in deren Coefficienten darstellen, so gilt ein Gleiches von den symmetrischen Functionen der Coordinaten der Schnittpunkte algebraischer Curven und Flächen, ebenso von den Berührungspunkten der Tangenten, den Fusspunkten der Normalen, den Punkten, wo die Coordinaten Null und wo sie unendlich werden. Dies kommt hier für den Fall in Ausführung, wo die symmetrische Function ein blosses Product ist.

H.

M. d'Ocagne. Sur une propriété de la sphère et son extension aux surfaces quelconques. Lond. M. S. Proc. XVIII. 361-363.

Der bezügliche Satz über die Kugel ist folgender. Sind die Abstände einer Anzahl ($m>3$) fester Punkte von einer beweglichen Ebene durch eine lineare Relation verbunden, so wird die Ebene von einer Kugel umhüllt. Deren Mittelpunkt ist dann der Schwerpunkt der mit den Coefficienten der Relation belasteten Punkte. Umgekehrt existirt diese Relation, wenn die

Ebene eine Kugel berührt. Hieraus wird nun der weitere Satz abgeleitet: Sind die Abstände der m Punkte von einer beweglichen Ebene durch eine beliebige Relation $F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)=0$ verbunden, so wird die Ebene von einer Fläche eingehüllt, deren momentaner Berührungspunkt der Schwerpunkt der mit

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_1}, \frac{\partial F}{\partial \delta_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \delta_m}$$

belasteten Projectionen auf die Ebene ist. Ein ähnlicher Satz ist von Tschirnhausen. H.

A. Cantone. Teorema sulle curve gobbe. Batt. G. XXV. 303-304.

Der Satz lautet: Projicirt man eine Raumcurve n^{ter} Ordnung aus einem beliebigen Punkte auf eine beliebige Gerade a, welche die Curve nicht schneidet, und sucht die polare Ebene zu a in Bezug auf den so erzeugten Kegel n^{ter} Ordnung, so geht diese Ebene constant durch eine Gerade. H.

L. Lecornu. Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. Acta Math. X. 201-280.

E. Goursat. Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 159-200, 241-312, 316-340.

Diese beiden Arbeiten, von welchen die erste (in etwas veränderter Form) von der Pariser Akademie der Wissenschaften mit einer ehrenvollen Erwähnung, die zweite mit dem „grand prix“ ausgezeichnet wurde, gewinnen der Theorie der regelmässigen Polyeder, welche in neuerer Zeit verschiedentlich in den Vordergrund des Interesses gerückt worden ist, eine neue interessante Seite ab, indem sie dieselbe zur allgemeinen Theorie der Oberflächen in Beziehung setzen. Da der von Lecornu behandelte Gegenstand auch einen Teil der Goursat'schen Arbeit

ausfüllt, so ist eine gemeinsame Besprechung am Platze, bei welcher die Lecornu'sche Arbeit vorangehen mag.

Sollen diejenigen Oberflächen bestimmt werden, deren Symmetrieebenen mit denjenigen der regelmässigen Körper übereinstimmen, so kann man zunächst, unabhängig von der Zahl und Anordnung dieser Ebenen, nach der Form der Gleichung fragen, welcher eine derartige Oberfläche entsprechen wird. Diese allgemeine Untersuchung bildet den ersten Teil von Hrn. Lecornu's Arbeit. Die Leichtigkeit, mit der ein regelmässiger Körper auf das rechtwinklige Coordinatensystem bezogen werden kann, macht dasselbe zu einem natürlichen Hülfsmittel der Untersuchung und gestattet ohne erhebliche Complication der Gleichungen ein ungewöhnlich tiefes Eindringen in die Theorie der hier behandelten Flächen; tetraedrische Coordinaten werden nur gelegentlich verwendet Von fundamentaler Bedeutung ist zunächst der Satz, dass, wenn drei algebraische Flächen: $L=$ const., $M=$ const., $N=$ const. gerade soviel gemeinsame Punkte haben, als zur Herstellung der Symmetrie erforderlich ist, jede einzelne symmetrische algebraische Fläche als ganze Function von L, M, N dargestellt werden kann. Es kommt nun darauf an, drei solche Functionen L, M, N (symmetrische Elemente) in möglichst einfacher Weise zu bestimmen. Der Verfasser setzt $L=x^2+y^2+z^2$, und für M und N das Product der Abstände eines beliebigen Punktes von den Ebenen eines auf die beiden einfachsten Arten zu wählenden symmetrischen Systems. Sind m und n die Grade der Functionen M und N, so ist alsdann die Zahl der Symmetrieebenen des zu Grunde gelegten regelmässigen Körpers gleich $m+n-1$. Die symmetrischen Flächen werden elementar genannt, wenn ihre Gleichung nur das Element M, binär, wenn sie die Elemente L und M enthält. Von diesen Flächen werden verschiedene allgemeine Eigenschaften bewiesen, namentlich werden Schnitte einer Elementarfläche mit einer Central-Kugel (sphärosymmetrische Curven) genauer untersucht; unter den binären Flächen werden einige besonders einfache specielle Arten näher betrachtet. — Während nun die bisherigen Resultate von der Anzahl und Lage der symmetrischen Ebenen unabhängig

waren, werden jetzt drei Typen solcher Systeme und der ihnen entsprechenden Oberflächen aufgestellt und einzeln behandelt. Der erste Typus geht aus dem Tetraeder hervor, der zweite gleichmässig aus Oktaeder und Hexaeder, der dritte ebenso aus Ikosaeder und Dodekaeder. — Der tetraedrische Typus ist charakterisirt durch 6 Symmetrieebenen (Ebenen durch Kanten und Mittelpunkt des Tetraeders). Coordinatenaxen sind die Verbindungslinien der Kantenmitten. Es wird gesetzt

$$M = xyz, \quad N = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z).$$

Die allgemeine Gleichung der hierher gehörigen Symmetrieflächen lautet in der bemerkenswertesten Form:

$$\varphi(x^2+y^2+z^2,\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,\ xyz)=0.$$

Als specielles Beispiel wird die kubische Fläche

$$xyz + \mathrm{A}(x^2+y^2+z^2)+\mathrm{B}=0$$

betrachtet, welche sich als Ort der Punkte erweist, für welche die Summe der Kuben ihrer Abstände von den Flächen eines Tetraeders constant ist. Bei dieser und anderen noch mehr specialisirten Formen der Gleichung bieten sich zahlreiche Berührungspunkte mit den Untersuchungen anderer Geometer. — Beim kubo-oktaedrischen Typus finden sich neun Symmetrieebenen (die sechs Diagonalebenen des Würfels und die drei den Seitenflächen parallelen Centralschnitte, welche letztere als Coordinatenebenen dienen). Hier liefert jede Gleichung von der Form $\varphi(x^2, y^2, z^2)=0$ eine symmetrische Fläche. Nach Analogie mit dem vorhergehenden Falle wird aber

$$M = x^2y^2z^2, \quad N = x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

gesetzt, woraus in Verbindung mit $\varphi(L, M, N)=0$ die Gleichung der biquadratischen Symmetriefläche folgt. Dieselbe wird wieder eingehend untersucht, u. a. ihre Beziehung zu der aus der Substitution $x^2=X$, $y^2=Y$, $z^2=Z$ sich ergebenden quadratischen Rotationsfläche festgestellt, und die Lage ihrer Knotenpunkte und ihrer (den Kanten des Kubo-oktaeders entsprechenden) 24 reellen Geraden ermittelt. Specielle Formen dieser Fläche sind die „pseudosphärische“ Fläche $x^4+y^4+z^4=1$ und die Fläche

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{a^2}$, welche den Ort des Schwerpunkts eines Dreiecks darstellt, in dessen Ecken die Tangentenebene einer Kugel von den Verlängerungen dreier auf einander senkrechten Durchmesser geschnitten wird. — Der ikosi-dodekaedrische Typus besitzt 15 Symmetrieebenen, welche durch je zwei parallele Kanten des Dodekaeders gehen. Hier ist ($\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=\lambda$ gesetzt):

$$M=(z^2-\lambda^2y^2)(x^2-\lambda^2z^2)(y^2-\lambda^2x^2),$$
$$N=(y^2-\lambda^4z^2)(z^2-\lambda^4x^2)(x^2-\lambda^4y^2)$$
$$\times(x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2).$$

Im übrigen wird die Untersuchung der Symmetriefläche, die den sechsten Grad besitzt, analog wie oben ausgeführt.

Die Goursat'sche Arbeit zerfällt in drei Abteilungen. Die erste derselben deckt sich im wesentlichen mit der Arbeit Lecornu's. Sie kommt zu denselben Hauptresultaten wie jene und weicht nur in der Wahl der specieller behandelten Probleme von ihr ab. Neben den Symmetrieebenen der regelmässigen Körper zieht Hr. Goursat auch die der regelmässigen Pyramide und Doppelpyramide in Betracht, macht alsbald Gebrauch von den Coordinaten $s=x+iy$, $s_0=x-iy$, bestimmt die Tangentialgleichung einer Symmetriefläche von gegebenem Grade, geht näher auf die Flächen dritter und vierter Ordnung mit kubooktaedrischer Symmetrie ein und untersucht ausführlich die in den letzteren enthaltenen Geraden und Doppelpunkte. Von den Flächen mit tetraedrischer Symmetrie werden diejenigen mit Doppelpunkten, von denen mit dodekaedrischer Symmetrie die Flächen sechsten Grades hervorgehoben. — Die zweite Abteilung beschäftigt sich mit der Aufsuchung der symmetrischen Minimalflächen. Ist M ein Punkt der Fläche Σ, m (mit den Coordinaten s und s_0) sein Bild auf einer Kugelfläche, so entsteht zunächst von jeder durch M auf Σ beschriebenen Curve ein sphärisches Bild auf der Kugelfläche durch den Bildpunkt m. Auf diese Weise wird eine Minimalcurve durch eine „charakteristische Function“ $F(s)$ einer „charakteristischen Variablen“ $s=-\frac{dx}{dz}-i\frac{dy}{dz}$ dargestellt. Aus dieser Minimalcurve wird

durch Bewegung eines ihrer Punkte längs einer andern Minimalcurve eine Minimalfläche erzeugt, und aus der charakteristischen Function der ersteren Curve mittels der von Hrn. Lie gegebenen Formeln die charakteristische Function für die bewegte Curve bestimmt. Somit gelingt die Darstellung der Coordinaten eines reellen Punktes einer Minimalfläche durch Functionen von $F(s)$ und die conforme Abbildung der Fläche auf der Kugel. — Nunmehr wird der Minimalfläche die Bedingung der Symmetrie auferlegt, wobei sich aus den Transformationen, welche die Fläche in sich selbst überführen, Beziehungen zu den Klein'schen Untersuchungen über das Ikosaeder ergeben. Hierbei sind zwei Arten von Symmetrie zu unterscheiden. Entweder nämlich entsprechen zwei symmetrisch zu einer Ebene gelegenen Kugelpunkten zwei symmetrisch gelegene Flächenpunkte, oder zwei zur Axe OY symmetrisch gelegenen Kugelpunkten entsprechen zwei symmetrisch zur Ebene xz gelegene Punkte der Fläche. Die erzeugende Minimalcurve C muss dann die Eigenschaft haben, dass ihr symmetrisches Gegenbild in Bezug auf eine beliebige Symmetrieebene entweder mit ihr selbst oder mit der ihr conjugirten C_0 zusammenfällt. Die Curven C und C_0 und die Function $F(s)$ werden für die Symmetrie jedes Polyeders besonders bestimmt. Die für die beiden oben erwähnten Arten der Symmetrie aufgestellten Bedingungen $F_0(s) = F(s)$, bezw. $-s^2 F\left(-\frac{1}{s}\right) = F(s)$ sind für alle algebraischen symmetrischen Minimalflächen hinreichend, genügen aber, einen Ausnahmefall abgerechnet, nicht für die transcendenten. Für diese lässt sich eine „Pseudosymmetrie" genannte Eigenschaft definiren, die ganz analog der Symmetrie untersucht werden kann. Von speciellen Arten der Minimalflächen werden u. a. noch diejenigen näher betrachtet, welche geodätische Linien enthalten; endlich wird auch hier die Symmetrie in Bezug auf eine Doppelpyramide untersucht. — In der dritten Abteilung wird die Aufgabe, die allgemeinste Form der Gleichung einer symmetrischen Fläche zu finden, vom Standpunkte der Functionentheorie behandelt. Es folgen Untersuchungen über einige sphärische Curven. Dann wird die Theorie der

tetraedrischen und kubo-oktaedrischen Symmetrie auf das n-dimensionale Gebiet ausgedehnt und speciell der Fall $n = 4$ betrachtet. Schliesslich wird auf eine andere Verallgemeinerung der Theorie hingewiesen, betreffs der Oberflächen, die, ohne die Symmetrie eines regelmässigen Polyeders zu haben, durch alle ein regelmässiges Polyeder in sich selbst überführenden Rotationen ebenfalls in sich selbst übergeführt werden. Schg.

A. R. Johnson. On self-conjugate polygons and polyhedra. Quart. J. XXII 158-173.

Eine jede Form n^{ten} Grades von r Veränderlichen kann bekanntlich als Summe einer Anzahl n^{ter} Potenzen linearer Formen dieser r Veränderlichen dargestellt werden. Wenn die Form eine allgemeine ist (d. h. wenn unter ihren Coefficienten keine Bedingungsgleichungen bestehen), giebt es für diese Anzahl einen kleinsten, von n, r abhängigen Wert, und zwar derart, dass die Transformation der ursprünglichen Form in die Summe dieser minimalen Zahl von Potenzen entweder nur auf eine endliche Anzahl Arten oder auf unendlich viele Arten möglich ist. Verlangt man die Transformation in eine um 1 grössere Zahl von Potenzen, so wächst die Zahl der bei der Transformation willkürlichen Constanten um r.

Indem nun der Verfasser die für Kegelschnitte und Oberflächen zweiter Ordnung übliche Nomenclatur auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen und beliebigem Grade ausdehnt, bezeichnet er die Gesamtheit der linearen Gebilde, welche man erhält, indem man die linearen Formen gleich Null setzt, als sich selbst conjugirtes Polygon resp. Polyeder des durch Annullirung der gegebenen Form bestimmten geometrischen Gebildes. Er giebt die Construction und die Eigenschaften der sich selbst conjugirten Polygone der Curven dritter bis achter Ordnung, der sich selbst conjugirten Polyeder der Flächen dritter und vierter Ordnung und des einer Form vierten Grades mit fünf Veränderlichen entsprechenden geometrischen Gebildes. Die Untersuchung lehrt, dass die allgemeine Curve oder Fläche einer bestimmten Ordnung zuweilen nicht ein sich selbst conjugirtes Polygon resp.

Polyeder von so geringer Seitenanzahl besitzt, als die blosse Constantenabzählung vermuten lässt; so müssen besondere Bedingungen erfüllt sein, damit die Curve vierter Ordnung ein sich selbst conjugirtes Fünfeck (Lüroth'sche Curve, cf. Math. Ann. I. 37), die Fläche vierter Ordnung einen sich selbst conjugirten Neunflächner, das einer Form vierten Grades mit fünf Variabeln entsprechende Gebilde einen sich selbst conjugirten Vierzehnflächner besitze. F.

G. B. Guccia. Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali. Palermo Rend. I. 165-168.

Herr Picard hat im Jahre 1878 (Soc. philom. Paris 127—132, F. d. M. X. 511.) den Satz aufgestellt, dass die einzigen algebraischen Flächen, deren ebene Schnitte einläufig sind, gewisse Regelflächen und die Steiner'sche Fläche sind, und hat im J. für Math. C. 71—78 (F. d. M. XVII. 1885. 743) diesen Satz eingehender begründet. Der Herr Verfasser findet aber in dem Picard'schen Beweise eine Lücke und beweist den Satz in anderer Weise mit Hülfe einer gewissen von ihm selbst früher gefundenen Erweiterung eines Satzes von Herrn Nöther. A.

E. H. Moore. Algebraic surfaces of which every plane section is unicursal in the light of n-dimensional geometry. American J. X. 17-28.

Die Untersuchungen des Herrn Picard über algebraische Flächen, deren ebene Schnitte sämtlich rational sind, werden auf den Raum von n Dimensionen übertragen. A.

G. Koenigs. Recherches sur les surfaces par chaque point desquelles passent deux ou plusieurs coniques tracées sur la surface. C. R. CV. 407-409.

Wenn eine algebraische Fläche eine Familie von algebraischen Curven enthält, welche von einem Parameter abhängen,

so ist wesentlich zu unterscheiden, ob das System von Curven einfach ist, d. h. ob durch jeden Punkt der Fläche nur eine solche Curve geht, oder ob es zweifach, dreifach, ..., n-fach ist.

Hier ist nur der Fall in Betracht gezogen, wo auf der Fläche zwei einfache Systeme von Kegelschnitten liegen. Eine solche Fläche ist stets ein specieller Fall oder ein Grenzfall einer Fläche achter Ordnung, deren homogene Punktcoordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) vier Polynomen $f(\lambda, \mu)$ proportional sind, welche folgende Form haben

$$f_i(\lambda,\mu) = (a_i\lambda^2+b_i\lambda+c_i)\mu^2+(a_i'\lambda^2+b_i'\lambda+c_i')\mu+a_i''\lambda^2+b_i''\lambda+c_i''.$$

Diese Fläche, deren Doppelcurve vom 20sten Grade ist, enthält in sich als specielle Fälle die Flächen zweiten Grades, die Steiner'sche Fläche, die Flächen dritter Ordnung und viele andere bekannte Flächen. Sie lässt sich aus den Flächen zweiter Ordnung durch folgende Transformation herleiten. Seien X_i und x_i die homogenen Coordinaten zweier Punkte P und p in zwei beliebigen Coordinatensystemen; seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ beliebige quadratische Formen von x_1, x_2, x_3, x_4, und setzt man

$$\frac{X_1}{\varphi_1} = \frac{X_2}{\varphi_2} = \frac{X_3}{\varphi_3} = \frac{X_4}{\varphi_4},$$

so entspricht jedem Punkte p ein gewisser Punkt P. Beschreibt p eine Fläche zweiter Ordnung, so beschreibt P eine der oben charakterisirten Flächen achter Ordnung, und es entsprechen den beiden Systemen von Geraden der Fläche zweiter Ordnung die beiden Systeme von Kegelschnitten der Fläche achter Ordnung. Die hier benutzte Transformation geht in gewissen speciellen Fällen in die projectivische Inversion über und führt dann auf eine Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Ebenso kann man auch die Constanten der Transformation so wählen, dass die Kegelschnitte in Kreise übergehen, so dass man auf eine Fläche achter Ordnung mit zwei Systemen von Kreisen geführt wird, auf welche bereits Herr Darboux aufmerksam gemacht hat. A.

J. LARMOR. General theory of Dupin's space extension of the focal properties of conic sections. Lond. M. S. Proc. XVIII. 363-369.

Es ist bekannt, dass der Ort der Brennpunkte eines Kegelschnittes ein zweiter Kegelschnitt ist, dessen Ebene senkrecht zu der Ebene des ersten steht, und dass, wenn man irgend zwei feste Punkte des Focalkegelschnitts mit einem beweglichen Punkte des andern verbindet, die Summe oder die Differenz der Verbindungslinien constant ist, je nachdem die festen Punkte auf demselben Aste oder auf verschiedenen Aesten liegen. Analoge Focaleigenschaften existiren für ebene Curven, welche von einem Punkte beschrieben werden, dessen Entfernungen r_1, r_2, r_3 von drei festen Punkten der Ebene die homogene und lineare Gleichung erfüllen:

$$ar_1 + br_2 + cr_3 = 0,$$

und welche zu den bicircularen Curven vierter Ordnung gehören, und ebenso für die durch reciproke Radien daraus transformirten sphärischen Curven. Der Herr Verfasser untersucht diese, übrigens meist schon bekannten Eigenschaften auf geometrischem Wege und kommt dabei auf eine Reihe interessanter Fadenconstructionen und dgl. A.

V. MURER. Sulle serie di superficie algebriche d'indice 1 e 2. Batt. G. XXV. 363-366.

Als eine „Flächenreihe $[\mu, n]$ von der Ordnung n und dem Index μ“ wird nach de Jonquières ein System von unendlich vielen Flächen der n^{ten} Ordnung bezeichnet, von denen je μ durch jeden Punkt des Raumes gehen. Diejenigen Reihen, deren Gleichung die Form:

$$u_0\lambda^\mu + u_1\lambda^{\mu-1} + \cdots + u_\mu = 0$$

hat (u_0, u_1, ..., u_μ sind Functionen n^{ten} Grades von x, y, z; λ ist der veränderliche Parameter), bilden eine besondere Klasse, die der „rationalen Reihen“ (siehe die Abhandlung des Verfassers: Sulle serie razionali di superficie algebriche, Batt. G. XXIV. 106-123; F. d. M. XVIII. 1886. 742). Nun beweist der Verfasser, dass jede Reihe $[1, n]$ oder $[2, n]$ rational ist

allgemeine Reihe [1, n] ist nichts anderes als ein Flächenbüschel. Die allgemeine Reihe [2, n] besteht aus denjenigen Flächen eines Netzes R, welche die von zwei in R enthaltenen projectivischen Büscheln erzeugte Fläche längs deren Erzeugungslinien berühren.

Vi.

M. Noether. Ueber die totalen algebraischen Differentiale. Math. Ann. XXIX. 339-381.

Die Abhandlung bringt in ausführlicher Darstellung die schon in kurzen Noten (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 741) publicirten Untersuchungen über Integrale erster Gattung, welche sich auf eine algebraische Fläche beziehen, ein zuerst von Hrn. Picard betretenes Gebiet (cf. F. d. M. XVII. 1885. 332-336). Es existiren specielle Klassen algebraischer Flächen $F(x, y, z) = 0$, zu denen auf F überall endliche Integrale der Form $\int(Pdx + Qdy)$ gehören, wo P, Q in den x, y, z rational sind, und zwischen den x, y, z die Gleichung $F = 0$ besteht. Indessen ist, wie Hr. Noether in der vorliegenden Arbeit zeigt, die von Hrn. Picard gegebene Grundlegung der neuen Theorie noch nicht genügend allgemein; wendet man statt der von Hrn. Picard benutzten Methode der Reihenentwickelung diejenige der rational-eindeutigen Transformation der Fläche F an, so gelangt man erst zu dem vollen Grade der Allgemeinheit.

Zunächst werden die auf F bezüglichen totalen Differentialausdrücke du aufgestellt, und zwar für nicht homogene Coordinaten x, y, z, wie für homogene x_1, x_2, x_3, x_4, beidemal in homogener Form.

Bei homogenen x hat man für $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$:

$$du = \frac{\Sigma \pm k_1 A_2 x_3 dx_4}{N \, . \, \Sigma k_i f_i} \quad \left(f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Hier bedeuten die k Constante, von denen der Wert des Differentials unabhängig ist, die N, A_1, ..., A_4 rationale ganze Functionen der x, die der Relation

$$\Sigma A_i f_i = 0, \quad (f = 0)$$

zu genügen haben.

Ist N vom Grade ν, so steigen die A bis zum Grade $n+\nu-3$ an.

Bei nicht homogenen x, y, z für $F(x, y, z) = 0$ kommt ganz ähnlich

$$du = \frac{Bdz - Cdy}{N \cdot F'_x} = \frac{Cdx - Adz}{N \cdot F'_y} = \frac{Ady - Bdx}{N \cdot F'_z},$$

wo

$$AF'_x + BF'_y + CF'_z = 0, \quad (F = 0).$$

Die Vergleichung beider Darstellungen lehrt, dass die A, B, C von der Form

$$A = x\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_1, \quad B = y\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_1, \quad C = z\mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_1$$

sein müssen. Bedeutet auch hier ν den Grad von N, so ist $n+\nu-2$ derjenige der Functionen A, B, C.

In der Relation

$$\Sigma A_i f_i = R \cdot f$$

kann der Factor R zu einer ganz beliebigen ganzen Function $(n+\nu-4)^{\text{ten}}$ Grades gemacht werden.

Legt man dem Differential du die Bedingung der Integrabilität auf, so ergiebt sich bei $\nu = 0$ für R der Wert

$$R = \Sigma \frac{dA_i}{dx_i},$$

während bei beliebigem ν noch eine weitere zu erfüllende Identität zwischen den A_i hinzutritt.

Es wird nun das Verhalten von du bei der allgemeinsten rationalen Transformation der Fläche untersucht.

Vermöge einer rationalen Substitution

$$x_i = \psi_i\overline{\overset{(r)}{(y_1, y_2, y_3, y_4)}}$$

gehe $f = 0$ in $F = 0$ über, sodass $f = MF$.

Dann lässt sich das umgeformte Differential du in die zu der ursprünglichen Form analoge Gestalt bringen:

$$du = \frac{\Sigma \pm c_1 B_2 y_3 dy_4}{N \cdot \Sigma c_h F_h},$$

wo

$$N = \mathrm{N}(y_1, y_2, y_3, y_4) = N(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

ist.

Aus der Transformation von *du* werden die Endlichkeitsbedingungen der Differentialausdrücke in den mehrfachen Elementen der Fläche hergeleitet.

Die Substitutionsformen $\psi_i(y)$ werden so angenommen, dass die Flächen $\psi_i(y) = 0$ durch alle vielfachen Elemente von $F(y) = 0$ einfach hindurchgehen, aber gegeneinander und gegen $F(y) = 0$ keine weitere Specialität haben. Vermöge geeigneter Transformationen werden complicirtere Singularitäten der Fläche in einfachere aufgelöst, und dies ermöglicht es, den Ausdruck *du* so zu normiren, dass er bei verschwindendem $\Sigma k_i f_i$ und N nicht unendlich wird. Es kommt dies, kurz gesagt, darauf hinaus, dass sich der Zähler von *du* zur Fläche f „adjungirt" verhalten muss.

Uebrigens lässt sich auch die Bedingung der Endlichkeit der Integrale längs einer vielfachen Curve der Fläche auf die bekannte Normirung der Abel'schen Curvenintegrale zurückführen.

Ein besonderes Interesse verdienen die Flächen F vom Flächengeschlecht 1. Sie besitzen höchstens zwei unabhängige totale Differentiale du, du' erster Gattung, indem alle übrigen zu F gehörigen Differentiale dieser Art lineare homogene Functionen von du, du' werden.

Existiren aber zwei solche Differentiale du, du', so lassen sich die Coordinaten der Fläche als eindeutige Functionen der beiden Integrale erster Gattung u, u' ausdrücken. Dass diese Ausdrücke vierfach periodisch werden, hat Hr. Picard gezeigt: dasselbe geht übrigens aus dem eben ausgesprochenen Satze leicht hervor. My.

F. Caspary. Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren. J. für Math. C. 405-412.

F. Caspary. Sur les courbes gauches. Darb. Bull. (2) IX. 222-236.

Carvallo. Exposition d'une méthode de M. Caspary pour l'étude des courbes gauches. S. M. F. Bull. XV. 158-166.

Bedeuten nach Grassmann'schen Principien die symbolischen Gleichungen: $PQR = 0$, dass die drei Punkte P, Q, R in einer Geraden liegen, $PQRS = 0$, dass die vier Punkte P, Q, R, S in einer Ebene liegen, $pq = 0$, dass die beiden Geraden p, q sich treffen etc., so lässt sich die Grassmann'sche lineale Erzeugung ebener algebraischer Curven auf die entsprechende Erzeugung räumlicher algebraischer Curven übertragen.

Wird ein beweglicher Punkt X mit festen Punkten, Geraden und Ebenen durch die Operationen des Verbindens und Schneidens verknüpft, und wird er dabei n-mal verwendet, so beschreibt er eine algebraische Raumcurve n^{ter} Ordnung, sobald eine (auf die gemeinte Art) aus ihm „abgeleitete" Gerade entweder durch einen aus ihm abgeleiteten Punkt geht oder in einer aus ihm abgeleiteten Ebene liegt. Insbesondere lassen sich dadurch einfache Sätze über Erzeugung und Eigenschaften kubischer Raumcurven gewinnen. So z. B. bedeutet die Gleichung:

$$(Xa_1a_2)(Xb_1b_2)(Xc_1) = 0$$

den Satz: „Wenn zwei Ecken eines beweglichen Dreiecks auf zwei festen Geraden sich bewegen, die von der dritten Ecke ausgehenden Seiten längs zweier anderen festen Geraden gleiten und die Fläche des Dreiecks sich um eine ebenfalls feste Gerade dreht, so beschreibt die dritte Ecke eine Raumcurve dritter Ordnung." Man kann aber auch die letztere entstehen lassen durch geeignete (lineale) Bewegung eines Tetraeders u. s. f. Drehen sich die Seiten eines räumlichen Polygons um feste Punkte und bewegen sich die Ecken, bis auf eine, in festen Ebenen, so beschreibt diese letzte Ecke eine Raumcurve dritter Ordnung. Dieser Satz ist das Analogon zu einem bekannten Satze der Ebene.

Man kann von derartigen Erzeugungen der kubischen Raumcurven zu wirklichen Eigenschaften der letzteren übergehen. So gestatten z. B. der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz für Kegelschnitte verschiedenartige Verallgemeinerungen für kubische Raumcurven. Ferner werden neue Constructionen einer solchen durch sechs Raumpunkte bestimmt gedachten Curve angegeben. Die Theorie der durch eine kubische Raumcurve gehenden gerad-

linigen Hyperboloide erfährt auf diesem Wege eine neue Beleuchtung.

Herr Carvallo giebt eine übersichtliche Darstellung der Caspary'schen Methode. My.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

Fr. Haag. Die regulären Krystallkörper. Eine geometrisch-krystallographische Studie. Pr. Gymn. Rottweil (No. 550). 40 S. u. 2 Taf. 4°.

Im ersten Abschnitte ist die Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der ins Gleichgewicht gebrachten regelmässigen Krystallkörper ausgeführt. Die Bestimmung der Körper von kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen führt zu dem Resultate, dass es unter den regulären Krystallkörpern im allgemeinen keine Formen giebt, welche bei gegebenem Inhalte eine kleinste Oberfläche besitzen; nur unter gewissen beschränkenden Umständen ist das Rhombendodekaeder ein solcher Körper. Der zweite Abschnitt handelt von der Zerlegung der Körper in Primitivformen. Für einige Beispiele ist die Rechnung durchgeführt, teilweise mit Zuhülfenahme der Abnahmegesetze (Decrescenzen) von Haüy. Im folgenden Abschnitte wird gezeigt, dass die Kanten der Primitivformen des vorigen Abschnitts Raumgitter bilden; das rhombendodekaedrische Raumgitter muss jedoch noch centrirt werden, wenn es mit dem von Bravais aufgestellten übereinstimmen soll. Im vierten Abschnitte wird das Grundgesetz der Krystallographie aus der neuen Theorie nach Bravais und Sohncke abgeleitet. Die Untersuchung über Verteilung der Systempunkte auf den Flächen hat ergeben, dass sich für gewisse Gruppen von Formen die Hauptzonen (Kantenrichtungen mit kleinsten Indices) unmittelbar aus dem Zeichen der betreffenden Fläche ablesen lassen. Lp.

JOH. KREJČÍ. Einleitung in die mathematische Krystallographie. Cas. XVI. 68, 116. (Böhmisch.)

Der Verfasser liefert für Anfänger eine einfache, unter Verwendung der analytischen Geometrie und der Determinanten kurz dargestellte Ableitung der wichtigsten Lehren und Formeln der mathematischen Krystallographie. Std.

AD. LEESEKAMP. Ueber die regelmässigen Polyeder. Pr. Techn. Staatslehranstalten Chemnitz. 4°.

KOCH. Ueber reguläre und halbreguläre Stern-Polyeder. Tübingen. 24 S. 8°.

F. CASPARY. Bemerkung zu den desmischen Tetraedern. Math. Ann. XXIX. 581-582.

Der Verf. bildet aus vier Grössen α, β, γ, δ die Summen und Differenzen, leitet für die Quadrate derselben Identitäten ab und deutet die erhaltenen Formeln, indem $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ als die Gleichungen von vier Punkten betrachtet werden, sodass man drei desmische Tetraeder erhält. Lp.

C. LE PAIGE. Recherches sur le pentaèdre. Belg. Bull. (3) XIII. 488-497.

Beiträge zur Theorie des Fünfflachs der Oberflächen von der dritten Ordnung. Mn. (Lp.)

P. J. HOLLMAN. Verzameling van vraagstukken op het gebied van de analytische meetkunde der ruimte. Tweede gedeelte. Alkmaar. H. Coster & Zoon. 197 S.

Fortsetzung des bereits früher erwähnten Werkes. (Siehe F. d. M. XVIII. 1886. 651.) Der vorliegende Teil enthält Aufgaben über die Oberflächen zweiten Grades und ihre Auflösungen. G.

P. van Geer. La conique dans l'espace. Néerl. Arch. XXII. 58-90.

Siehe F. d. M. XVIII. 1886. 754. G.

Ed. Weyr. Discussion der Gleichung zweiten Grades zwischen drei Variablen. Cas. XVI. 97, 145, 202. (Böhmisch.)

Enthält eine elegante Ableitung aller diesbezüglichen geometrischen allgemeinen wie speciellen Lehrsätze. Std.

S. Finsterwalder. Katoptrische Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. Münch. Ber. 33-42.

Auf rein geometrischem Wege beweist der Verfasser den Satz: „Werden die Erzeugenden einer Developpablen D_1, die einer Fläche zweiten Grades E umschrieben ist, an einer zu E confocalen Fläche F reflectirt, so bilden sie nach der Reflexion wiederum eine Developpable D_2, die ebenfalls E umschrieben ist." Es folgt das Problem der Reflexion eines Strahlenbündels an einer spiegelnden Fläche zweiten Grades und die Erweiterung eines von Lindelöf für die Reflexion von Strahlen parallel zur Axe eines spiegelnden Ellipsoides gefundenen Satzes. Endlich wird durch Hereinziehung der auf Quetelet und Malus zurückreichenden Construction einer Wellenfläche des Systems der reflectirten Strahlen der Beweis dafür gegeben, dass gewisse auftretende Curven Rückkehrkanten der Brennfläche des Systems der reflectirten Strahlen sind. Damit ist ein erster Beitrag zur gestaltlichen Untersuchung jener Brennflächen geleistet.

Lp.

G. Plarr. On the determination of the curve on one of the coordinate planes which forms the outer limit of the positions of the point of contact of an ellipsoid which always touches the three planes of reference. Edinb. Trans. XXXIII. 465-499.

Die Aufgabe ist durch den Titel gekennzeichnet. Die Untersuchung bedient sich der Quaternionen. Das Endergebnis wird vermittelst zweier Gleichungen III und IV ausgedrückt, welche die Winkel B und C und damit die Coordinaten y und z eines Punktes der Curve in der yz-Ebene vermöge des Winkels oder Parameters A bestimmen. Jedoch wird dazu bemerkt, dass dieses theoretische Ergebnis, wenn es durchgeführt werden könnte, zu äusserst complicirten vielfachen Lösungen führen würde. Cly. (Lp.)

P. Drouet. Sur les foyers des sections planes d'une quadrique. Nouv. Ann. (3) VI. 321-325.

Die Brennpunkte eines ebenen Schnitts von einem Ellipsoide werden zunächst auf dieselbe Art gefunden, wie in Salmon's Lehrbuch angegeben ist, jedoch mit einer etwas abweichenden Begründung; und zwar werden zwei verschiedene Nachweise gegeben. Am Schluss wird gezeigt, wie die rechtwinkligen Coordinaten eines solchen Brennpunktes aus folgender geometrischen Betrachtung hervorgehen: Hat man einen Kegel, welcher durch den Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades gelegt ist, so trifft eine Tangentialebene dieses Kegels die beiden Flächen in Kegelschnitten, welche sich doppelt berühren. Sind also:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{und} \quad \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

die Gleichungen des Ellipsoides und der schneidenden Ebene; ferner (x_1, y_1, z_1) die gesuchten Coordinaten eines Brennpunktes, so muss man ausdrücken, dass die Gleichung:

$$S\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right]=0$$

einem Kegel zugehört, der die Ebene zur Tangentialebene hat. Dies ergiebt vier Gleichungen zwischen x_1, y_1, z_1, S, aus denen dann S zu eliminiren ist. Mz.

M. Baur. Ueber den Schnitt eines Ellipsoids und einer mit ihm concentrischen Kugel. Böklen Mitt. II. 24-31.

Sind ein Ellipsoid und eine Kugel durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad (\alpha>\beta>\gamma)$$

und

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

so werden zuerst die Projectionen der Schnittcurve beider Flächen auf jede Coordinatenebene durch Gleichungen ausgedrückt. Diese Projectionen sind alle drei reell, wenn die Schnittcurve reell ist; von diesen Projectionen sind aber 2 reell und eine ist imaginär, wenn die Schnittcurve imaginär ist. Dieser Aufsatz beschäftigt sich nun mit der Aufsuchung der Beziehungen, in welchen die reellen Projectionen zum Ellipsoid in dem Falle stehen, wenn die Schnittcurve imaginär ist. Dazu werden die Cylinderflächen betrachtet, deren Erzeugende durch die Punkte einer solchen Projection und zwar lotrecht zur betreffenden Coordinatenebene gehen; und es wird gezeigt, dass ein Punktepaar einer solchen Erzeugenden, welches für das Ellipsoid conjugirt ist, auch für die Kugel conjugirt ist. Dann wird die Aenderung dieser Cylinderflächen bei veränderlichem Kugelradius untersucht und zuletzt gezeigt, dass zwar noch andere Gerade dieselbe Eigenschaft wie die Erzeugenden haben, aber dann nicht mehr lotrecht zu einer der drei Coordinatenebenen sind. Mz.

J. J. Sylvester, Sircom, W. J. C. Sharp. Solution of question 2832. Ed. Times XLVII. 90-91.

Die Durchschnittscurve zweier geraden Kegel mit parallelen Axen ist eine sphärische Curve, durch welche man einen dritten geraden Kegel legen kann. Ferner lässt sich eine ebene circulare kubische Curve so bestimmen, dass die Abstände zweier beliebig auf ihr angenommenen festen Punkte von jedem Punkte der obigen Raumcurve in einer bestimmten linearen Relation stehen. Lp.

R. A. Roberts. On polygons inscribed in a quadric and circumscribed about two confocal quadrics. Lond. M. S. Proc. XVIII. 202-213.

In einer früheren Arbeit (Lond. M. S. Proc. XVI p. 242, F. d. M. XVII. 1885. 750.) hatte der Herr Verfasser gezeigt, dass es möglich sei, einer Fläche zweiter Ordnung eine zweifach unendliche Schar von n-Ecken einzuschreiben, welche gleichzeitig zwei dazu confocalen Flächen umschrieben sind, und dass alsdann diese drei Flächen durch Relationen verbunden sind, welche von der Seitenzahl n abhängen. Die Auffindung dieser Relationen wurde unter Benutzung gewisser von Liouville aufgestellten Differentialgleichungen auf die Teilung gewisser hyperelliptischen Integrale zurückgeführt. In der vorliegenden Arbeit werden nun diese Relationen wirklich aufgestellt, und zwar vermittelst einer vereinfachten Grundlage der Rechnung. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a+p}+\frac{y^2}{b+p}+\frac{z^2}{c+p}-1=0$$

stellt ein mit dem Parameter p variirendes System confocaler Flächen zweiter Ordnung dar. Durch einen beliebigen Punkt (x, y, z) des Raumes gehen drei Flächen dieses Systems, die den Parametern p, q, r entsprechen, so dass p, q, r die elliptischen Coordinaten des Punktes (x, y, z) sind. Irgend eine Tangente von p, q, r, an die Flächen p_1 und p_2 gelegt, bilde mit den Normalen der Flächen p, q, r im Punkte (x, y, z) die Richtungswinkel α, β, γ; dann ist

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p-q)(p-r)}}\text{ etc.}$$

Schreitet man auf einer Tangente zu einem Nachbarpunkte $p+dp$, $q+dq$, $r+dr$ vor, so ergeben sich, wie Liouville gezeigt hat, für dp, dq, dr die Differentialgleichungen

$$\frac{dp}{\sqrt{P}}+\frac{dq}{\sqrt{Q}}+\frac{dr}{\sqrt{R}}=0,\qquad \frac{pdp}{\sqrt{P}}+\frac{qdq}{\sqrt{Q}}+\frac{rdr}{\sqrt{R}}=0,$$

wo

$$P=(p-p_1)(p-p_2)(p+a)(p+b)(p+c)=f(p),\ Q=f(q),\ R=f(r)$$

ist.

Setzt man

$$\int \frac{dp}{\sqrt{P}} = L(p), \qquad \int \frac{pdp}{\sqrt{P}} = M(p),$$

so folgt durch Integration der beiden Differentialgleichungen,

$$L(p) \pm L(q) \pm L(r) = c_1, \qquad M(p) \pm M(q) \pm M(r) = c_2,$$

wo die Vorzeichen in beiden Gleichungen übereinstimmend zu nehmen sind. Dies sind also die Gleichungen gemeinsamer Tangenten von p_1 und p_2 in elliptischen Coordinaten. Hieraus schliesst nun der Herr Verfasser, dass, wenn man von einem beliebigen Punkte P_0 einer Fläche p ausgeht, und der Fläche ein Polygon $P_0 P_1 P_2 \dots P_n \dots$ einschreibt, dessen Seiten die Fläche p_1 und p_2 berühren, P_n dann und nur dann mit P_0 zusammenfällt, wenn $2n\ L(p) = \Omega$, $2n\ M(p) = \Omega'$ ist, wo Ω und Ω' die Perioden der Integrale erster Gattung $L(p)$ und $M(p)$ sind; so dass das Schliessungsproblem auf die Teilung der Perioden zurückgeführt wird.

Diese Teilung der Perioden wird nun mit Hülfe des Abel'schen Theorems vollständig durchgeführt für Dreiecke, Vierecke, Fünfecke und Sechsecke, also für $n = 3, 4, 5, 6$, während für höhere Werte von n nur der Weg der Berechnung angegeben wird.

Es kann das Problem auch in der Art verallgemeinert werden, dass die Eckpunkte des geschlossenen Polygons auf verschiedenen confocalen Flächen liegen;

Andrerseits kann eine der beiden Flächen p_1 oder p_2, oder es können beide in die Focalkegelschnitte degeneriren.

Schliesslich weist der Herr Verfasser darauf hin, dass das System confocaler Flächen ganz allgemein durch ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinschaftlicher abwickelbarer Tangentenfläche ersetzt werden kann. A.

O. Böklen. Ueber die Tangentialkegel der Flächen zweiter Ordnung. Böklen Mitt. I_2. 48-55.

Durch einen Punkt des Raumes gehen die Glieder aus der

Schar confocaler Flächen zweiten Grades. Ihre Parameter dienen in bekannter Form als Coordinaten zur Bestimmung von Punkten des Raumes. An eine beliebige vierte confocale Fläche, zum Beispiel an ein confocales Ellipsoid, lässt sich von einem Punkte S des Raumes ein Tangentenkegel legen. Wird diesem Tangentenkegel eine singuläre Natur beigelegt, so lässt sich die Frage nach dem geometrischen Ort der Punkte S untersuchen. Von den Ergebnissen der Untersuchung mögen einige Sätze hier Platz finden.

Soll der Tangentenkegel ein gleichseitiger Kegel sein, d. h. also ein Kegel, in dessen Mantel unendlich viele senkrecht auf einander stehende Dreistrahlen liegen, so ist der Ort der Spitzen ein Ellipsoid.

Ist der Kegel das reciproke Gebilde eines gleichseitigen Kegels, also ein Kegel, welcher unendlich viele Tripel von rechtwinkligen Tangentialebenen hat, so ergiebt sich der bekannte Satz von Monge, dass der Ort der Spitzen eine Kugel ist.

Soll der Tangentenkegel einen rechtwinkligen Hauptschnitt besitzen, so ist der Ort der Spitzen eine Fresnel'sche Wellenfläche.

Ergebnisse solcher Art folgen aus der Analyse jener oben charakterisirten Frage. Schn.

J. C. Malet, A. M. Nash. Solution of question 7305. Ed. Times. XLVI. 113.

Die Gleichung des Tangentialkegels vom Punkte x', y', z' an die Fläche zweiter Ordnung

$$S \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2lx+2my+2nz+d = 0$$

wird, auf seine Axen bezogen:

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2 = 0,$$

wobei λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Gleichung bedeuten:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g & U_1 \\ h & b-\lambda & f & U_2 \\ g & f & c-\lambda & U_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & S \end{vmatrix} = 0,$$

in der gesetzt ist $U_1 = ax' + hy' + gz'$, $U_2 = hx' + by' + fz'$, $U_3 = gx' + fy' + cz'$. Lp.

H. Kempe. Kugel- und Kegelfläche in ihren Beziehungen zu den Schwingungscurven. Diss. Marburg. 60 S. 8°.

O. Bermann. Ueber Triederschnitte und Minimaltetraeder. Hoppe Arch. (2) VI. 76-87.

Schneidet man ein beliebiges Trieder durch eine Ebene, so entsteht ein Triederschnitt in Form eines Dreiecks. Ist der Ort der Schwerpunkte dieser Triederschnitte gegeben, so umhüllen ihre Ebenen ein Gebilde. Die Natur dieser Gebilde wird untersucht, 1) wenn der Ort der Schwerpunkte ein auf die Triederkanten als conjugirte Durchmesser bezogenes Ellipsoid ist, 2) wenn der Ort der Schwerpunkte eine Ebene, 3) wenn der Ort derselben eine Gerade ist. Umhüllen die Triederschnitte eine Fläche, so wird unter diesen Schnitten einer ein Minimaltetraeder abgrenzen. Die Analyse dieses besonderen Schnittes führt zu dem bekannten Satz, dass der Schwerpunkt dieses Triederschnitts mit dem Berührungspunkt der umhüllten Fläche zusammenfällt. Schn.

R. Schiel. Ueber Kreisschnittflächen, die aus Oberflächen zweiter Ordnung abgeleitet werden können. Pr. Joach. Gymn. Berlin.

Die hier zuerst betrachtete Fläche ist der Ort des Kreises in welchem eine durch die mittlere Hauptaxe eines Ellipsoids gehende Ebene das Ellipsoid schneidet, wenn die Länge dieser Axe variirt. Ihre Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Von ihr werden Hauptschnitte, Krümmungseigenschaften, singuläre Punkte und Tangentialebenen, Niveaulinien, geodätische und Krümmungslinien, Volumen und Flächeninhalt berechnet. Dann

werden die analog aus den übrigen Flächen zweiten Grades, welche Kreisschnitte haben, hervorgehenden Flächen behandelt.

H.

J. Wolstenholme, T. R. Terry, H. London. Solution of question 8593. Ed. Times XLVI. 65.

Wenn bei der Fläche $ax^2+by^2+cz^2=1$ die Sehne PQ in P normal zur Fläche und $a+b+c=0$ ist, so ist PQ das harmonische Mittel zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien in P.

Lp.

G. H. Halphen. Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. C. R. CV. 583-584.

Hat man auf einer von zwei confocalen Flächen zweiter Ordnung eine geodätische Linie, so bestimmt jede Tangente der letzteren auf der anderen Fläche zwei Punkte, welche bei Veränderung des Berührungspunktes zwei getrennte Curven beschreiben. Bei Rotationsflächen ist eine dieser Curven von der anderen nur durch die Lage verschieden und kann durch eine Rotation um die Rotationsaxe der Flächen in dieselbe übergeführt werden. Es hat also jeder Punkt y auf einer dieser Curven seinen homologen Punkt auf der andern, oder sogar, da jede Curve aus unendlich vielen congruenten Aesten besteht, welche bei Hyperboloiden durchs Unendliche hindurch zusammenhängen, unendlich viele homologe Punkte.

Wählt man zwei solcher homologen Punkte aus, y und y', und nennt man die ihnen entsprechenden Berührungspunkte der Tangente der geodätischen Linie x und x'; beschreiben ferner bei einer Variation der unabhängigen Veränderlichen x und x' die geodätischen Bogen s und s'; sei endlich m die Zahl der unendlich entfernten Punkte zwischen x und x': dann hat die Differenz $s'-s$ und die algebraische Summe der geradlinigen Strecken $xy\pm(-1)x'y'$ eine constante Differenz. Hierbei ist das Zeichen plus zu nehmen, wenn die confocale Fläche die geodätische Linie schneidet; wenn nicht, das Zeichen minus.

Für das Ellipsoid ist $m = 0$, wodurch sich die Sache noch einfacher gestaltet. A.

G. H. Halphen. Un théorème sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution allongé. C. R. CV. 535-536.

Das kurz angekündigte Theorem lautet:

Jede geodätische Linie auf einem länglichen Rotationsellipsoid projicirt sich auf die Aequatorebene als eine Curve, welche aufgefasst werden kann als die Bahn einer Ellipse mit festem Mittelpunkt, welche auf dieser Ebene rollt, ohne zu gleiten.

A.

A. Hurwitz. Ueber eine besondere Raumcurve dritter Ordnung. Math. Ann. XXX. 291-298.

Auf einer nach dem Erdmittelpunkte zeigenden Axe Z liegt der Mittelpunkt eines Kreises K über dem eines Kreises K', und zwar sind die Ebenen beider senkrecht zu Z. Unausdehnbare an ihren unteren Enden mit Gewichten beschwerte Fäden $p, q, \dots$ verbinden die Punkte $P, Q, \dots$ von K mit den senkrecht unter ihnen sich befindenden Punkten $P', Q', \dots$ von K', ferner läuft ein ebenfalls durch ein Gewicht gespannter Faden f von einem Punkte von K zu einem beliebigen Punkte von K'. Durch eine geeignete Drehung von K gehen $p, q, \dots$ in Erzeugende einer Regelschar R_α^1 eines Rotationshyperboloides H_α über, während f ein Strahl der anderen Regelschar R_α^2 wird. Die Fäden $p, q, \dots$ werden an den Stellen, wo sie den Faden f kreuzen, kenntlich bezeichnet und dann durch eine weitere Drehung von K um die Axe Z in Erzeugende der Regelschar R_β^1 eines neuen Rotationshyperboloides H_β übergeführt. Auf H_β liegen die kenntlich gemachten Stellen auf einer Raumcurve dritter Ordnung, welche die imaginären Kreispunkte einer Ebene senkrecht zur Axe Z enthält; überhaupt entsprechen den Regelstrahlen von R_α^2 auf H_β Raumcurven dritter Ordnung, welche sich in den genannten Kreispunkten berühren.

Bekanntlich schneiden sich die den vier Dreiseiten eines

vollständigen Vierseits umschriebenen Kreise in einem Punkte F. Letzterer beschreibt, wenn das Vierseit als Schnitt einer Ebene σ betrachtet und σ parallel zu sich selbst verschoben wird, eine Raumcurve dritter Ordnung, welche die Eckpunkte des Tetraeders und die imaginären Kreispunkte von σ enthält. Bleibt das von einem leuchtenden Punkte auf einer Ebene σ hervorgebrachte Schattenbild dreier gegebenen Geraden bei der Bewegung des Punktes sich selbst ähnlich, so durchläuft der Punkt eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte von σ geht und zu deren Sehnen jene drei Geraden gehören. Durch eine den imaginären Kugelkreis in zwei Punkten schneidende Raumcurve dritter Ordnung geht nur ein Rotationshyperboloid. Js.

A. Cantone. Un teorema sopra cubica gobba. Batt. G. XXV. 42-44, 182.

Das Doppelverhältnis der vier Tangentialebenen, die von einem Leitstrahl eines Nullsystems aus sich an eine in ihm liegende Raumcurve dritter Ordnung legen lassen, ist äquianharmonisch, ebenso dasjenige der vier Punkte, welche die betreffenden Tangenten auf dem Leitstrahl ausschneiden. Zwei der vier Tangenten sind hierbei imaginär, die anderen beiden reell. Seiner kurzen Rechnung legt Herr C. ein Coordinaten-Tetraeder zu Grunde, von dem zwei Ecken auf der Curve liegen, während die Tangenten und Schmiegungsebenen der Punkte Kanten und Ebenen desselben sind. Die beiden Punkte kann man reell so wählen, dass ihre Verbindungslinie und damit die Schnittlinie der Schmiegungsebenen den gegebenen Leitstrahl treffen.

E. K.

Herting. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Curven. Pr. Augsburg.

Referat auf S. 644 dieses Bandes.

G. Kohn. Ueber Flächen dritter Ordnung mit Knotenpunkten. Wien. Ber. XCVI. 1298-1304.

Die Arbeit schliesst sich an eine in den Wien. Ber. XCV (s. oben S. 735) veröffentlichte Arbeit desselben Verfassers an, betitelt „Zur Theorie der rationalen Curven vierter Ordnung“, und zeigt, dass sich mit Hülfe der dort angestellten Untersuchungen auch Schlüsse über die Flächen dritter Ordnung mit Knotenpunkten ergeben. A.

B. Meth. Untersuchungen über die asymptotische Fläche dritten Grades. Pr. Königl. Realgymn. Berlin 20 S. 4°.

Die Krümmungslinien der Fläche $xyz = 1$ sind schon durch die Untersuchungen von Serret und Hoppe über die orthogonalen Flächensysteme bekannt. Der Verfasser ermittelt dieselben auf dem Wege directer Integration, da es ihm gelungen, den sehr complicirten Integrabilitätsfactor aufzustellen. Nimmt man den Coordinaten-Anfang zum erzeugenden Punkt positiver und negativer Fusspunktsflächen, so findet man, dass sie alle mit der Fläche $xyz = 1$ dieselben vier Punkte gemeinsam haben, welche für alle Flächen zugleich Nabelpunkte sind und dieselbe Tangentialebene haben. Die gleiche Eigenschaft hat diejenige zweischalige Fläche, deren Radienvectoren der Grösse und Richtung nach den Hauptkrümmungsradien der asymptotischen Fläche entsprechen. R. M.

Sir R. S. Ball. On the plane sections of the cylindroid. Being the seventh Memoir on the theory of screws. Dublin Trans. XXIX$_1$. 1-32.

Die Gleichung des Schnittes im allgemeinen Falle wird auf zwei Axen bezogen, die sich in der Knotenlinie des Cylindroids schneiden und zu der Linie parallel bezw. senkrecht sind, in welcher die Schnittebene die Hauptebene schneidet. Nachdem die Gleichungen für die Verbindungssehne der Punkte, in denen Schrauben von gleichem Windungsparameter (pitch) die Curve schneiden, und für die Parabel, welche die Hüllcurve solcher

Sehnen ist, gefunden worden sind, wird nachgewiesen, dass diese Parabel die Curve in drei Punkten berührt. Die Hyperbel, welche die Hüllcurve der Verbindungssehnen derjenigen Punkte ist, in denen Paare reciproker Schrauben die kubische Curve treffen, berührt sie ebenfalls, wie gezeigt wird, in drei Punkten. Besondere Beachtung wird den Schnitten durch den Mittelpunkt, denen parallel zur Knotenlinie und denen tangential zum Cylindroid gewidmet. Die Ellipse, in welche die kubische Curve (nebst einer Geraden) ausartet, erhält im letzten Falle eine recht vollständige Behandlung, und es wird eine Beziehung zwischen Punkten auf ihr und zwischen Schrauben auf dem Cylindroid hergestellt, welche zu der circularen Abbildung führt, die in der Abhandlung „Dynamics and modern geometry“ gegeben ist. Zwei Tafeln mit Abbildungen des allgemeinen Schnittes und des centralen Schnittes sind der Abhandlung angehängt.

Gbs. (Lp.)

R. A. Roberts, Sircom. Solution of question 8524. Ed. Times XLVI. 32-33.

Das Ball'sche Cylindroid $z(x^2+y^2)-2mxy=0$ wirft, von der Sonne beschienen, auf die Ebene $z=0$ einen Schatten, dessen Grenze eine Hypocykloide mit drei Spitzen ist. Lp.

D. Andere specielle Raumgebilde.

K. Rohn. Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. Math. Ann. XXIX. 81-96.

Der vorliegende Aufsatz ist ein Auszug aus der Arbeit des Herrn Verfassers mit gleichem Titel, welche als gekrönte Preisschrift der Jablonowski'schen Gesellschaft 1886 in Leipzig bei S. Hirzel erschienen ist. (F. d. M. XVIII. 1886. 765—67.)

A.

F. KLEIN. Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. Math. Ann. XXVII. 106-142. (1886.).

Herr Rohn hatte betreffs des in der Ueberschrift genannten Gegenstandes, von der Theorie der hyperelliptischen Functionen ausgehend, eine Reihe von Sätzen ausgesprochen (cf. F. d. M. XI. 1879. 313), welche hier im Zusammenhange dargelegt und nach einigen Richtungen weiter geführt werden. Der erste Teil der Arbeit wendet nur elementare liniengeometrische Mittel an: Die so gewonnenen Ergebnisse werden im zweiten Teile unter Zugrundelegung hyperelliptischer Parameter neu bestätigt und gleichzeitig verallgemeinert.

Als homogene Coordinaten einer Raumgeraden g kann man sechs Grössen $x_1, x_2, \dots, x_6$ ansehen, wenn zwischen ihnen die Relation $\Sigma x^2 = 0$ erfüllt ist. Die Kummer'sche Fläche K wird dann eingeführt als Singularitätenfläche der einfach unendlich vielen Complexe zweiten Grades

$$\Delta(\lambda) = \Sigma \frac{x_i^2}{x_i - \lambda} = 0,$$

wo λ einen Parameter bedeutet.

Die vier Punkte 1, 2, 3, 4, in denen g die Fläche K trifft, und die vier (Tangential-) Ebenen I, II, III, IV, welche man durch g an die Fläche legen kann, sind in der Art auf einander bezogen, dass jeder Zerlegung der vier Punkte in zwei Paare eine Zerlegung der vier Ebenen in zwei Paare rational entspricht.

Correspondirt nun z. B. der Ebenenzerlegung (I, II) (III, IV) die Punktzerlegung (1, 2) (3, 4), so heissen die Paare (I, II) und (1, 2), ebenso die Paare (III, IV) und (3, 4) bez. K „conjugirt".

Ein (der Fläche gleichzeitig ein- und umbeschriebenes) Tetraeder, für welches je zwei seiner Ebenen und die beiden Eckpunkte, welche ihre Durchschnittskante enthält, in Bezug auf K conjugirt sind, heisst ein „ausgezeichnetes" Tetraeder. Solcher giebt es fünffach unendlich viele. Ein ausgezeichnetes Tetraeder steht zu den vier Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$, d. h. den „elliptischen Liniencoordinaten" einer Geraden (x_i), in engster Beziehung.

Man kann von den Elementen eines ausgezeichneten Tetraeders eine Ebene (d. h. als Ebene von K), ferner auf der Durchschnittscurve derselben mit K drei Ecken des Tetraeders beliebig wählen, dann aber ist das Tetraeder vollständig und eindeutig bestimmt und mittels conjugirter Paare einfach construirbar.

Aus derartigen Tetraedern setzen sich complicirtere Configurationen zusammen, die ebenfalls der Kummer'schen Fläche zugleich ein- und umbeschrieben sind. Unter den Gebilden dieser Art spielt eine besondere Rolle eine gewisse Configuration $(16)_6$, die von den Doppelpunkten und Doppelebenen je einer neuen Kummer'schen Fläche K' gebildet wird, welche der ursprünglichen in merkwürdiger Art zugeordnet sind. Jedes Tetraeder, welches man aus den Ebenen und Ecken der genannten Configuration bilden kann, ist ein bez. K ausgezeichnetes Tetraeder.

Irgend eine Ebene I der Configuration schneidet K in einer C_4 mit Doppelpunkt und berührt K' längs eines Kegelschnitts, welcher durch den genannten Doppelpunkt der C_4 hindurchgeht. Die sechs weiteren Schnittpunkte beider Curven sind sechs Doppelpunkte von K'. Zwischen den beiden Kummer'schen Flächen K und K' besteht geradezu volle Gegenseitigkeit.

Als hyperelliptische Integrale, welche der transcendenten Behandlung der Kummer'schen Fläche zu Grunde gelegt werden, dienen die beiden:

$$w_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \qquad w_2 = \int \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

wo

$$f(\lambda) = (\lambda - x_1)(\lambda - x_2) \ldots (\lambda - x_6)$$

ist. w_1 und w_2 werden auf der zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehörigen zweiblättrigen Riemann'schen Fläche hinerstreckt: als untere Grenze nimmt man am besten einen der sechs Verzweigungspunkte, etwa x_6. Man hat dann für jedes der beiden Integrale die fünf Perioden

$$P_i = 2\int_{x_6}^{x_i} dw, \quad \text{wo} \quad \Sigma P_i = 0.$$

Es empfiehlt sich aber, neben jener zweiblättrigen Fläche

zweite 32-blättrige, zu der Proportion

$$\sqrt{\lambda - x_1} : \sqrt{\lambda - x_2} : \ldots : \sqrt{\lambda - x_6}$$

gehörige Fläche einzuführen. Die Integrale w werden hierbei von der Form $w = \int_{\sqrt{x_6 - x_i}}^{\sqrt{\lambda - x_i}} dw$, wo, wie ein für allemal bemerkt sei, die Vorzeichen der Quadratwurzeln geeignet zu normiren sind.

Jedem Punktquadrupel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ der 32-blättrigen Fläche entspricht eine bestimmte Raumgerade, nämlich die, welche die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ zu elliptischen Coordinaten besitzt; umgekehrt jeder Geraden (wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzeln) 32^3 Punktquadrupel der Fläche.

Diese Festsetzung stattet zugleich eine Raumgerade mit vier Paaren transcendenter Parameter aus, nämlich

$$w_\alpha = \int_{\sqrt{x_6 - x_i}}^{\sqrt{\lambda_\alpha - x_i}} dw \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

(zu denen noch Perioden hinzutreten können): umgekehrt ist durch ein solches System transcendenter Parameter eine Raumgerade eindeutig bestimmt.

Für $\lambda_3 = \lambda_4$ erhält man eine Tangente der Kummer'schen Fläche, für $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ eine Haupttangente, für $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4$ eine Gerade durch einen Doppelpunkt oder in einer der Doppelebenen u. s. w. Im Falle einer Tangente sollen die beiden ungleichen Parameterpaare w_1, w_2 speciell u', u'' genannt werden. Dann erteilt man zweckmässig dem Berührungspunkte von K die Parameter

$$U_1 = u_1' - u_1'', \qquad U_2 = u_2' - u_2''$$

und der Berührungsebene die Parameter

$$(U_1) = u_1' + u_1'', \qquad (U_2) = u_2' + u_2'',$$

(während bei der Drehung der Tangente in der Ebene um den Punkt das Parameterpaar $w_3 = w_4$ successive andere und andere Werte annimmt). Umgekehrt gehört zu jedem Wertsysteme der U_1, U_2 resp. der $(U_1), (U_2)$ immer nur ein Punkt bez. eine Ebene der Fläche.

Zunächst werden jetzt mit Hülfe der neuen Parameter die hyperelliptischen Curven C_4 (von Geschlecht Zwei) studirt, welche die Tangentialebenen von K aus der Fläche ausschneiden, und die sich auf die zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehörige zweiblättrige Fläche eindeutig beziehen lassen. An einer solchen C_4 werden die Integrale $w = \int\limits_{x_4} dw$ hinerstreckt, und das Abel'sche Theorem für Schnitte mit Geraden (und Kegelschnitten) aufgestellt.

Daraus lässt sich das entsprechende Theorem für den Schnitt von K mit einer Geraden entnehmen.

Man kann damit ferner die Congruenzen angeben, denen die Parameter einer Geraden genügen müssen, damit sie durch einen festen Punkt U von K hindurchgeht, u. s. w. Conjugirte Punkte und Ebenen sind jetzt dargestellt durch

$$(U),\ (U)+2w_1+2w_2; \qquad (U)+2w_1,\ (U)+2w_2.$$

Nunmehr bietet die transcendente Darstellung und Behandlung der früheren Configurationen keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr, und die daran anschliessenden Verallgemeinerungen drängen sich geradezu mit Notwendigkeit auf. My.

P. Röhrich. Ueber eine besondere Fläche vierter Ordnung und deren Hesse'sche Fläche. Pr. Ritter-Akad. Liegnitz. 19 S. 4°.

Die fragliche Fläche wird gebildet durch die Gesamtheit aller Geraden, welche zwei gegebene windschiefe Geraden so schneiden, dass der zwischen diesen liegende Abschnitt eine constante Länge hat. Da die Fläche auch erzeugt werden kann durch die Gesamtheit aller Geraden, welche ausser zwei festen Geraden noch eine Ellipse treffen, deren Mittelpunkt im kürzesten Abstand dieser beiden Geraden liegt und deren Ebene denselben parallel ist, so kann sie zur Illustration der schon von Salmon und Cayley gegebenen Sätze über Regelflächen mit drei Leitlinien dienen.

R. M.

W. S. M'Cay, P. H. Schoute. Solution of question 8840. Ed. Times XLVII. 40.

Für die vier Schnittpunkte einer Geraden mit den Seitenflächen eines festen Tetraeders construire man das Centrum der mittleren Entfernungen. Wenn die Gerade parallel mit sich im Raume verschoben wird, so ist der Ort dieses Centrums eine Ebene. Sind ferner A, B, C, D die Inhalte der vier Seitenflächen des Tetraeders, so ist bei beliebig gewählter Richtung der Geraden die von allen zugehörigen Ebenen eingehüllte Fläche die Steiner'sche Römerfläche:

$$\sqrt{Ax}+\sqrt{By}+\sqrt{Cz}+\sqrt{Dw}=0.$$ Lp.

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of question 5955. Ed. Times XLVII. 69-70.

Unter einem räumlichen Cartesischen Ovale möge eine Curve verstanden werden, welche der Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen ist, die durch zwei ebene Cartesische Ovale mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte beschrieben werden. Umgekehrt, wenn zwei Punkte gefunden werden können, deren Abstände von jedem beliebigen Punkte eines räumlichen Cartesischen Ovals lineare Functionen von einander sind, so sollen sie Brennpunkte heissen. Der Ort solcher Brennpunkte ist eine ebene Curve dritten Grades. Lp.

Franz Meyer. Ueber die mit der Erzeugung der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species verknüpften algebraischen Processe. Math. Ann. XXIX. 447-457.

Dieser Aufsatz beschäftigt sich erstens mit denjenigen rationalen Ebenenbüscheln, welche perspectiv zu einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung R_4 sind, und zweitens mit denjenigen rationalen Curven, welche perspectiv zu den Schmiegungsebenen der R_4 liegen. Der Herr Verfasser nennt solche zur Construction der R_4 verwendbaren Ebenenbüschel (resp. die von ihnen eingehüllten Curven) und Curven „erzeugende Curven“ der R_4.

Sind die Coordinaten der R_4 als Functionen vierten Grades

eines Parameters λ gegeben in:

$$\varrho x_i = \overset{4}{f_i(\lambda)} = a_{i0} + a_{i1}\lambda + \cdots + a_{i4}\lambda^4 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

und hat man drei von einander linear unabhängige zu R_4 perspective Ebenenbüschel (Klassencurven) der Ordnung ν_1, ν_2, ν_3 in

$$\sigma u_i = \overset{\nu_1}{\varphi_i(\mu)}, \qquad \sigma u_i = \overset{\nu_2}{\psi_i(\mu)}, \qquad \sigma u_i = \overset{\nu_3}{\chi_i(\mu)},$$

so muss zunächst $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geqq 4$ sein, und folgende Gleichungen müssen bestehen:

$$\Sigma_i \overset{4}{f_i(\lambda)}\, \overset{\nu_1}{\varphi_i(\mu)} \equiv (\lambda - \mu)\, \Phi(\lambda^3, \overset{\nu_1-1}{\mu}),$$

$$\Sigma_i \overset{4}{f_i(\lambda)}\, \overset{\nu_2}{\psi_i(\mu)} \equiv (\lambda - \mu)\, \Psi(\lambda^3, \overset{\nu_2-1}{\mu}),$$

$$\Sigma_i \overset{4}{f_i(\lambda)}\, \overset{\nu_3}{\chi_i(\mu)} \equiv (\lambda - \mu)\, X(\lambda^3, \overset{\nu_3-1}{\mu}),$$

wobei Φ, Ψ, X unbekannte ganze Functionen von λ und μ sind.

Wendet man diese Gleichungen an zur Bestimmung der Functionen φ_i, so findet man: „Die Coefficienten der ganzen Functionen $\varphi_i(\mu)$, welche eine zur R_4 perspectiv liegende rationale Curve P_ν ν^{ter} Klasse darstellen, bilden eine $\infty^{3\nu-2}$ lineare Schar."

Nun wird gezeigt, dass alle zur R_4 perspectiven Klassencurven sich durch drei derselben bilden lassen, für welche $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\nu_3 = 2$ ist, und das Resultat in folgender Weise ausgesprochen:

„Ist ν irgend eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., so sind sämtliche zur R_4 perspectiven Klassencurven P_ν geliefert durch die Formel:

$$\sigma u_i = \overset{\nu}{\omega_i(\mu)} = \overset{\nu-1}{\alpha(\mu)}\overset{1}{\varphi_i(\mu)} + \overset{\nu-1}{\beta(\mu)}\overset{1}{\psi_i(\mu)} + \overset{\nu-2}{\gamma(\mu)}\overset{2}{\chi_i(\mu)},$$

wo die φ_i, ψ_i, χ_i irgend drei Systeme ganzer Functionen sind, welche die obigen Identitäten befriedigen, dagegen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ willkürliche ganze Functionen bedeuten."

Es wird nun übergegangen zur Berechnung der zur R_4 perspectiven Ebenenbüschel erster und zweiter Ordnung. Zu diesem Zwecke werden folgende Bezeichnungen eingeführt. Die Determinante:

$$|f_i(\lambda), f_i(\lambda_1), f_i(\lambda_2), f_i(\mu)| \quad \text{wird gleich} \quad F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$$

und

$$\frac{F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda-\mu)(\lambda_1-\mu)(\lambda_2-$$

für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ gleich δ_{λ^4} gesetzt.

Dann findet der Herr Verfasser:

„Man entwickle die Form $\frac{1}{\lambda_2-\mu} F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2,$

$f_i(\lambda)$ in die Summe $\sum_1^4 {}_i f_i(\lambda) Q_{i_{\lambda_2^3}}$, dann sind die zu

tiven Ebenenbüschel P_1 dargestellt durch

$$\sigma u_i = \overset{1}{\varphi_i}(\mu) = \frac{(Q_{i_{\lambda_2^3}}, \delta_{\lambda_2^4})^3}{(\lambda_2-\mu)(\lambda_1-\mu)},$$

wo im Zähler die dritte Ueberschiebung der beiden

gesetzten Ausdrücke steht."

Für die zur R_4 perspectiven Ebenenbüschel zwe

werden mehrere Formen bestimmt, von welchen d

durch folgenden Satz gebildet wird:

„Setzt man $\lambda_1+\lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ und entwi

$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\mu)(\lambda_2-\mu)$ dividirte Grundform $F(\lambda, \lambda_1$

Potenzen und Producten der σ

$$F(\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu) \equiv \sum\sum Q_{ik}\sigma_i\sigma_k \equiv Q_{\sigma^2},$$

bildet sodann die zweite Ueberschiebung von Q_{σ^2} ü

ganz willkürlichen Coefficienten r_{ik} behaftete Form

$$(Q_{\sigma^2}, u_{r^2})^2 \equiv (\overset{1}{f_i}(\lambda), \overset{2}{\mu}) \equiv \sum_1^4 {}_i f_i(\lambda) \overset{2}{\chi_i}(\mu),$$

so stellen die Gleichungen

$$\sigma u_i = \overset{2}{\chi_i}(\mu)$$

die Tangentenebenen der vierfach linearen Schar v

den zur R_4 perspectivisch liegenden Kegel zweiter O

Weiterhin werden die R_4 erzeugenden Ordnun

tersucht auch für den Fall, dass R_4 eine Inflexions-

tangente besitzt. Zum Schlusse der Abhandlung w

braische Charakter der behandelten Aufgabe scharf he

A. SCHMITZ. Ueber eine bemerkenswerte Raumcurve fünfter Ordnung. Pr. Neuburg a. D., Diss. München. 58 S. 8°.

In seiner Geometrie der Lage bezeichnet Hr. Reye die von allen Punkten des Raumes auf ihre Polarebenen in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung gefällten Lote als die Axen dieser Fläche und spricht ohne Beweis den Satz aus, dass die Fusspunkte der durch einen Punkt P gehenden Axen eine Raumcurve fünfter Ordnung erfüllen. Mit dieser C_5 beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Zunächst werden ihre Gleichungen aufgestellt (die Coordinaten eines Curvenpunktes sind rationale Functionen eines Parameters) und nach den Plücker-Cayley'schen Formeln ihre Charaktere bestimmt. Aus den Gleichungen wird die Beschaffenheit der C_5 discutirt (P ist ein reeller dreifacher Punkt der C_5, die drei Tangenten in ihm stehen aufeinander senkrecht, ein anderer vielfacher Punkt existirt nicht, im Unendlichen liegt ein einziger Punkt) und ihr Verlauf ermittelt. Bei speciellen Lagen des Punktes P wird die Curve reductibel. Ist die Fläche zweiter Ordnung ein Paraboloid oder eine Rotationsfläche, so ergeben sich einige Vereinfachungen resp. Abänderungen. Eine Anzahl von Flächen dritter und vierter Ordnung, auf denen die C_5 liegt, wird namhaft gemacht und insbesondere in Bezug auf singuläre Punkte und gerade Linien genauer untersucht. Die bisher auf analytischem Wege erhaltenen Resultate lassen sich auch durch synthetische Betrachtungen finden. Der geometrische Ort der C_5, welche einem beliebigen Punkte P auf einem bestimmten Durchmesser der Fläche zweiter Ordnung entspricht, ist eine Fläche fünfter Ordnung. Zuerst synthetisch und dann analytisch werden deren singuläre Punkte, gerade Linien und Kegelschnitte ermittelt, sowie die gegenseitige Lage der sie erzeugenden C_5 bestimmt. Nachdem nunmehr die Coordinaten eines Punktes der Fläche fünfter Ordnung als rationale Functionen zweier Parameter λ, μ dargestellt sind, wird die Fläche auf eine Ebene mit den Coordinatenaxen λ, μ abgebildet. Anhangsweise giebt der Verf. neue Beweise für einige bekannte Sätze über rationale Curven. F.

K. Fink. Ueber windschiefe Flächen im allgemeinen und insbesondere über solche des sechsten Grades. Correspondenzbl. f. d. Gelehrten- und Realsch. Württ., auch sep. Diss. Tübingen. 30 S. 8°.

Der Verf. giebt eine Klassification der windschiefen Flächen sechsten Grades in Bezug auf ihr Geschlecht und die Beschaffenheit ihrer Doppelcurve im Anschluss an die Schwarz'sche Arbeit über die geradlinigen Flächen fünften Grades (J. für Math. LXVII). Zunächst wird das Maximum des Geschlechtes einer windschiefen Fläche beliebigen Grades durch Ermittelung der Anzahl der Doppelpunkte derjenigen Curve bestimmt, welche eine zwei erzeugende Gerade enthaltende Ebene ausschneidet. Für jede mögliche Beschaffenheit des irreductiblen Bestandteils dieser Curve wird im Falle einer Fläche sechsten Grades das Geschlecht, die Ordnung der Doppelcurve und die Erzeugung als geometrischer Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier aufeinander bezogenen Curven angegeben. Es folgen einige algebraische Untersuchungen über windschiefe Flächen beliebiger Ordnung, über die sechster Ordnung vom Geschlecht Null (Ordnung und Geschlecht der Doppelcurve, Anzahl der dreifachen Punkte) und über specielle Flächen sechster Ordnung vom Geschlecht 1. F.

V. Jamet. Sur les surfaces et les courbes tétraédrales symétriques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. Supplém. 3-78.

Mit dem Namen surface tédraédrales symétriques hat de la Gournerie Flächen bezeichnet, welche in den tetraedrischen Coordinaten α, β, γ, δ durch Gleichungen von der Form

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m+\left(\frac{\beta}{b}\right)^m+\left(\frac{\gamma}{c}\right)^m+\left(\frac{\delta}{d}\right)^m=0$$

definirt werden, wo a, b, c, d Constante sind. Er hat in den Jahren 1865—66 der Pariser Akademie drei Abhandlungen über diese [illegible] eingereicht und dabei auch die analogen ebenen Curven [illegible] die er triangular nennt, sowie solche Raumcurven [illegible] zweier tetraedrischen Flächen mit

gleichen Exponenten m bilden. Der Herr Verfasser setzt diese Untersuchungen nun nach anderen Gesichtspunkten fort, namentlich dadurch, dass er gewisse Infinitesimaleigenschaften in Betracht zieht. Im ersten Teile untersucht er die Krümmung der Flächen und der triangulären Curven, über welche er ein interessantes Theorem aufstellt. Uebrigens ist seine Betrachtungsweise eine sehr verallgemeinerte, so dass er das erhaltene Resultat auch auf Flächen und ebene Curven ausdehnt, deren Gleichungen sind

$$L_1^{a_1} L_2^{a_2} L_3^{a_3} L_4^{a_4} = A, \qquad L_1^{a_1} L_2^{a_2} L_3^{a_3} = A,$$

wo die L lineare Functionen der Coordinaten sind, A eine Constante bedeutet, und die Summe der vier oder drei constanten Exponenten a gleich Null ist. Diese Curven und Flächen sind von den Herren F. Klein und S. Lie von einem anderen Gesichtspunkte aus untersucht (C. R. LXX, F. d. M. II. 1870. 632).

Für die triangulären Curven ergiebt sich der Satz: Der Kegelschnitt, welcher dem Dreieck des Systems umschrieben ist und die trianguläre Curve in einem Punkte P berührt, hat in P einen Krümmungsradius, welcher zu demjenigen der Curve in P in einem constanten Verhältnis steht.

Im zweiten Teile wird eine analoge Eigenschaft der tetraedralen Raumcurven begründet, bei welcher statt der berührenden Kegelschnitte osculirende Raumcurven dritter Ordnung auftreten. Auch werden daselbst die singulären Punkte der triangulären Flächen untersucht, und es werden die zu der Curve gehörigen Abel'schen Integrale erster Ordnung auf einfache Typen reducirt, so dass man entscheiden kann, in welchen Fällen dieselben auf Elementarfunctionen oder auf elliptische Integrale führen. Zuletzt werden in diesem Abschnitte einige trianguläre Curven dritter und vierter Ordnung specieller betrachtet, wodurch sich ein neuer Beweis eines von den Herren Bonnet und Beltrami und vom Herrn Verfasser selbst bereits bewiesenen Satzes ergiebt.

Im dritten Teil werden die asymptotischen Linien der tetraedralen Fläche behandelt. Dieselben sind zwar bereits bekannt. D[illegible] Herr Verfasser geht aber auf dieselben ein, weil er die

Untersuchung in Verbindung bringt mit der
Untersuchung bei Flächen, deren Gleichung ist

$$(c) \qquad f_1(L, M) = f_2(N, P),$$

in welcher L, M, N, P lineare Functionen der Coo
und f_1 und f_2 homogene Functionen desselben Gr
Hierbei wird der Herr Verfasser zu einer neuen T
geführt, welche mit Hülfe eines Integrales $\int \frac{dt}{T^2}$ au
wo T eine Function von t ist, welche von der obi
abhängt. Wendet man diese Transformation auf di
Flächen an, so kommt man auf folgende Integrale

$$\int \frac{dt}{1+t^\mu} \quad \text{und} \quad \int \frac{dt}{(1+t^\mu)^{\frac{2}{\mu}}},$$

und es zeigt sich, dass die Differentiale rational ge
können, wenn μ von der Form $\pm \frac{4}{2\varkappa+1}$ ist.

Auch in diesem Teile wird zum Schluss der
betrachtet, wo die Fläche (c) vom vierten Grade ist
die transformirte Fläche ebenfalls in Betracht gez

Dies ist im wesentlichen die Inhaltsangabe
Herr Verfasser selbst der umfangreichen Arbeit v
hat. Auf das Detail der Rechnung kann hier nich
werden.

G. Pirondini. Sur les hélicoïdes. Nouv. Ann.

Unter einem Helikoid versteht der Herr Ve
einem jetzt wohl allgemein angenommenen Sprachg
Schraubenfläche im weitesten Sinne des Wortes, als
welche von einer Curve beschrieben wird, die si
artig um eine Axe bewegt. Die Coordinaten ei
Punktes derselben können folgendermassen darge
Es seien u und v zwei beliebige Variable, ϱ und
von u, p eine Constante, der sogenannte Paramete
benbewegung, dann ist

$$x = \varrho\cos(u+v), \quad y = \varrho\sin(u+v), \quad z = \zeta$$

Die Linien $v =$ const. geben die erzeugende Curve in ihren verschiedenen Lagen an, die Linien $u =$ const. sind die von den einzelnen Punkten der Erzeugenden beschriebenen Schraubenlinien. Ist die Erzeugende eine Gerade, so ist die Strictionslinie der Fläche eine Schraubenlinie, welche beschrieben wird von dem Punkte der Erzeugenden, der den kleinsten Abstand von der Axe hat. Von diesen durch Gerade erzeugten Schraubenflächen sind drei Arten besonders ausgezeichnet, die durch die Tangente, die Binormale und die Hauptnormale einer Schraubenlinie erzeugt werden, von denen die erste abwickelbar ist, während die beiden anderen windschief sind; die letzte ist die gewöhnliche Schraubenfläche und kommt in der Arbeit nicht in Betracht.

Mit Hülfe einfacher Betrachtungen entwickelt nun der Herr Verfasser einige Sätze über die Schraubenflächen, von denen die folgenden hervorgehoben werden mögen:

Die Bedingung dafür, dass die Erzeugende asymptotische Linie ist (selbstverständlich in jeder Lage), ist ausgedrückt durch die Differentialgleichung

$$\zeta''\varrho\varrho' + \zeta'(\varrho^2 - \varrho\varrho'') - p(\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'') = 0.$$

Die Accente bedeuten Differentiationen nach u. Ist ϱ beliebig gegeben, so ist ζ durch Quadraturen bestimmt.

Sind die Schraubenlinien asymptotische Linien, so wird die Fläche durch die Binormale einer Schraubenlinie erzeugt.

Die Linien, welche bei einer Schraubenbewegung mit dem Parameter p um die z-Axe geodätisch und orthogonal zu den durch ihre Punkte beschriebenen Schraubenlinien bleiben, sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\xi = \varrho \cos u, \quad \eta = \varrho \sin u, \quad \zeta = -\frac{1}{p}\int \varrho^2 du.$$

Die einzigen Rotationsflächen, auf welchen eine Loxodromie eine Schraubenlinie ist, deren Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, sind Kegel und Cylinder.

Es giebt auf einem Cylinder, dessen senkrechter Querschnitt eine logarithmische Spirale ist, solche Linien, die bei einer

Schraubenbewegung um die Spiralaxe geodätisch und orthogonal zu den Schraubenlinien bleiben; dieselben haben die Gestalt von Parabeln, welche auf die cylindrische Fläche aufgewickelt sind.

Damit die Erzeugenden orthogonale Trajectorien eines Systems geodätischer Linien seien, muss sein

$$(\varrho^2+\varrho'^2+\zeta'^2)(p^2+\varrho^2)-(\varrho^2+p\zeta')^2 = a^2(\varrho^2+\varrho'^2+\zeta'^2),$$

woraus sich ζ durch Quadratur bestimmen lässt. Von diesem Resultat wird noch eine specielle Anwendung auf gewisse Rotationsflächen gemacht.

Endlich wird von einer Schraubenfläche, deren Erzeugende ein Kreis ist, dessen einer Durchmesser auf die Rotationsaxe fällt, und dessen Radius $= p$ ist, bewiesen, dass die orthogonalen Trajectorien der Kreise geodätische Linien sind. A.

M. Pieri. Intorno alle superficie elicoidali. Genova G. 66-78.

Der Verfasser wendet die klassischen Formeln der infinitesimalen Geometrie auf die Schraubenflächen (Helikoide) an, welche er auf ihre Schraubenlinien und ihre Meridianprofile bezogen annimmt. Unter Voraussetzung einer verticalen Axe beweist er leicht:

„Die Tangenten an den asymptotischen Linien, welche durch einen Punkt P der Oberfläche gehen, sind harmonisch conjugirt in Bezug auf die Schraubenlinie und auf die Linie stärksten Falles der Fläche, welche beide durch P gehen. Die abwickelbaren Helikoide sind die einzigen schraubenförmigen Oberflächen, welche die Niveaulinien und die Linien stärksten Falles zu Krümmungslinien haben. Unter den schraubenförmigen Flächen besitzen nur die abwickelbaren die Linien stärksten Falles als geodätische Linien; dagegen sind diejenigen, welche die Linien stärksten Falles zu Krümmungslinien haben, nicht bloss die abwickelbaren, sondern auch die Minimalflächen.“ Durch ein ähnliches Verfahren kommt der Verf. zur Bejahung der Frage: „Giebt es Schr[illegible]chen, bei [illegible] die senkrechten Trajectorien der [illegible]odätische [illegible] sind?“ Die von ihm aufge-

stellten Formeln, welche zur Darstellung dieser Flächen dienen, enthalten elliptische Integrale. Durch Benutzung der gewöhnlichen Methoden findet der Verf. danach die Schraubenflächen, welche sich auf andere analoge Flächen derartig abwickeln lassen, dass die Profile der beiden Flächen entsprechende Linien sind; ihre Bestimmung hängt auch von elliptischen Integralen ab.

Durch Beziehung der untersuchten Oberflächen auf die Profile und auf die Niveaulinien sucht der Verf. endlich diejenigen Helikoide auf, welche auf andere Oberflächen gleicher Art so bezogen werden können, dass die Linien stärksten Falls entsprechende Linien sind; er gelangt zu dem Schlusse, dass der einzige Fall, in welchem das vorkommt, bei einem abwickelbaren Helikoide eintritt, welches sich auf ein anderes so legen lässt, dass die Geraden des ersten auf die des zweiten fallen.

La. (Lp.)

F. Schiffner. Die sphärische Schleifenlinie. Hoppe Arch. (2) V. 160-171.

Wenn ein orthogonales Axensystem (der x, y, z) gleichzeitig mit gleicher Geschwindigkeit um zwei Axen (der x und z) rotirt, so beschreibt ein Punkt $y = r$ auf der dritten Axe eine 8-förmige sphärische Curve C, welche hier sphärische Schleifenlinie heisst. Ihre Gleichungen in Bezug auf die anfängliche Axenlage sind:

$$x = r \sin\alpha \cos\alpha, \quad y = r \cos^2\alpha, \quad z = r \sin\alpha.$$

Es werden ihre Eigenschaften und die der miterzeugten Gebilde und Projectionen entwickelt. Unter anderm ist C Schnitt von vier Flächen zweiten Grades; die stereographische Projection von C für das Centrum $(0r0)$ ist eine gleichseitige Hyperbel.

H.

E. Oekinghaus. Ueber die Pseudosphäre. Hoppe Arch. (2) V. 217-218.

Ist (x_1, y_1) der Fusspunkt der Senkrechten, die vom Endpunkte der Ordinate eines beliebigen Punktes (x, y) der Ketten-

linie $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ auf die Tangente in diesem Punkte gefällt ist, und wird die Kettenlinie um die x-Axe gedreht, so beschreibt die Curve der Punkte (x_1, y_1) eine Fläche, die mit der Beltrami'schen Pseudosphäre identisch ist. Schg.

E. Liebheit. Ueber die Dupin'sche Cyklide. Diss. Halle. 38 S. 8°.

K. Simon. Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme und die Flächen $\Sigma r_n =$ const. Diss. Halle. 45 S. 8°.

A. Kadesch. Ueber die Einhüllungsflächen von Potenzebenenscharen. Diss. Marburg. 33 S. 4°.

A. G. Greenhill. Sumner lines on Mercator's chart. Mess. (2) XVI. 162-167.

Eine Sumner-Linie ist das Bild eines Kleinkreises auf der Kugel in der Mercator'schen Karte. In dem vorliegenden Aufsatze betrachtet der Verf. die Form der Sumner-Linien nach analytischer Methode. Es wird ermittelt, dass die Bogen der Sumner-Linien elliptische Integrale erster Gattung sind.

Glr. (Lp.)

G. Darboux. Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima. C. R. CIV. 728-733.

In einer frühern Mitteilung (C. R. CII. 1513-1517, F. d. M. XVIII. 1886. 778) hatte der Herr Verfasser ein bekanntes Problem über die Minimalflächen auf zwei Arten gelöst und auf eine dritte Lösung hingewiesen, welche auf einer von Herrn Ribaucour (Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. Brux. Mém. cour. in 4°. XLV, F. d. M. XIV. 1882. 708) angegebenen Erzeugung dieser Flächen beruht. Mit dieser dritten Lösung beschäftigt sich die vorliegende Note.

Herr Lie erzeugt bekanntlich allgemein die Minimalflächen dadurch, dass er auf zwei Minimalcurven (das sind Curven, deren Bogendifferential Null ist) Γ und Γ_1 zwei beliebige Punkte M und M_1 verbindet und die Verbindungslinie halbirt. Der Ort des Halbirungspunktes ist die Minimalfläche, deren Tangentialebene in μ den Tangenten der Minimalcurven in M und in M_1 parallel ist.

Die Erzeugung, welche Herr Ribaucour gegeben hat, ist die folgende: Es seien gegeben zwei abwickelbare Flächen, welche durch den unendlich entfernten Kugelkreis gehen. Man construire eine gemeinsame Tangente beider und errichte in der Mitte zwischen beiden Berührungspunkten, im Punkte β, eine auf der Tangente lotrechte Ebene. Die Eingehüllte dieser Ebene ist die allgemeinste Minimalfläche. Der Ort der Punkte β wird Mittelfläche (surface moyenne) genannt.

Herr Darboux erwähnt nun zunächst noch folgenden Satz:

Wenn man durch eine Erzeugende einer Regelfläche die beiden Tangenten an den unendlich entfernten Kugelkreis legt, so erhält man zwei Tangentialebenen der Regelfläche, deren Berührungspunkte auf der Erzeugenden liegen. Der Halbirungspunkt der Strecke zwischen diesen beiden Berührungspunkten ist der Centralpunkt (Strictionspunkt) der Erzeugenden, und die Strecke selbst ist der mit $2i$ multiplicirte Verteilungsparameter; dieser Satz gestattet eine Folgerung in Bezug auf das oben besprochene Strahlensystem, die bereits von Herrn Ribaucour herrührt; und diese Folgerung benutzt Herr Darboux, um das von ihm früher gelöste Problem in folgender Weise zu lösen:

„Um alle Minimalflächen zu erhalten, welche einer gegebenen abwickelbaren Fläche eingeschrieben sind, bestimme man alle Regelflächen, deren Erzeugende normal auf den Ebenen von $\varDelta$ sich befinden, und für welche der Centralpunkt jeder Erzeugenden in der entsprechenden Ebene von $\varDelta$ liegt. Die Rückkehrkanten der beiden abwickelbaren Flächen, welche jeder dieser Regelflächen und dem unendlich entfernten Kugelkreise umschrieben sind, sind die beiden Minimalcurven (Γ), (Γ_1), mit deren Hülfe man die entsprechende Minimalfläche wie oben erzeugen kann.“

Die hier angedeutete Construction wird nun analytisch genauer durchgeführt. A.

J. Weingarten. Ueber die durch eine Gleichung von der Form $\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=0$ darstellbaren Minimalflächen. Gött. N. 272-275.

Die im Titel bezeichneten Minimalflächen sind von Herrn H. A. Schwarz (Fortgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen, Berl. Ber. 1872, 3-27) besprochen. In der angeführten Gleichung sind $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, von denen die eine nur von z abhängt. Herr Weingarten beweist in der vorliegenden Note, dass die von Herrn Schwarz gefundene Klasse von Flächen die einzige Klasse von Minimalflächen ist, deren Gleichung in die angegebene Form gebracht werden kann. A.

E. Goursat. Sur la théorie des surfaces minima. C. R. CV. 743-746.

Herr Lie hat den Zusammenhang der Theorie der Minimalflächen mit der der Minimalcurven aufgedeckt, d. h. derjenigen Curven, deren Tangenten den unendlich entfernten Kugelkreis schneiden, oder deren Bogenelement Null ist. Es geht unter anderem aus seinen Betrachtungen hervor, dass einer gegebenen Minimalcurve eine einzige, vollständig bestimmte Minimalfläche entspricht. Unterwirft man die Minimalcurve einer reellen Verrückung, so erleidet die Minimalfläche ebenfalls nur eine reelle Verrückung. Erleidet aber die Minimalcurve eine imaginäre Verrückung, so verändert die Minimalfläche ihre Gestalt. Diesen Vorgang macht nun der Herr Verfasser zum Gegenstande einer genaueren Untersuchung, und er stellt die Gesetze der Verwandtschaft auf, welche zwischen derartigen Minimalflächen auftreten. Hierbei zeigt sich die Vereinfachung, dass jede imaginäre Drehung sich zusammensetzt aus einer imaginären Drehung um eine reelle Axe und aus einer reellen Drehung. Man kann sich des-

halb bei der Betrachtung der Drehungen auf die erstgenannte Art beschränken. Diese Transformation wird unter Zugrundelegung der Weierstrass'schen Darstellung der Minimalflächen durchgeführt und näher untersucht. A.

P. Appell. Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux. American J. X. 175-186.

Wenn man eine Fläche sucht, welche so beschaffen ist, dass jedes unendlich dünne Bündel ihrer Normalen eine Kugel in zwei gleich grossen Flächenstücken durchschneidet, so findet man, dass die senkrechte Projection des Mittelpunktes O dieser Kugel auf jede Normale sich in der Mitte zwischen beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten befinden muss. Ist umgekehrt diese letztere Bedingung erfüllt, so wird jede Kugel mit dem Mittelpunkte O von einem unendlich dünnen Normalenbündel der Fläche in zwei gleichen Flächenstücken geschnitten. Dies hat der Herr Verfasser in seiner Abhandlung Sur les déblais et remblais (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences XXIX. No. 3 p. 133-137) gezeigt.

Diese Flächen, welche in einem bemerkenswerten Zusammenhange mit den Minimalflächen stehen, werden in der vorliegenden Arbeit eingehend untersucht. Als Parameter werden nach Darboux folgende complexe Grössen s und s_0 eingeführt. Sind α, β, γ die Richtungscosinus der Normalen einer Fläche, also zugleich die Coordinaten der Abbildung des Flächenpunktes auf die Gauss'sche Kugel, dann ist $\alpha^2+\beta^2 = 1-\gamma^2$, und man setzt

$$(1) \qquad \frac{\alpha+\beta i}{1-\gamma} = \frac{1+\gamma}{\alpha-\beta i} = s, \qquad \frac{\alpha-\beta i}{1-\gamma} = \frac{1+\gamma}{\alpha+\beta i} = s_0,$$

so dass jedem complexen Werte s eine gewisse imaginäre (punktirte) Gerade der einen Schar auf der Gauss'schen Kugel entspricht, jedem s_0 eine Gerade der zweiten Schar.

Man findet dann leicht

$$\text{(II)} \qquad \alpha = \frac{s+s_0}{1+ss_0}, \quad \beta = \frac{i(s_0-s)}{1+ss_0}, \quad \gamma = \frac{ss_0-1}{1+ss_0}.$$

Sollen α, β, γ reell sein, so müssen s und s_0 conjugirt sein, und umgekehrt.

Die Gleichung der Tangentialebene der Fläche ist

$$\text{(III)} \qquad x(s+s_0)+iy(s_0-s)+z(ss_0-1)=v(ss_0+1)=u,$$

wo v den Abstand der Tangentialebene von O bedeutet.

Ist u als Function von s und s_0 gegeben, so findet man die Fläche als Enveloppe der mit s und s_0 variirenden Ebene (III); mithin sind die Coordinaten des Flächenpunktes folgendermassen dargestellt:

$$\text{(IV)} \qquad x+iy = \frac{\frac{\partial u}{\partial s_0}+su-s^2\frac{\partial u}{\partial s}}{1+ss_0},$$

$$x-iy = \frac{\frac{\partial u}{\partial s}+s_0u-s_0^2\frac{\partial u}{\partial s_0}}{1+ss_0}, \qquad z = \frac{-u+s\frac{\partial u}{\partial s}+s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}}{1+ss_0}.$$

Irgend zwei verschiedenen Functionen u und u_1 entsprechen zwei verschiedene Flächen, welche durch die Parameter s und s_0 in der Art auf einander abgebildet sind, dass in entsprechenden Punkten die Normalen beider Flächen gleich gerichtet sind. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, die Differentialgleichungen der Krümmungslinien und der asymptotischen Linien, die Hauptkrümmungsradien und die Coordinaten der Hauptkrümmungsmittelpunkte darzustellen, sowie diejenigen des Punktes, der in der Mitte zwischen beiden liegt; sie seien X, Y, Z. Soll nun die Fläche Σ die oben besprochene Eigenschaft haben, so muss $X'\alpha+Y'\beta+Z'\gamma=0$ sein. Hieraus ergiebt sich für u die Differentialgleichung

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}(1+ss_0)-s\frac{\partial u}{\partial s}-s_0\frac{\partial u}{\partial s}-u\frac{1-ss_0}{1+ss_0},$$

also auch

$$\text{(V')} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial s\partial s_0}=0, \quad \text{d. h.} \quad v=f(s)+f_0(s_0),$$

wo f eine willkürliche analytische Function, f_0 die conjugirte bedeutet. Bezeichnet man endlich den reellen Bestandteil einer complexen Grösse w mit $R(w)$, so sind die Coordinaten eines Punktes der Fläche Σ

$$\text{(VI)} \qquad x = R\left[f'(s)(1-s^2) + \frac{2(s+s_0)}{1+ss_0} f(s)\right],$$

$$y = R\left[if'(s)(1+s^2) + \frac{2i(s_0-s)}{1+ss_0} f(s)\right],$$

$$z = R\left[\tfrac{1}{2} s f'(s) - \tfrac{1}{2} \frac{1-ss_0}{1+ss_0} f(s)\right].$$

Jeder analytischen Function $f(s)$ entspricht also eine Fläche Σ. Vermehrt man $f(s)$ um eine Constante, so geht die Fläche Σ in eine Parallelfläche über. Ist $f(s)$ algebraisch, so ist es auch die Fläche Σ. Besonders einfache Fälle ergeben sich, wenn man setzt $f(s) = c$ (Kugel um O), $f(s) = a \ln s$ (Umdrehungsfläche, deren Meridian eine Parabelevolvente ist), $f(s) = (a+bi)\ln s$ (die Fläche besteht aus unendlich vielen parallelen Schalen).

Die Differentialgleichungen der Krümmungslinien und die der asymptotischen Linien nehmen einfache Formen an, die erstere ist in vielen Fällen integrabel, z. B. für $f'(s) = as^n$ und für $f'(s) = \frac{a}{(s+b)^2}$.

Der Zusammenhang der Flächen Σ mit den Minimalflächen ergiebt sich nun auch einfach. Als Differentialgleichung der Minimalflächen findet man nämlich die Gleichung

$$\text{(VII)} \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial s \partial s_0}(1+ss_0) - s\frac{\partial u_1}{\partial s} - s_0 \frac{\partial u_1}{\partial s_0} + u_1 = 0,$$

durch deren Differentiation nach s und s_0 die Gleichung

$$(1+ss_0)\frac{\partial^3 u}{\partial s^2 \partial s_0} - s\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} = 0$$

und die analoge entsteht. Hieraus folgt, dass, wenn man setzt

$$\text{(VIII)} \qquad u = u_1 - s\frac{\partial u_1}{\partial s} - s_0 \frac{\partial u_1}{\partial s_0},$$

eine der Gleichungen (V) und (VII) die andere zur Folge hat. Nennt man die Coordinaten der Minimalfläche x, y, z, so zeigt sich sofort, dass $z_1 = -v$ ist.

Ist also irgend eine Minimalfläche s_1 gegeben, so entspricht ihr eine einzige Fläche Σ und zwar in der Art, dass der Abstand der Tangentialebene von Σ von O der Coordinate Z_1 der Minimalfläche entgegengesetzt gleich ist. Umgekehrt entsprechen einer Minimalfläche Σ unendlich viele Minimalflächen, welche aber durch eine Translation parallel der xy-Ebene zur Deckung gebracht werden können.

Ferner zeigt sich, dass einer Verschiebung der Minimalfläche parallel der z-Axe der Uebergang von einer Fläche Σ zu einer Parallelfläche entspricht. In einem ähnlichen Zusammenhange, wie mit den Minimalflächen, stehen die Flächen Σ mit gewissen von Herrn O. Bonnet betrachteten Flächen S_2, für welche der Ort der Mitten zwischen den Hauptkrümmungscentren eines Punktes die xy-Ebene ist, und von welchen Herr Appell gezeigt hat, dass ihre Normalen zwei Ebenen, parallel der xy-Ebene, äquivalent (d. h. nach Gleichheit des Flächeninhalts) auf einander abbilden. Die Differentialgleichung dieser Flächen S_2 ist

$$(1-ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}+s\frac{\partial u_2}{\partial s}+s_0\frac{\partial u_2}{\partial s_0}-u_2=0.$$

Setzt man dann

$$\frac{-s\frac{\partial u_2}{\partial s}-s_0\frac{\partial u_2}{\partial s_0}+u_2}{1-ss_0}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial s\partial s_0}=v,$$

so ist $\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial s_0}=0$, so dass v dieselbe Bedeutung hat, wie in (V').

Mithin liefert die Relation

$$u=(1+ss_0)v=\frac{1+ss_2}{1-ss_0}\left[u_2-s\frac{\partial u_2}{\partial s}-s_0\frac{\partial u_2}{\partial u_0}\right]$$

die entsprechende Fläche Σ, und es ist $v=\frac{ss_0+1}{ss_0-1}z_2$, wenn x_2, y_2, z_2 die Coordinaten des Punktes S_2 sind. Es lässt sich also aus einer Bonnet'schen Fläche die entsprechende Fläche Σ in analoger Weise construiren, wie aus einer Minimalfläche, nur dass statt der z-Coordinate die Länge der Normale bis zur xy-Ebene auftritt. Parallelen Bonnet'schen Flächen entsprechen parallele Flächen Σ.

Umgekehrt entspricht jeder Fläche Σ, abgesehen von der Verschiebung parallel der xy-Ebene, eine einzige Bonnet'sche Fläche.

Dieses Entsprechen zwischen den Flächen Σ und S_2 führt den Herrn Verfasser noch zu einem interessanten Resultat bezüglich des Problems Sur les déblais et remblais, welches man so aussprechen kann: Jedem System von Wegen, durch welche die Massen-Elemente eines homogen mit Masse belegten ebenen Flächenstückes auf die günstigste Weise nach einem gleich grossen Stück einer parallelen Ebene verlegt werden, entspricht ein System von Wegen, durch welche dieselbe Aufgabe für zwei gleich grosse Stücke derselben Kugel gelöst wird.

Dies ist der Hauptinhalt der durch elegante und durchsichtige Darstellung und durch ihre Resultate ausgezeichneten Arbeit.

A.

L. Saalschütz. Ueber die Curve, deren Rotation die kleinste Oberfläche erzeugt. Hoppe Arch. (2) V. 131-159.

Sollen zwei Punkte einer durch eine Gerade begrenzten Halbebene durch eine Linie der Ebene verbunden werden, welche bei der Rotation um die die Halbebene begrenzende Gerade die kleinste Oberfläche erzeugt, so findet man nach den gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung, dass die Linie Bogen einer Kettenlinie sein muss, welche die Rotationsaxe zur Basis hat. Nimmt man also die Basis zur x-Axe, setzt die Coordinaten von C gleich a und h_0, die von D gleich b und h, so wird die Gleichung der Kettenlinie

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-k}{c}} + e^{-\frac{x-k}{c}}\right),$$

und die Integrationsconstanten c und k müssen so bestimmt werden, dass

$$h_0 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{a-k}{c}} + e^{-\frac{a-k}{c}}\right); \quad h_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{b-k}{c}} + e^{-\frac{b-k}{c}}\right).$$

Es treten nun aber folgende Fälle ein. Entweder es giebt zwei Kettenlinien, welche den Bedingungen genügen. Bei der

flacheren schneiden sich die Tangenten in den beiden Endpunkten innerhalb der Halbebene, bei der steileren ausserhalb derselben. Alsdann liefert nur die flachere Curve ein Minimum. Oder es giebt keine reelle Kettenlinie der Art, dann ist kein Minimum vorhanden. Im Uebergangsfall schneiden sich die Tangenten auf der Axe, und es ist auch dann kein eigentliches Minimum vorhanden. Der Widerspruch, der in diesen (wie in ähnlichen) Resultaten der Variationsrechnung zu liegen scheint, veranlasste den Herrn Verfasser, das Problem nach zwei Richtungen weiter zu verfolgen.

Im ersten Teile seiner Arbeit sucht er den Uebergang zwischen den Fällen, wo ein Minimum existirt, und denjenigen, wo es nicht existirt, aufzudecken. Er specialisirt dazu das Problem, indem er die Ordinaten der gegebenen Endpunkte h_0 und h_1 gleich gross annimmt, dann aber durch C und D alle möglichen Kettenlinien legt, deren Axen parallel der x-Axe liegen, und diejenige Kettenlinie aufsucht, welche die kleinste Rotationsfläche liefert. Er findet dadurch selbstverständlich eine Bestätigung des Resultates der Variationsrechnung; er fügt die Bemerkung hinzu, dass im Uebergangsfalle und im zweiten Hauptfalle ein Minimum existire, „welches die Variationsrechnung nicht liefere“; die Linie besteht alsdann aus den beiden Ordinaten h_0 und h_1 und dem zwischen ihnen liegenden Teile der Abscissenaxe.

Im zweiten Teile stellt er sich die Aufgabe, wenn der Punkt C gegeben ist, zu ermitteln, innerhalb welches Gebietes der Ebene der zweite Punkt D liegen muss, damit der erste der oben genannten Fälle eintrete, und findet als Begrenzungscurve die Enveloppe aller durch C gelegten Kettenlinien, welche die x-Axe zur Basis haben, wie dies wohl von vornherein einzusehen ist.

Der eigentliche Grund des scheinbaren Widerspruches ist von dem Herrn Verfasser nicht aufgedeckt. Er liegt darin, dass, wenn man die Oberfläche durch die analytische Formel

$$O = 2\pi \int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} y\,ds$$

definirt, dieselbe bei passender Wahl der Curve jeden beliebigen Wert zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann, weil y auch negative Werte beliebiger Grösse durchlaufen kann. Unter dieser Voraussetzung giebt es kein absolutes Minimum oder Maximum; dagegen existirt im Falle 1 ein relatives Minimum und ein relatives Maximum. Im Uebergangsfalle sind diese beiden zusammengefallen, und es existirt dann weder ein relatives Minimum noch ein relatives Maximum, ebenso wenig existiren solche im Falle 2. — Lässt man dagegen nur positive Oberflächenteile zu, so darf auch y nur positiv genommen werden; ist also nicht mehr unbeschränkt reell veränderlich. Dies ist ein Fall, wie Referent ihn in seinen Abhandlungen (F. August: „Ueber die günstigste Form der Geschossspitzen nach der Newton'schen Theorie". Arch. f. Art. XCIV. und „Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes etc., J. für Math. CIII. 1, Referat in diesem Bande, Abschnitt X, Cap. 4A) bei Gelegenheit eines anderen Variationsproblems bemerkt und dann auch bei mehreren ähnlichen Problemen festgestellt hat, und welcher sich nach den von ihm entwickelten Methoden vollständig untersuchen lässt. Es ergeben sich im Falle 1 ein relatives Maximum, nämlich die steilere Curve, und zwei Minima, nämlich die flachere Curve und die gebrochene Linie *CABD*; eines von beiden ist relativ, das andere absolut. Im Falle 2 und im Uebergangsfalle existirt kein Maximum und nur ein absolutes Minimum, nämlich die gebrochene Linie *CABD*. A.

G. Hormann. Untersuchung über die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide, die von zwei festen Parallelkreisflächen begrenzt sind, bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen. Diss. Göttingen. 53 S 8°.

W. Howe. Die Rotationsflächen, welche bei vorgeschriebener Flächengrösse ein möglichst grosses oder kleines Volumen enthalten. Diss. Berlin. 24 S. 4°.

Da die beiden in den vorliegenden Inaugural-Dissertationen

behandelten Probleme analytisch im wesentlichen übereinstimmen, und da auch der speciellere Zweck der beiden Arbeiten ein gleicher ist, so können wir über sie gemeinsam berichten.

Sucht man die Meridiancurve zwischen zwei gegebenen Punkten der Rotationsoberfläche, welche bei gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche oder bei gegebener Oberfläche das grösste Volumen hat, so zeigt sich, dass dieselbe eine gewisse Curve sein kann, welche sich durch elliptische Integrale zweiter Gattung darstellen lässt, und welche, wie Delaunay gefunden hat, aufgefasst werden kann als Bahn des Brennpunktes eines Kegelschnittes, der auf der Rotationsaxe rollt, ohne zu gleiten. Ist im speciellen Falle der rollende Kegelschnitt eine Parabel, so geht die Rollcurve in eine Kettenlinie über. Deswegen bezeichnet Herr Howe nach dem Vorgange des Herrn Lindelöf die Meridiancurven allgemein als elliptische oder hyperbolische Kettenlinien, von denen die ersteren die Form von Wellenlinien, die letzteren diejenige von Schleifenlinien haben. Beide gehen in Halbkreisbogen über, wenn die kleine, bezw. die imaginäre Halbaxe der rollenden Ellipse oder Hyperbel Null wird.

Herr Hormann nennt die entsprechenden Rotationsflächen der elliptischen Kettenlinien Unduloide, die der hyperbolischen Nodoide.

Es zeigt sich aber, dass die gefundenen Curven, welche die gegebenen Punkte verbinden, nicht immer die Minimal- respective Maximalbedingung erfüllen. — [Auch bei diesem Problem ist, wie Referent einschalten möchte, zu unterscheiden, ob man rein analytisch den Maximal- oder Minimalwert des einen der beiden Integrale sucht, während das andere constant ist, in welchem Falle man auch negative Werte der Ordinate, also negative Oberflächenteile und Schleifen, welche negative Volumenteile bedingen, zulassen muss, oder ob man der gewöhnlichen Vorstellung entsprechend negative Ordinaten und negative Oberflächenteile sowie Schleifen und negative Volumenteile ausschliessen will. Im ersteren Falle kann man die Punkte so verbinden, dass die Rotationsfigur bei gegebenem Volumen jede beliebige Oberfläche zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, und bei gegebener Oberfläche

jedes beliebige Volumen. Es existirt also dann kein absolutes Minimum oder Maximum, und es braucht auch kein relatives zu existiren. Im letzteren Fall treten beschränkende Bedingungen hinzu, welche unstetige Lösungen zur Folge haben können, aber es muss ein absolutes Minimum oder Maximum existiren. Man vergleiche darüber das vorige Referat.] — Beide Verfasser beschäftigen sich nun nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass mit der folgenden Frage. Wenn eine der Minimal-, respective Maximalbedingung entsprechende Meridiancurve und auf derselben ein Punkt gegeben ist, wie weit darf man den zweiten Punkt auf der Curve abrücken, damit der dazwischen liegende Bogen wirklich ein Minimum, respective Maximum liefert? Die äusserste Grenzlage für den zweiten Punkt ist nach der Bezeichnung des Herrn Weierstrass der dem ersten conjugirte Punkt. Er ist der Coincidenzpunkt der Curve mit der durch den ersten Punkt gelegten unendlich nahen Curve. Es handelt sich also um die Aufsuchung dieses conjugirten Punktes. Herr Hormann benutzt zu seinen sehr ausgedehnten Rechnungen die Weierstrass'schen $\wp$- und σ-Functionen, Herr Howe bedient sich der Legendre'schen Bezeichnungen. Beide Verfasser betrachten das Problem auch physikalisch mit Hülfe der Plateau'schen Versuche. Der Arbeit des Herrn Howe ist am Schluss ein kurzer Abschnitt zur Geschichte des Problems zugefügt, welcher interessante Notizen enthält. A.

L. Bianchi. Sulle superficie d'area minima negli spazi a curvatura costante. Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 503-519.

Liegt eine Fläche in einem Raume von constantem Krümmungsmasse K, so gehen durch jeden ihrer Punkte zwei derartige Linien (Krümmungslinien), dass die geodätischen Normalen in irgend zwei benachbarten Punkten jeder dieser Linien sich gegenseitig schneiden. Wird die Normale in einem Punkte von den successiven Normalen längs der durch ihn gehenden Krümmungslinien im Abstande w_1 bezw. w_2 vom Fusspunkte geschnitten, so werden als „reducirte Hauptkrümmungsradien“ zwei Grössen

r_1, r_2 bezeichnet, welche mit w_1, w_2 durch die folgenden Relationen zusammenhängen:

$$r_1 = a \operatorname{tang} \frac{w_1}{a}, \quad r_2 = a \operatorname{tang} \frac{w_2}{a}, \quad \text{für } K = \frac{1}{a^2},$$

$$r_1 = a \operatorname{tgh} \frac{w_1}{a}, \quad r_2 = a \operatorname{tgh} \frac{w_2}{a}, \quad \text{für } K = -\frac{1}{a^2}.$$

(Vgl.: L. Bianchi, Sui sistemi di Weingarten negli spazi di curvatura costante, Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 221—256, Bericht in diesem Bande S. 767 ff.).

Die reducirten Hauptkrümmungsradien einer Minimalfläche genügen, wie im euklidischen Raume, der Gleichung:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0.$$

Ist $K = \pm \frac{1}{a^2}$, so kann man auf einer Minimalfläche ein solches krummliniges Coordinatensystem u, v finden, dass das Linienelement und die reducirten Hauptkrümmungsradien bezw. die Form:

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2), \quad r_1 = ae^{2\theta}, \quad r_2 = -ae^{2\theta}$$

annehmen; die Function θ von u, v genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = -\frac{2}{a^2} \operatorname{sh} 2\theta, \quad \text{für } K = \frac{1}{a^2};$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{2}{a^2} \operatorname{csh} 2\theta, \quad \text{für } K = -\frac{1}{a^2}.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden zwei Sätze, welche für den euklidischen Raum schon längst bekannt sind (siehe: Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Leç. III Chap. V und: Darboux, Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes, Darb. Bull. (2) VII. 257 ff., F. d. M. XV. 1883. 726):

Jede Minimalfläche kann, ohne Veränderung ihrer Hauptkrümmungsradien, einer continuirlichen Biegung unterzogen werden.

In einem Raume von constantem positiven Krümmungsmasse

giebt es für jede Minimalfläche zwei parallele Flächen von constanter positiver Krümmung.

Eine Verallgemeinerung der Minimalflächen bilden die Flächen von constanter „mittlerer Krümmung“, wenn man mit diesem Namen die Grösse $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ bezeichnet. Ist $\frac{1}{R}$ die mittlere Krümmung einer solchen Fläche, m eine willkürliche Constante, so existirt immer ein solches Coordinatensystem u, v, dass:

$$ds^2 = m^2 e^{2\theta}(du^2 + dv^2), \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{2R}(1 - e^{-2\theta}), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2R}(1 + e^{-2\theta});$$

θ genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = m^2 \left\{\frac{e^{-2\theta}}{4R^2} - e^{2\theta}\left(\frac{1}{4R^2} + K\right)\right\}.$$

Man kann (vgl. die oben citirte Abhandlung des Verfassers) das Linienelement eines Raumes von constantem Krümmungsmasse K in die Form:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right)^2}, \quad \text{für } K = \frac{1}{a^2};$$

$$ds^2 = \frac{a^2}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad \text{für } K = -\frac{1}{a^2}$$

bringen. Betrachtet man x, y, z als die Coordinaten eines Punktes im euklidischen Raume, so bieten diese Formeln eine conforme Abbildung des Raumes von constantem Krümmungsmasse auf den euklidischen Raum dar. Ist dann $z = z(x,y)$ die Gleichung einer im krummen Raume liegenden Fläche S von constanter mittlerer Krümmung, so ist die Differentialgleichung ihrer Abbildung Σ im euklidischen Raume:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{4a^2}\right) H + \frac{4(z - px - qy)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \text{const.}, \quad \text{für } K = \frac{1}{a^2},$$

$$zH + \frac{2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \text{const.}, \quad \text{für } K = -\frac{1}{a^2},$$

wo

$$H = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist S insbesondere eine Minimalfläche, so sind die Constanten der rechten Seite gleich Null. Die Flächen Σ sind isothermisch (d. i. sie werden durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt) und gehören zu keiner der bekanntesten Familien von isothermischen Flächen (Flächen zweiter Ordnung, Cykliden, Umdrehungsflächen, Flächen von constanter mittlerer Krümmung, und die aus allen diesen durch Inversion ableitbaren). Den Schluss der Abhandlung bildet der Nachweis, dass die Flächen Σ der von Weingarten („Ueber die Differentialgleichung der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt werden können", Berl. Ber. 1883. 1163–66; vgl. auch Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Leç. IV Chap. XI) aufgestellten Differentialgleichung der isothermischen Flächen genügen. Vi.

H. Dobriner. Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien. Acta Math. X. 145-152.

Die Arbeit schliesst sich eng an die Abhandlung des Herrn Verfassers, betitelt „Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien, dargestellt mit Hülfe von Thetafunctionen zweier Variablen" (Acta Math. IX. 73-109, F. d. M. XVIII. 1886. 425). Denn die Minimalflächen können durch eine Grenzbetrachtung aus den dort behandelten Flächen hergeleitet werden. Der Herr Verfasser zieht es jedoch vor, sie direct zu untersuchen; um hierbei die Weierstrass'schen Formeln anwenden zu können, ist zunächst erforderlich, dass die Krümmungsradien durch die Parameter dargestellt werden. Nachdem diese Darstellung durchgeführt ist, wird die Fläche selbst dargestellt, und es wird die Gleichung der Kugel angegeben, auf welcher die Krümmungslinie $v = 0$ liegt. A.

O. von Lichtenfels. Notiz über eine transcendente Minimalfläche. Wien. Ber. XCIV. 41-54. (1886.)

Aus den allgemeinen Formeln über Minimalflächen leitet der

Herr Verfasser die Gleichungen für solche Minimalflächen ab, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur Krümmungslinie oder zur geodätischen Linie haben, und wendet die letzteren Gleichungen auf den Fall an, dass die gegebene Curve eine Lemniscate ist. Er erhält alsdann, wenn u den Winkel bedeutet, den die Projection der Normale auf die xy-Ebene mit der positiven x-Axe bildet, ϑ den Winkel der Normale mit der positiven z-Axe, $v = ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta$ gesetzt wird und $t = u + vi$, die rechtwinkligen Coordinaten in folgender Weise dargestellt:

$$x = \Re[\sqrt{2} \cos \tfrac{1}{2}t \sqrt{\cos \tfrac{3}{2}t}],$$
$$y = \Re[-\sqrt{2} \sin \tfrac{1}{2}t \sqrt{\cos \tfrac{3}{2}t}],$$
$$z = \Re\left[-\frac{i\sqrt{2}}{3}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\cos \tfrac{3}{2}t}}\right],$$

wobei allgemein unter $\Re[f(t)]$ der reelle Bestandteil der Function $f(t)$ verstanden ist. Es zeigen diese Formeln, dass z als elliptisches Integral erster Gattung dargestellt ist, dass also die Fläche in Richtung der z-Axe Periodicität besitzt. Hiermit ist der Ausgangspunkt für eine eingehende Discussion der Fläche gewonnen, welche durchgeführt wird, und bei welcher auch die Bonnet'sche Biegung Berücksichtigung findet. A.

E. Götting. Bestimmung einer speciellen Gruppe nicht algebraischer Minimalflächen, welche eine Schar von reellen algebraischen Curven enthalten. Diss. Göttingen. 42 S. 8°.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

W. J. C. Sharp. On the properties of simplicissima (with especial regard to the related spherical loci). Lond. M. S. Proc. XVIII. 325-359.

Unter einem Simplicissimum versteht der Herr Verfasser

eine durch $n+1$ Punkte im Raume von n Dimensionen gebildete Figur, wenn nicht drei dieser Punkte in einer Geraden, nicht vier in einer Ebene u. s. f. liegen. Er giebt eine grosse Reihe von Eigenschaften solcher Figuren, indem er als Volumen derselben die Erweiterung der für Ebene und Raum bekannten Determinanten zu Grunde legt. Damit bringt er die Hyperkugel durch die $n+1$ Punkte in Verbindung, bestimmt den Schnitt der Figur durch einen linearen Ort im Raum von n Dimensionen, und leitet viele Formeln ab, welche sich als Verallgemeinerungen der für $n = 2, 3$ bekannten ausweisen. (Vgl. das Referat S. 150 dieses Bandes.) No.

R. Hoppe. Das n-dehnige $(n+1)$-Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. Hoppe Arch. (2) V. 418-429.

Die Coordinaten der Ecken eines n-dehnigen $(n+1)$-Ecks („Plasmas") werden so bestimmt, dass die Axen des orthogonalen Coordinatensystems Hauptträgheitsaxen des Gebildes werden. Diese Aufgabe wird specialisirt für die Fälle $n = 2, 3, 4$.

Schg.

O. Biermann. Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Räumen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variabeln. Wien. Ber. XCV. 523-548.

Referat S. 143 dieses Bandes.

R. Hoppe. Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen. Hoppe Arch. (2) VI. 69-75.

Der erste der hier behandelten Sätze ist der von Bermann in Schlömilch Z. XXXI. 381 (F. d. M. XVIII. 1886. 249) über die Berührungsebene einer Fläche angegebene. Derselbe lautet in allgemeiner Fassung: „Das n-dehnige $(n+1)$-Eck, begrenzt von n $(n-1)$-dehnigen n-Ecken, deren eins eine feste krumme $(n-1)$-Dehnung berührt, während die übrigen in festen linearen

$(n-1)$-Dehnungen liegen, ist bei variirendem Berührungspunkt ein Minimum nur dann, wenn der Berührungspunkt Schwerpunkt jenes berührenden n-Ecks ist". Der zweite Satz betrifft das von Routh (Quart. Journ. XXI. 281, F. d. M. XVIII. 1886. 260) für das Dreieck, Viereck, Tetraeder und Pentaeder ausgewertete Integral

$$\int z^n dV.$$

Dasselbe wird zuerst für das n-dehnige $(n+1)$-Eck, sodann für das $(n+2)$-Eck berechnet, welches letztere Gebilde als Summe von zwei Gebilden der ersteren Art betrachtet wird, aber auch durch Projection des $(n+1)$-dehnigen $(n+2)$-Ecks auf eine. lineare n-Dehnung erhalten werden kann. Schg.

A. Buchheim. On the theory of screws in elliptic space (IV). Lond. M. S. Proc. XVIII. 88-96.

Diese Arbeit bringt den Schluss früherer Untersuchungen des Verfassers über denselben Gegenstand. (S. F. d. M. XVIII. 1886. 660). Es werden darin einige Resultate der vorigen Mitteilung, betreffend endliche Bewegungen innerhalb eines beliebig gekrümmten dreidimensionalen Raumes, auf das n-dimensionale Gebiet ausgedehnt. Dies gelingt, wie der Verfasser bemerkt, lediglich mit Hülfe der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, nicht aber mittels der vom Verfasser früher nebenher benutzten Biquaternionen, deren Verwendbarkeit nicht über das dreidimensionale Gebiet hinausreicht. Schg.

F. Schur. Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume. Math. Ann. XXVIII. 343-353.

Man weiss, dass ein n dimensionaler Raum, welcher eine Schar ebener $(n-1)$-dimensionaler Räume enthält, innerhalb eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes deformirbar ist. Doch ist diese Deformation auch noch unter anderen Voraussetzungen

möglich, deren vollständige Angabe bisher nicht gelungen ist. Im vorliegenden Aufsatze ermittelt der Verfasser (im Anschluss an eine frühere Arbeit, Math. Ann. XXVII. 172, F. d. M. XVIII. 1886. 444) zunächst eine allgemeine aber noch nicht ausreichende Bedingung der Deformirbarkeit und zeigt dann, dass die Aufgabe, alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen derselben zu finden, für den Fall $n = 3$ auf das folgende noch ungelöste Problem führt: innerhalb eines sphärischen dreidimensionalen Raumes alle Flächen zu finden, welche in ihm so deformirbar sind, dass zwei conjugirte Liniensysteme derselben in ebensolche übergehen. Daneben werden verschiedene einfachere Specialfälle deformirbarer Räume discutirt. Schg.

C. Segre. Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p. Palermo Rend. I. 217-221.

Der Verfasser beweist in einfacher Weise die von Guccia in seinem Aufsatze „Generalizzazione di un teorema di Noether“ (F. d. M. XVIII. 1886. 671) aufgestellte Relation

$$\varkappa + p - D - 1 = 0 \qquad (D > 2p - 2),$$

gültig für ein $\varkappa$-fach unendliches lineares System ebener Curven vom Geschlechte p, mit D veränderlichen Schnittpunkten, welches durch seine Basispunkte bestimmt, im übrigen aber willkürlich ist. Indem der Verfasser der obigen Relation eine allgemeinere Deutung giebt, gelangt er zu verschiedenen Folgerungen über die ebene Abbildung einer im $\varkappa$-dimensionalen Raum enthaltenen Oberfläche von der Ordnung D, und über die Reduction linearer Curvensysteme vom Geschlecht 1 oder 2 mittels Cremona'scher Transformationen. Schg.

P. del Pezzo. Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazi a più dimensioni. Napoli Rend. (2) I. 40-43.

Nachdem der Verfasser schon früher (F. d. M. XVIII. 1886.

450ff.) festgestellt, dass eine Oberfläche m^{ter} Ordnung im $(n-p+1)$-dimensionalen Raume für alle eine gewisse Grenze überschreitenden Werte von m eine Regelfläche sein muss, erweitert er diese Bemerkung in obiger Note zunächst dahin, dass die $(i+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten m^{ten} Grades im $(n-p+i)$-dimensionalen Raume unter der gleichen Voraussetzung aus unendlich vielen i-dimensionalen Gebilden bestehen. Während die allgemeine Bestimmung der Grenze von m dem Verfasser noch nicht gelungen ist, teilt er über das Vorhandensein solcher Regelflächen (F_2) eine Reihe specieller Resultate mit, welche auch auf $(i+1)$-dimensionale Gebilde (F_{i+1}) ausgedehnt werden können. Hierbei wird eine „Normalfläche p^{ter} Art“ im n-dimensionalen Raume als solche definirt, deren Schnitt mit einem $(n-1)$-dimensionalen Raume eine Normalcurve vom Geschlechte p ist. Schg.

P. del Pezzo. Sulle superficie e le varietà a più dimensioni le cui sezioni sono curve normali del genere p. Annali di Mat. (2) XV. 115-126.

Die vom Verfasser an anderer Stelle (s. voriges Referat) definirten Normalflächen p^{ter} Art im n-dimensionalen Raume werden hier einer genaueren Untersuchung unterzogen; namentlich werden Sätze abgeleitet über die auf einer Ebene mittels des Systems aller Curven n^{ter} Ordnung darstellbaren Flächen. Sodann wird für die Ordnungszahl einer Normalfläche p^{ter} Art die Grenze ermittelt, über welche hinaus sie den Charakter einer Regelfläche annehmen muss. Endlich werden die für Flächen erhaltenen Resultate auf analoge mehrdimensionale Gebilde ausgedehnt. Schg.

P. del Pezzo. Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni. Palermo Rend. I. 241-271.

Diese Arbeit enthält eine ausführliche Discussion derjenigen Oberflächen n^{ter} Ordnung (F_2^n) im n-dimensionalen Raume (S_n),

welche keinem Raume mit niedrigerer Dimensionenzahl angehören. Eine solche Oberfläche heisst „von der ersten Art", wenn ihre Schnittcurve mit einem S_{n-1} vom Geschlechte 1 ist. Diese Festsetzung geschieht im Anschluss an die vom Verf. in seiner Arbeit „Intorno ad una proprietà fondamentale" (s. ob. S. 840) aufgestellte Definition einer Oberfläche p^{ter} Art. Und die vom Verf. in einer früheren Arbeit (F. d. M. XVII. 1885. 514.) behandelten Flächen n^{ter} Ordnung im $(n+1)$-dimensionalen Raume erscheinen hiernach als Flächen 0ter Art. — Nach einem einleitenden Satze über die eindeutige Projection einer F_2^n auf den dreidimensionalen Raum aus $n-3$ beliebig auf der Fläche gewählten Projectionscentren werden in der vorliegenden Abhandlung zuerst erörtert die Tangentialebenen an eine solche Fläche, welche nebst ihren Berührungspunkten durch Projection auf den dreidimensionalen Raum dieselbe Eigenschaft in Bezug auf eine Fläche dritter Ordnung erhalten. Dieser Zusammenhang zwischen den F_2^n und den Flächen dritter Ordnung gestattet es, die Einteilung der letzteren auf die ersteren zu übertragen. Hierbei ergiebt sich, dass die kubische Kegelfläche Projection einer Kegelfläche, und die Regelfläche Projection einer Regelfläche ist, während für $n>9$ alle hier betrachteten F_2^n Regelflächen sind. Auch hinsichtlich der vorhandenen Doppelpunkte findet zwischen beiden Arten von Flächen ein Entsprechen statt. Der Verfasser behandelt hierauf speciell die Regelflächen, die Geraden auf den übrigen Flächen n^{ter} Ordnung und die Darstellung der letzteren auf einer Ebene. Weiter werden untersucht die Projectionen der F_2^n von einer Tangentenebene aus, die osculirenden 5-dimensionalen Räume, und speciell die Fläche achter Ordnung und zweiter Art im 8-dimensionalen Raume. Während bis hierher die Methode der Projection sich besonders fruchtbar erwies, geht der Verfasser nunmehr dazu über, die F_2^n als Schnitte von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu betrachten, und schliesst mit Aufzählung einer Reihe von Oberflächen des 3-dimensionalen Raumes, welche als Projectionen specieller F_2^n (für verschiedene bestimmte Werthe von n) betrachtet werden können. Schg.

A. Brambilla. Un teorema nella teoria delle polari. Torino Atti XXII. 787-790.

Ist im linearen Raume S_n von n Dimensionen H eine Mannigfaltigkeit $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension, welche entweder von $(n-1)$ projectiven $(n-1)$-gliedrigen Reihen linearer Systeme ν^{ter} Ordnung $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension oder von zwei reciproken Systemen ν^{ter} Ordnung $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension erzeugt wird, und ist h^y das Erzeugnis der ersten Polaren eines Punktes y von S_n bezüglich einer der Gruppen der zu Grunde gelegten Systeme, so sind die ersten Polaren von y bezüglich h^y und H identisch. Js.

H. B. Fine. A theorem respecting the singularities of curves of multiple curvature. American J. IX. 180-184.

In der vorigen Arbeit des Verfassers „On the singularities of curves of double curvature" (Am. J. VIII. 156, F. d. M. XVIII. 1886. 749.) ward bereits die Ausdehnung der daselbst entwickelten Theorie auf n Dimensionen am Schlusse angedeutet. Diese wird in der gegenwärtigen vollzogen. Zu den osculirenden linearen Gebilden kommen noch die von 3 bis $n-1$ Dimensionen, S_3 bis S_{n-1}, zu den 3 Klassenindices ebensoviel neue hinzu. Es wird der Satz bewiesen: $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ sind die Singularitätsindices des osculirenden Gebildes S_{n-1}, welches einem Punkte von den Singularitätsindices $x_1, x_2, \dots, x_n$ entspricht. H.

D. Hilbert. Ueber Singularitäten der Discriminantenfläche. Math. Ann. XXX. 437-441.

Sind $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ die homogenen Punktcoordinaten im n-dimensionalen Raume, und setzt man

$$X(t) = x_1 t^n + x_2 t^{n-1} + \dots + x_n t + x_{n+1},$$

so wird durch jeden Punkt des Raumes eine ganze rationale Function n^{ter} Ordnung definirt, und umgekehrt entspricht jeder ganzen rationalen Function n^{ter} Ordnung ein Punkt jenes Raumes.

Die Gleichung $X(t) = 0$ stellt eine mit dem Parameter t

variirende Ebene [d. h. lineare ($n-1$)-Dehnung] dar, und die Discriminante der Gleichung $X(t) = 0$, welche bezeichnet wird $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bestimmt die Enveloppe jener ($n-1$)-Dehnungen, welche der Herr Verfasser Discriminantenfläche nennt, wofür nach anderweitigem Sprachgebrauch Discriminanten ($n-1$)-Dehnung gesagt werden müsste.

Der Herr Verfasser zeigt nun, dass mit alleiniger Hülfe der Discriminante D und ihrer Polaren $D_1, D_2, \ldots$ eine hinreichende Unterscheidung und Charakterisirung der mannigfachen Ausartungen der Form $X(t)$ möglich ist, und knüpft daran noch einige weitere Betrachtungen. A.

G. Zecca. Sopra una classe di curve razionali. Batt. G. XXV. 333-355.

Die bekannte Parameterdarstellung der ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt führt ganz natürlich zur Bildung gewisser der Curve eingeschriebener geschlossener Polygone (vgl. Clebsch-Lindemann, Vorl. üb. Geom. Bd. I. S. 588). Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich zunächst mit der ausführlichen Untersuchung dieser Polygone. Es bietet sich dann als eine erste Verallgemeinerung die rationale Raumcurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt dar (über diese Curve cf.: A. Brambilla, Sulla curva gobba del quarto ordine dotata di punto doppio, Lomb. Ist. Rend. (2) XVII. 857—866; F. d. M. XVI. 1884. 711—12); auch diese Curve giebt zu eingeschriebenen Polygonen Veranlassung, deren Erzeugung derjenigen der obigen Polygone analog ist, und deren Untersuchung zu interessanten Ergebnissen führt. Beide Curven sind aber nur besondere Fälle einer in einem n-dimensionalen Raume liegenden rationalen Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit Doppelpunkt. Diese Curve lässt eine solche Parameterdarstellung zu, dass die Parameter ihrer $n+1$ Durchschnittspunkte mit irgend einer Ebene die Gleichung:

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n+1} = \text{const.}$$

erfüllen, worauf sich die Theorie der eingeschriebenen Polygone leicht begründen lässt. Vi.

K. Rudel. Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension. Fürth. 32 S. 8°.

Capitel 4.

Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

A. Cayley. On systems of rays. Mess. (2) XVII. 73-78.

Hamilton's Abhandlung „Theory of systems of rays“ wurde im XV. Bande der Transactions of the Royal Irish Academy (1828) veröffentlicht. In der gegenwärtigen Note macht Hr. Cayley einige Bemerkungen über diese Theorie, wenn man sie vom rein analytischen Gesichtspunkte aus ansieht. Betrachtet man eine Congruenz oder eine doppelt-unendliche Schar von Geraden (oder Strahlen) und nimmt an, dass für einen beliebigen besonderen Strahl die Richtungs-Cosinus α, β, γ (sodass $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) und die Coordinaten eines Punktes auf dem Strahle x, y, z sind, so können wir uns das System auf zwei Arten vorstellen.

1. Die Strahlen können als von den Punkten einer Oberfläche ausgehend angesehen werden. Wenn man in diesem Falle x, y, z als zu einem Punkte auf der Oberfläche gehörig betrachtet, so ist z eine gegebene Function von x, y, und um die Congruenz zu bestimmen, müssen wir α, β, γ einzeln als gegebene Functionen von x, y haben, so dass identisch $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, jedoch mit keiner anderen Bedingung betreffs der Form der Functionen.

2. Die Strahlen können ohne Rücksicht auf irgend eine Oberfläche betrachtet werden. In diesem Falle sind α, β, γ einzeln gegebene Functionen von x, y, z, sodass stets $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$; aber es bestehen noch weitere Bedingungen. Es wird nämlich angenommen, dass wir einen und denselben Strahl haben, w

ches auch der Punkt x, y, z auf dem Strahle ist, oder mit anderen Worten (wenn man ϱ zur Bezeichnung eines willkürlichen Abstandes gebraucht), dass α, β, γ, als Functionen von x, y, z betrachtet, durch die Verwandlung von x, y, z in $x+\varrho\alpha$, $y+\varrho\beta$, $z+\varrho\gamma$ ungeändert bleiben. Dies setzt voraus, dass

$$\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)\alpha,\quad \left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)\beta,$$
$$\left(\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}\right)\gamma$$

einzeln Null sind, und umgekehrt kann gezeigt werden, dass, wenn diese Bedingungen befriedigt sind, dann α, β, γ durch die besprochene Verwandlung ungeändert bleiben.

Die allgemeine Theorie ist durch Hrn. Kummer (J. für Math. LVII) von dem ersten dieser beiden Gesichtspunkte aus schon behandelt worden; Hr. Cayley bearbeitet sie nun auch mit Hülfe des zweiten. Glr. (Lp.)

L. Bianchi. Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi. Annali di Mat. (2) XV. 161-172.

Der Verfasser lenkt die Aufmerksamkeit auf Strahlensysteme, welche durch eine specielle metrische Relation charakterisirt sind. Der Hauptgegenstand seiner Note ist die Frage, ob Strahlensysteme existiren, für welche sowohl der Abstand der beiden Grenzpunkte als auch der Abstand der beiden Brennpunkte constant ist. Es zeigt sich, dass in jedem derartigen Strahlensysteme beide Brennflächen pseudosphärische Flächen sein müssen mit einem Radius, welcher dem Abstand der Grenzpunkte gleich ist. Umgekehrt gehört zu jeder pseudosphärischen Fläche eine einfache Unendlichkeit solcher speciellen „pseudosphärischen" Strahlensysteme, mit ersterer als gemeinsamer „Focalfläche". Durch diese Resultate wird ein Zusammenhang mit früheren Arbeiten des Verfassers über die Bäcklund'sche Transformation hergestellt. (F. d. M. XVII. 1885. 732). Zum Schluss wird die Aufgabe gelöst, die pseudosphärischen Strahlensysteme zu ermitteln, welche in einem gegebenen linearen Complex enthalten sind. R. M.

A. Voss. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung. München. Abh. XVI. 245-324.

In jedem Punkte x einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung $f = 0$ werde die Tangentialebene construirt, sodann der harmonische Pol y derselben in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung $X = 0$ gesucht und x mit y verbunden. Die Brennfläche des so entstehenden Strahlensystems der „projectiven Normalen" soll die „projective Centrafläche erster Art von f" genannt werden. Die analytische Theorie dieser Fläche, soweit sie mit Hülfe einfacher Formbildungen geleistet werden kann, ist der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit. Der Centrafläche erster Art wird als Grenzfall eine solche zweiter Art an die Seite gestellt, welche entsteht, wenn man als absolutes Gebilde statt der Fläche zweiter Ordnung einen Kegelschnitt nimmt.

Anfänglich betrachtet der Verfasser jedoch eine viel allgemeinere Klasse von Brennflächen. Zur Erzeugung des Strahlensystems wird nämlich jeder Punkt x von f mit einem Punkte y verbunden, von dessen Coordinaten nur angenommen wird, dass sie rationale Functionen von x sind. Die charakteristischen Zahlen der zugehörigen Brennfläche lassen sich bestimmen, und einige ihrer Curven untersuchen, vor allem die Rückkehrcurve, die parabolische Curve und die Curve 4-punktiger Berührung. Während nämlich im allgemeinen die Brennfläche zweideutig auf f bezogen ist, tritt für diese Curven eine eindeutige Beziehung ein, sie haben also ein eindeutiges Bild auf f, und dieses Bild vermittelt die Untersuchung. Für den specielleren Fall der Centraflächen erster Art, auf den der Verfasser sich weiterhin beschränkt, kann er die Flächen angeben, welche f in jenen Bildcurven durchschneiden. Von den zahlreichen Sätzen über die charakteristischen Eigenschaften dieser Curven, ihr Verhalten zu einander und zu andern Curven erscheint ein Referat weder angängig noch erforderlich; es soll daher hier nur noch erwähnt werden, dass einige der Entwickelungen auch ein neues Licht auf die von Cayley geschaffene Theorie der Quasi-Evoluten (der entsprechenden ebenen Gebilde) werfen, dass der Verf. auch die

Modificationen berücksichtigt, welche die allgemeine Theorie in dem Grenzfall der Centrafläche zweiter Art erleidet, sowie in den besonderen Fällen, wo f einen vielfachen Punkt hat, oder wo f die Fläche $X = 0$ resp. die Ebene des Kegelschnitts berührt.

Ein besonderes Interesse aber beanspruchen jene Entwickelungen, welche, über den speciellen Zweck der projectiven Centrafläche hinausgreifend, neue Gesichtspunkte für die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse algebraischer Flächen zu geben scheinen. Es sind dies die Resultate über Lage und Zahl der Kreispunkte, welche zu Hauptpunkten des Strahlensystems (Knotenpunkten der Brennfläche) Veranlassung geben, ferner die Einführung des neuen Begriffs des Hauptschnitts einer Fläche in Bezug auf das Strahlensystem, endlich die Betrachtung einer Klasse von algebraischen Flächen, welche die „projectiven Minimalflächen" als speciellen Fall enthält, algebraischen Flächen nämlich, für welche das Doppelverhältnis der vier auf einem Strahl liegenden Punkte (x, y und die beiden Berührungspunkte der Centrafläche) constant ist und zwar harmonisch für die Minimalflächen. R. M.

A. Voss. Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. II. Teil. Ueber die zu zwei eindeutig auf einander bezogenen Flächen gehörigen Strahlensysteme. Math. Ann. XXX. 227-290.

Der Verfasser untersucht zuerst das folgende allgemeine System von Geraden (xy). Zwei Flächen F und Φ von den Ordnungen m und μ seien so auf einander bezogen, dass jedem Punkte x von F α' Punkte y auf Φ entsprechen, jedem Punkte y von Φ aber α Punkte x auf F; specieller werde dann eine gegenseitige eindeutige Abhängigkeit hergestellt durch vier Gleichungen $f_i = 0$ resp. von den Ordnungen m_i, n_i in den zweimal vier homogenen Coordinaten x_i, y_i. Die Brennfläche dieses Strahlensystems, ihre charakteristischen Zahlen, ihre Rückkehr- und parabolischen Curven werden in ähnlicher Weise behandelt wie in

des Verfassers Abhandlung über die projective Centrafläche (siehe das vorige Referat), d. h. es werden alle algebraischen Formen ermittelt, von deren Verschwinden es abhängt, dass 2, 3 oder 4 Strahlen des Systems durch einen Punkt gehen, resp. in einer Ebene liegen.

Die gewonnenen Resultate haben namentlich auch Gültigkeit für den Fall, dass die beiden Flächen F und Φ conjugirte Kernflächen einer algebraischen Fläche $f=0$ sind (F. d. M. XVIII. 1886. 739—740); der Verfasser beschränkt aber die nähere Ausführung auf den einfachsten Fall der gewöhnlichen Hesse'schen Fläche H und ihrer conjugirten Steiner'schen Fläche S. (Auf solche besonderen Strahlensysteme hatte Hr. Fiedler in den Literatur-Nachweisen zur dritten Auflage der Salmon'schen Raumgeometrie die Aufmerksamkeit der Mathematiker gelenkt). Die diesbezüglichen Resultate werden vom Verfasser auf etwas anderem Wege noch einmal direct hergeleitet; besonders charakteristisch sind hier die aus den Knotenpunkten von H entspringenden Knotenpunkte und singulären Ebenen der Brennfläche.

Die Brennfläche und ihre Curven werden schon in den einfachsten Fällen von verhältnismässig hohen Ordnungen (siehe unten); es ist daher sehr dankenswert, dass der Verfasser einen besonderen Abschnitt den Verhältnissen bei den Flächen dritter Ordnung gewidmet hat. Er geht dabei aus von 4 in x und y symmetrischen bilinearen Gleichungen:

$$\begin{cases} \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} a_{\lambda\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4). \\ a_{\lambda\mu\nu} = a_{\lambda\nu\mu} \end{cases}$$

x und y liegen dann auf derselben Fläche vierter Ordnung, nämlich der Jacobi'schen Fläche der vier Flächen zweiten Grades $\sum_{\mu,\nu} a_{\lambda\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu = 0$, und wenn endlich die $a_{\lambda\mu\nu}$ für alle Indices symmetrisch angenommen werden, so erhält man das zu der Hesse'schen Fläche der Fläche dritter Ordnung

$$f = \sum_{\lambda,\mu,\nu} a_{\lambda\mu\nu}\, x_\lambda\, x_\mu\, x_\nu = 0$$

gehörige Strahlensystem. Es ist dritter Klasse, siebenter Ord-

nung, die zugehörige Brennfläche 24ter Ordnung, 16ter Klasse, die Rückkehrcurve von der Ordnung 90, die parabolische Curve zerfällt in mehrere Teile von der Gesamtordnung 162; der Rang der Brennfläche ist 42, die Doppelcurve von der Ordnung 120, das Geschlecht des ebenen Schnittes ist 43, das des Tangenten-Kegels 39; er besitzt 144 Rückkehrkanten, 66 Wendekanten. Die Verhältnisse sind hier leidlich anschaulich und die Resultate berühren sich mit denjenigen, welche Cayley in seinen Memoirs on quartics und Sturm in seinen synthetischen Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung gegeben haben.

Eine kurze Anwendung der Untersuchungsmethode über die Rückkehrcurve auf die analoge Frage im Gebiet der ebenen Curven beschliesst die Abhandlung. R. M.

E. Waelsch. Ueber eine Strahlencongruenz beim Hyperboloid. Wien. Ber. XCV. 781-801.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Strahlencongruenz dritter Ordnung zweiter Klasse, welche von den kürzesten Transversalen je zweier Erzeugenden derselben Regelschar eines Hyperboloids gebildet werden. Die Construction dieser kürzesten Transversalen kann in folgender Weise ausgeführt werden. Eine beliebige unendlich ferne Gerade u schneidet zwei Erzeugende des Hyperboloids; man ziehe durch den Pol dieser Geraden u in Bezug auf den unendlich fernen imaginären Kreis die Gerade l, welche dieselben Erzeugenden der Regelschar trifft. Der Inbegriff aller Strahlen l bildet dann das in Rede stehende besondere Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse. (Vergl. W. Stahl, J. für Math. XCI. 1.) Aus dieser Construction fliessen dann die meisten der von dem Herrn Verfasser angegebenen Sätze. Es werden folgende Bezeichnungen benutzt. Die Erzeugenden von X_2 werden „rechts" oder „links" genannt, je nachdem sie der einen oder andern Schar angehören, eine kürzeste Transversale heisst einfach Transversale, die Transversale zweier rechten (linken) Erzeugenden von X_2 wird eine linke (rechte) Transversale genannt. Es gelten dann folgende Sätze.

Die Transversale zweier rechten Transversalen ist eine linke Transversale. Es giebt ∞^1 viele mit X_2 coaxiale Hyperboloide (X_3), deren Scharen durch die rechten resp. linken Transversalen gebildet werden. Alle diese Flächen sind concyklisch.

Die Brennfläche der beiden Strahlensysteme wird von den Flächen (X_3) eingehüllt. Die Berührungscurve der Brennfläche mit einer X_3, sowie die Schnittcurve von X_3 mit der Brennfläche liegen je auf einer Kugel. Die Brennfläche der Strahlencongruenz ist mit der Grenzfläche identisch. Die Mittelfläche der Congruenz ist eine Steiner'sche Fläche vierter Ordnung. Zum Schlusse werden in eleganter Weise die Gleichungen der Strahlencongruenz, des Flächensystems (X_3) und der Brennfläche aufgestellt.

W. St.

H. Bourget. Représentation géométrique des propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes. C. R. CIV. 1253-1255.

Js.

V. Jamet. Théorème sur les complexes linéaires. C. R. CIV. 567-568.

Gehen die Schmiegungsebenen einer Raumcurve in den Punkten, in welchen sie von einer beliebigen Ebene π geschnitten wird, durch einen Punkt P von π, und bewegt sich P auf einer Geraden d, während sich π um eine beliebige Gerade d_1 dreht, so sind d und d_1 zugeordnete Gerade eines Nullsystems, zu dessen Leitstrahlen die Tangenten der Raumcurve gehören.

Js.

Genty. Sur un complexe du second ordre et sur la question posée au concours de 1881 pour l'agrégation des sciences mathématiques. Nouv. Ann. (3) VI. 401-415.

Bekannte oder sich leicht ergebende Sätze über den Reye'schen Complex werden auf analytischem Wege abgeleitet.

Js.

G. Lazzeri. Sopra i sistemi lineari di connessi quaternari (1, 1). Rom. Acc. L. Mem. (4) IV. 259-272.

De Paolis e Battaglini. Relazione. ibid. 257-258.

Den Zweck dieser Abhandlung bildet die Erforschung einer Klasse von Eigenschaften der linearen Systeme von quaternären Connexen (1, 1), die Ausdehnung der Untersuchungen über die ternären Connexe (1, 1) auf den Raum, welche vom Verf. in der Abhandlung: „La rappresentazione del piano rigato sopra un piano connesso." (Ven. Ist. Atti (6) III. 247—268, F. d. M. XVII. 1885. 781) angestellt wurden.

Ein quaternärer Connex (1, 1) wird symbolisch durch eine Gleichung von der Form $a_x v_a = 0$ dargestellt, wenn x_i die Coordinaten eines Punktes, v_i die einer der entsprechenden Ebenen sind; $(aa'a''u)(\alpha\alpha'\alpha''y) = 0$ stellt den „conjugirten Connex" dar. Wenn die Determinante des gegebenen Connexes, d. h. die Determinante $(aa'a''a''')$ Null ist, so heisst der betrachtete Connex „singulär", wogegen sein conjugirter Connex „speciell" ist, d. h. eine in zwei Factoren zerfallende Gleichung besitzt. Ein singulärer Connex wird durch ein Punktfeld α (dessen Träger „Hauptebene" des Connexes heisst) und durch einen projectivischen Strahlenbündel A (dessen Mittelpunkt „Hauptpunkt" des Connexes heisst) bestimmt; in Bezug auf einen singulären Connex sind einem Punkte P des Raumes alle Ebenen zugeordnet, welche durch den dem Strahle AP entsprechenden Punkt von α gehen; jeder Ebene π dagegen sind alle Punkte zugeordnet, welche auf der der Geraden $\alpha\pi$ entsprechenden Ebene durch A liegen.

Sind $f_0 = 0, f_1 = 0$ die Gleichungen zweier Connexe, so ist $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$ die eines beliebigen Connexes des „Büschels", den sie bestimmen. In Bezug auf einen Connexenbüschel entsprechen einem beliebigen Punkte die Ebenen eines Büschels; die Axen dieser Büschel bilden einen tetraedralen Complex, dessen wohlbekannte Abbildung auf den Punkten des Raumes man so wiederfindet. In dem Büschel von Connexen sind vier singuläre vorhanden.

Sind $f_0 = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$ die Gleichungen dreier Connexe,

so stellt $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ einen beliebigen Connex aus dem durch sie bestimmten „Netze“ dar. Die Mittelpunkte der ∞^2 Ebenenbündel, welche in Beziehung auf die Connexe eines Netzes einem Punkte entsprechen, liegen auf einer Ebene. Lässt man diese Ebene jenem Punkte entsprechen, so gelangt man zu einer eindeutigen reciproken Verwandtschaft (3,3), in welcher eine Fundamentalcurve sechster Ordnung und eine fundamentale Developpable sechster Klasse vorhanden sind, die erstere als Ort der Hauptpunkte der singulären Connexe des Netzes, die zweite als Hüllfläche ihrer Hauptebenen. Wenn insbesondere die drei gegebenen Connexe drei Collineationen bestimmen, welche ein und dasselbe Tetraeder nicht verwandeln, so reduciren sich die erwähnte Curve und Developpable auf die Kanten dieses Tetraeders; und wenn einer der Connexe der identische Connex $v_x = 0$ ist, so ist die Verwandtschaft ein Nullsystem.

In einem linearen Systeme ∞^3 von Connexen (1,1) giebt es ∞^2 singuläre Connexe; ferner eine Oberfläche als Ort der Hauptpunkte und eine Hüllfläche der Hauptebenen; diese Oberflächen sind auch diejenigen, welche allen Connexen des Systems gemeinsam sind.

In einem linearen Systeme ∞^4 von Connexen (1,1) giebt es ∞^3 singuläre Connexe; die Hauptpunkte und Hauptebenen stehen in einer eindeutigen reciproken Verwandtschaft (11,11) mit einander.

In einem linearen Systeme ∞^5 bilden die Hauptpunkte und Hauptebenen der ∞^4 singulären Connexe die zwei quaternären Connexen gemeinsame Coincidenz (2,2).

Die Hauptpunkte und Hauptebenen der ∞^5 singulären Connexe eines linearen Systems ∞^6 bilden einen Connex (3,3). Sind endlich ein Punkt und eine Ebene beliebig gegeben, so ist in einem Systeme ∞^8 von Connexen ein Connex vorhanden, von dem jener Punkt der Hauptpunkt, jene Ebene die Hauptebene ist.

La. (Lp.)

C. Arnoldt. Einige Untersuchungen über quadrat[illegible] Strahlencomplexe. Strassburg. Trübner. Diss. Strassburg.

F. DETELS. Ueber homocentrische Brechung unendlich dünner, cylindrischer Strahlenbündel in Rotationsflächen zweiter Ordnung. Diss. Rostock. 32 S. 8°.

C. ERNST. Ueber Complexe zweiten Grades, welche durch Flächenpaare zweiten Grades erzeugt werden. (Gekrönte Preisschrift.) München 1885. gr. 8°. 80 S.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

Mlle L. BORTNIKER. Sur un genre particulier de transformations homographiques. C. R. CIV. 771-773.

Als biaxial bezeichnet Herr Sylvester eine collineare Transformation, bei der homologe Punkte auf den Strahlen eines linearen Strahlensystems liegen. Die Frage, ob beliebige collineare Figuren durch Drehungen und Verschiebungen in biaxial-collineare Lage gebracht werden können, entscheidet Frl. B. in verneinendem Sinne. Collineare Figuren kann man nach Richelot so auf zwei rechtwinklige, fest mit ihnen verbundene Coordinaten-Systeme der X, Y, Z und x, y, z beziehen, dass für homologe Punkte

$$X=\frac{\lambda y}{z},\quad Y=\frac{\mu x}{z},\quad Z=\frac{\nu}{z}$$

ist, wobei λ, μ, ν bestimmte Constanten sind. Sollen die Figuren durch Verschiebungen und Drehungen in biaxial-collineare Lage

gebracht werden, so ist notwendige und hinreichende Bedingung $\nu = \lambda\mu$. Hierbei müssen stets die Z- und die z-Axe in dieselbe Gerade gelangen. Man erhält zwei unendliche Mannigfaltigkeiten biaxialer Beziehungen. Bei der einen sind Z- und z-Axe gleich, bei der anderen entgegengesetzt gerichtet. Durch den Abstand der Mittelpunkte, der in der einen Mannigfaltigkeit überhaupt, in der anderen aber nur unterhalb einer gewissen Grenze willkürlich ist, wird dann die gegenseitige Lage der Coordinatensysteme und damit die der beiden Axen der biaxial-collinearen Beziehung eindeutig festgelegt. Die eine Mannigfaltigkeit enthält zwei geschart-involutorische Beziehungen. E. K.

G. Darboux. Remarque sur la communication précédente. C. R. CIV. 773-777.

Herr D. geht, um Frl. Bortniker's Resultat zu bestätigen (vergl. das vorhergehende Referat), ebenfalls von den Richelot'schen Gleichungen aus. Wenn die Lage des einen Coordinatensystems gegen das andere fixirt ist, lassen die Gleichungen sich aufstellen, aus denen die Coordinaten der entsprechend gemeinsamen Punkte hervorgehen; die Zahl derselben muss unendlich gross sein. Für die z dieser Punkte ergiebt sich unter allen Umständen eine Gleichung vierten Grades. Es müssen also für zwei (Doppel-) Wurzeln dieser Gleichung die zugehörigen x, y unbestimmt werden. Dies führt Herrn D. auf Frl. Bortniker's Bedingung $\nu = \lambda\mu$ und auf die unendlich vielen Lagen, welche die Axen der X, Y, Z gegen die der x, y, z alsdann annehmen können. Wird eine Figur festgelegt, so bewegt sich ein Punkt der zweiten auf zwei Ellipsen. Irgend zwei collineare Figuren können durch eine homothetische und eine biaxial-collineare Transformation in einander übergeführt werden. E. K.

Cl. Servais. Sur la réversibilité de la transformation linéaire. Mathesis VII. 90-91.

Bei einer umkehrbaren linearen Transformati

die durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden ihre entsprechenden in Punkten, welche auf einer und derselben Geraden liegen. Folglich ist die einzige derartige lineare Transformation die harmonische collineare Transformation.

Mn. (Lp.)

CL. SERVAIS. Sur les transformations birationnelles quadratiques. Mathesis VII. 110-114, 129-134, 187-190.

Alle birationalen quadratischen Transformationen lassen sich in drei Kategorien einteilen, welche durch die folgenden Beziehungen definirt werden:

$xx' = yy' = zz'$ (trilineare Inversion);

$xx' = zz'$, $y' : y = z' : z$ (trilineare Halbinversion);

$xy' + x'y = mzz'$, $x : x' = z' : z$ (lineare Scheininversion).

Geometrisch kann man sie wie folgt deuten. Sind ein fester Punkt P und ein Kegelschnitt S gegeben, so entspricht einem Punkte M der zu diesem Punkte zugeordnete harmonische Punkt in Bezug auf die Durchschnittspunkte der Geraden PM mit dem Kegelschnitte S (Hirst'sche Transformation). Zerfällt der Kegelschnitt in zwei reelle oder in zwei conjugirt-imaginäre Geraden, so erhält man die Transformation zweiter Art. Liegt der Punkt P auf dem Kegelschnitte, so hat man die Transformation dritter Art.

Mn. (Lp).

W. MASSNY. Ueber einen besonderen Fall quadratischer Transformation in der Ebene. Pr. Gymn. Gross-Strehlitz. 20 S. 4°.

In der Ebene wird ein fester Kegelschnitt f und ein fester Punkt α angenommen; jedem Punkte X wird alsdann derjenige Punkt x zugeordnet, in dem sich die Polare von X und die Gerade αX schneiden. Als die drei Grundpunkte der quadratischen Transformation ergeben sich α und die beiden Berührungspunkte der von α an f zu legenden Tangenten.

R. M.

C. F. E. Björling. Zur Theorie der mehrdeutigen Ebenen-Transformation. Stockh. Vetensk. Bihang XIII.

Vom Hrn. R. de Paolis (Le trasformazioni piane doppie. Acc. R. dei Lincei (3) I; F. d. M. IX. 1877. 581) sind die (1, 2) deutigen Ebenen-Transformationen ausführlich behandelt, und es ist unter anderem gezeigt, dass, insofern Bedingungen für die Lage der Fundamentalpunkte nicht vorhanden sind, das Geschlecht p der Transformationscurven 1 nicht übersteigen kann. Durch quadratische Transformation kann man alle hieher gehörenden Transformationssysteme auf die beiden $p = 0$, $n = 2$, $\alpha_1 = 2$ und $p = 1$, $n = 3$, $\alpha_1 = 7$ zurückführen.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der allgemeinen $(1, \varrho)$-deutigen Transformation, doch nur unter der obengenannten Voraussetzung, dass die Fundamentalpunkte beliebig sind. In solchem Falle ist immer $p \leqq \varrho - 1$. Der Zweck der Abhandlung ist, zu beweisen, dass die Anzahl „irreductibler" Transformationen (d. h. solcher, die nicht mittels quadratischer auf niedere Ordnung zurückgeführt werden können) für gegebenes ϱ immer endlich ist. Eine Tafel giebt zuletzt alle solche Transformationssysteme für $\varrho \leqq 8$. Für den letzten ϱ-Wert ist ihre Anzahl 128, wovon 83 für $p = 7$. Bg.

L. Autonne. Sur les substitutions crémoniennes quadratiques. C. R. CIV. 767-770.

L. Autonne. Sur les groupes quadratiques crémoniens. C. R. CIV. 1422-1425.

L. Autonne. Sur les groupes cubiques Cremona d'ordre fini. C. R. CV. 267-270.

Bericht s. S. 141-142 dieses Bandes.

P. Kindel. Eine reciproke Zuordnung der [illegible] Elemente. Pr. Kölln. Gymn. Berlin. R. Gaertner. 22

Einem in der Ebene des Coordinatendreiecks

den Punkte P wird, wenn man z. B. den Schnittpunkt der Geraden Pe_1 und e_2e_3 mit s_1 bezeichnet, diejenige Gerade zugeordnet, in welcher die Schnittpunkte der Geraden e_2e_3 und s_2s_3, e_3e_1 und s_3s_1, e_1e_2 und s_1s_2 liegen. Die Ecken zweier, zu den Punkten P und P' gehörigen „Fusspunktdreiecke“ $(s_1s_2s_3)$ und $(s'_1s'_2s'_3)$ bilden ein Pascal'sches Sechseck. Die Geraden, welche den Punkten des demselben umbeschriebenen Kegelschnittes zugeordnet sind, schneiden sich in dem „charakteristischen Punkte“ des Kegelschnitts. Auf dieser Grundlage lässt sich, wie der Verfasser zeigt, die ganze Gruppe von Sätzen über Dreiecke mit ein- und umbeschriebenen Kegelschnitten sehr leicht analytisch ableiten. Die hierbei verwendeten Coordinaten sind natürlich identisch mit den Ableitungszahlen der Grassmann'schen Methode. Die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf den Raum führt analog auf die gegenseitige Zuordnung eines Punktes und einer Ebene in Bezug auf ein Coordinatentetraeder und durch Vermittelung der Flächen zweiten Grades auf Sätze über gewisse Curven und Flächen dritten Grades. Als Fundament dieser Zuordnung kann übrigens auch der von Schroeter aufgestellte, von Pisani bewiesene Satz in den Nouv. Ann. (3) IV, 474 betrachtet werden. (Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 616.) Schg.

A. del Re. Omografie che mutano in se stessa una certa curva gobba di 4⁰ ordine e 2ª specie, e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori. Torino Atti. XXII. 901-922.

Die rationale Raumcurve vierter Ordnung, für welche die vier stationären Ebenen paarweise sich vereinigen, und welche deshalb auch von der vierten Klasse ist, kann durch gewisse collineare und reciproke Raumtransformationen, von welchen Herr Cremona schon zwei angegeben hat, in sich selbst übergeführt werden. Der Herr Verfasser stellt sich die Aufgabe, alle derartigen Transformationen aufzustellen.

Die von Herrn Cremona benutzte Parameterdarstellung der

Curve C:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^4 : \omega^3 : \omega : 1$$

wird der Betrachtung zu Grunde gelegt und dann gezeigt, dass zwei Arten von collinearen Beziehungen die Curve in sich selbst überführen. Dabei entsprechen solche Punkte von C einander, deren Parameter ω und ω' folgenden Gleichungen genügen:

$$\text{(I)} \quad b\omega + c\omega' = 0, \qquad \text{(II)} \quad a\omega\omega' + d = 0.$$

Unter den Transformationen (I) giebt es ausser der Identität nur eine involutorische J, bei welcher $b = c$ ist. Sie führt auf ein geschart-involutorisches räumliches System, dessen Axen die Schnittlinie der beiden stationären Ebenen und die Verbindungslinie der Osculationspunkte der letzteren sind. Setzt man $b = \alpha c$, wobei α eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit ist, so hat man es zu thun mit cyklischen Transformationen, unter welchen die Fälle, wo $n = 3$ und $n = 4$ ist, von besonderer Bedeutung sind.

Die Transformationen (II) sind sämtlich involutorisch und führen auf geschart-involutorische Räume, deren Axen zwei Regelflächen dritter Ordnung erfüllen.

Das Product zweier gleichartigen Transformationen ist eine Collineation erster Art, das Product zweier ungleichartigen eine Collineation der zweiten Art. Es kann jede Collineation auf unendlich viele Arten als das Product zweier anderen betrachtet werden. Eine Collineation (II) verwandelt jede Collineation (I) in die inverse Collineation. Zwei Collineationen (I) sind immer vertauschbar.

Die Curve C entspricht sich selbst in einem Nullsystem $\mathfrak{P}$ der Art, dass jedem Punkte C seine Schmiegungsebene zugewiesen ist. Es ergeben sich somit zwei Arten von Reciprocitäten (I) und (II), durch welche die Punkte von C in Schmiegungsebenen von C übergeführt werden, je nachdem $\mathfrak{P}$ mit einer Collineation (I) oder (II) zusammengesetzt wird. Auch hier werden die Producte gleichartiger oder verschiedener Reciprocitäten untersucht. Unter den Reciprocitäten (I) giebt es zwei involutorische, von welchen die eine $\mathfrak{P}$ selbst ist, die a
Beide liefern Nullsysteme. Die Reciprocitäten (II) si

alle involutorisch und liefern räumliche Polarsysteme, deren Ordnungsflächen die ersten Polaren der Punkte von C in Bezug auf eine Fläche dritter Ordnung sind. Die Lagen dieser Flächen gegenüber C werden näher betrachtet. W. St.

A. DEL RE. Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti. Napoli Rend. (2) I. 167-172.

Anschliessend an eine frühere Arbeit über die rationale Raumcurve vierter Ordnung (s. das vorige Referat) untersucht der Herr Verfasser die reciproken Raumbeziehungen, durch welche die Punkte der Curve C in die C zweimal berührenden Ebenen übergeführt werden. Sind die Coordinaten von C gegeben durch:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^4 : \omega^3 : \omega : 1,$$

so können die Coordinaten der die Curve C zweimal berührenden Ebenen dargestellt werden durch:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : 4\omega : -8\omega^3 : 4\omega^4$$

oder:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = x_4 : 4x_3 : -8x_2 : 4x_1.$$

Wendet man auf diese Correlation die in dem früheren Aufsatze gefundenen Collineationen (I) und (II) an, so ergeben sich zwei Reihen von Raumcorrelationen, durch welche die Punkte der Curve in die doppelt berührenden Tangentialebenen übergeführt werden. Die zweite Reihe besteht aus Polarbeziehungen, deren Ordnungsflächen die ersten Polaren der Punkte von C hinsichtlich ∞^1 Flächen dritter Ordnung sind. Unter der ersten Reihe giebt es nur zwei Polarbeziehungen. Die Lage dieser Ordnungsflächen gegenüber C wird genauer untersucht. W. St.

R. D'EMILIO. Alcune osservazioni sulla projezione stereoscopica. Ven. At. (10) II. 71-76.

Sind O und O_1 zwei Projectionscentra, P_1 und P_2 die Bilder eines Punktes P auf einer Ebene π, so wird durch Bewegung des Punktes P auf einer Ebene eine homologe Correspondenz

zwischen den Punkten P_1 und P_2 begründet, die von Hrn. Cassani (Ven. Ist. Atti (6) III, F. d. M. XVIII. 505) als „stereoskopische Projection“ zur Lösung verschiedener Aufgaben verwendet worden ist. Der Verf. obiger Note untersucht nun die Correspondenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 für den Fall, dass P auf einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung variirt. Hierbei entsprechen im allgemeinen einem Punkte P_1 n Punkte P_2 und einer Geraden eine C_n. Diese hier noch etwas weiter ausgeführten Betrachtungen sollen fortgesetzt werden. Schg.

B. Conforme Abbildung.

H. M. Jeffery. On the converse of stereographic projection and on contangential and coaxial spherical circles. Lond. M. S. Proc. XVII. 379-409.

Bekanntlich ist die stereographische Projection der Kugel auf die Ebene eine Abbildung durch reciproke Radien. Der Herr Verfasser unterwirft nun die gegenseitigen Beziehungen der entsprechenden ebenen und sphärischen Figuren einer sehr eingehenden Untersuchung und wendet sie namentlich auf einige Berührungsprobleme an. Wesentlich Neues ist in der Arbeit nicht enthalten. A.

W. Koch. Die conforme Abbildung des hyperbolischen Paraboloids auf die Ebene. Diss. Greifswald. Berlin. Meyer u. Müller. 45 S. 8°.

Die beiden ersten Paragraphen enthalten eine ziemlich ausgedehnte Entwickelung zur Darstellung der Punkte eines hyperbolischen Paraboloids in elliptischen Coordinaten, d. h. in Krümmungsparametern. Es scheint dem Herrn Verfasser entgangen zu sein, dass diese Darstellung längst bekannt i[illegible] ...ch in den Lehrbüchern findet. (z. B. in Hoppe's Flä[illegible]

Im dritten Paragraphen ist alsdann die i[illegible] nete Aufgabe nach bekannten Methoden durch[illegible]

wird der Verfasser unter anderem auf die Function

$$\Omega(u) = \int_0^u \frac{k'^2 du}{\mathrm{cn}^2 u}$$

geführt, mit welcher er sich im § 4 genauer beschäftigt. Es zeigt sich hierbei u. a., dass $\Omega(u) = Z(u+k+k'i) - Z(k+k'i) - k'u$ ist, und dass $\Omega(u)$ eine ungerade eindeutige Function ist, welche sich für alle in Betracht kommenden Argumente in eine nach Potenzen von u fortschreitende convergente Reihe entwickeln lässt, während die analoge Function bei der Abbildung des Ellipsoids auf Integrale dritter Gattung führt. Der § 5 ist der Betrachtung specieller Fälle, namentlich der Abbildung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids gewidmet. A.

A. C. Laisant. Des rayons de courbure dans les transformations isogonales. S. M. F. Bull. XV. 39-41.

Ist $y = U+Vi$ und $x = u+vi$, und setzt man $y = \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine analytische Function bedeutet, so ist die Ebene der x conform (isogonal) auf die Ebene der y abgebildet.

Ist dann

$$\varphi'(x) = ae^{i\alpha}, \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = be^{i\beta},$$

ist ϑ der Richtungswinkel der Tangente einer Curve in der Ebene der x, ϱ der Krümmungsradius derselben und haben ϑ' und ϱ' die entsprechende Bedeutung für die Abbildung, so ist

$$\vartheta' = \alpha+\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{a}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + b\sin(\beta+\vartheta).$$

Aus dieser Formel lassen sich einige interessante Folgerungen ziehen, nämlich: Wenn durch einen Punkt der x-Ebene eine Schar von Curven gelegt ist, deren Krümmungsmittelpunkte für diesen Punkt auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen die Krümmungsmittelpunkte der Abbildungen ebenfalls auf einem Kegelschnitt. Besonders hervorzuheben sind folgende Fälle:

Alle Geraden, die durch einen Punkt der x-Ebene gehen, bilden sich ab in Curven, welche durch den entsprechenden Punkt

der y-Ebene gehen, und die Krümmungsmittelpunkte derselben für diesen Punkt liegen in einer Geraden.

Wenn die Krümmungsmittelpunkte der durch x gelegten Curven für den Punkt x auf einem Kegelschnitte liegen, der den Punkt x zum Brennpunkte hat, so findet das Analoge in der Abbildung statt. Im speciellen kann einer der beiden Kegelschnitte in einen Kreis übergehen. (Dieser speciellere Fall ist bereits früher von Transon (Nouv. Ann. (2) VIII, F. d. M. II. 1869. 472) untersucht. A.

C. A. Laisant. Sur les transformations non isogonales. S. M. F. Bull. XV. 103-106.

Der Herr Verfasser entwickelt einige Eigenschaften, welche einer beliebigen Abbildung einer Ebene auf eine andere zukommen. Dieselben sind aber bereits bekannt, und gelten überdies auch bei einer Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine andere. Sie beruhen nämlich einfach darauf, dass die Abbildungen zweier unendlich kleinen Flächenelemente an nicht singulären Stellen stets affin sind, und dies wiederum folgt ohne weiteres aus der Entwickelung nach Taylor, wenn man die Unendlichkleinen der zweiten Ordnung vernachlässigt. A.

Tissot. Lettre sur une note insérée au Bulletin. S. M. F. Bull. XV. 181.

Der Brief bezieht sich auf eine Note des Herrn Laisant: Sur les transformations planes non isogonales. Herr Tissot macht darauf aufmerksam, dass er denselben Gegenstand bereits vor längerer Zeit eingehend behandelt hat. A.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. L. Lagrange. Analytische Mechanik. Deutsch herausgegeben von H. Servus. Berlin. Springer. XXXI. u. 640 S. gr. 8°.

Der vorliegenden deutschen Ausgabe von Lagrange's „Mécanique analytique" ist die zweite Originalausgabe, welche der Verf. zum grösseren Teile noch selbst besorgt hatte, zu Grunde gelegt worden, die dritte von Bertrand veranstaltete ist indessen auch benutzt. Die Uebersetzung schliesst sich dem Texte wortgetreu an; doch hat der Herausgeber zuweilen Wörter und Sätze eingeschoben, sobald ihm dies zum Verständnisse nötig schien. Obschon der Plan des buchhändlerischen Unternehmens, dem das Buch angehört, nämlich einer populären Ausgabe älterer mathematischer Werke von hervorragender Bedeutung (vgl. F. d. M. XVII .1885. 200), dem Herausgeber zu diesem Verfahren Anlass gegeben hat, möchte Ref. doch dagegen protestiren. Damit der Leser weiss, was von Lagrange herrührt, und was Hinzufügung des Uebersetzers ist, müssen solche Zusätze als Fussnoten unter den Te[illegible]sen werden, wie dies in der Bertrand'schen Ausgabe g[illegible]. Es ist [illegible] ungefährlich, den Ausdruck von La[illegible]ssern [illegible] Referent hat nämlich manche

Zusätze beim Lesen dadurch entdeckt, dass die betreffenden Stellen unverständlich oder sogar fehlerhaft geworden sind. So ist gleich auf S. 7 in No. 4 die Darstellung der Lehre vom Hebel durch einen Einschub und durch Abweichung vom Original verdunkelt. Auf S. 295 ist von einer Grösse K die Rede, welche in Bezug auf die Grössen f, g, h, ... nur von der zweiten Dimension ist (à deux dimensions, was der Uebersetzer verdeutlichen zu müssen meint: „in Quadraten und Producten zu zweien"). Lagrange argumentirt weiter: „la quantité $\frac{2K\partial^2K-\partial K^2}{\partial f^2}$ sera nécessairement sans f, sa différentielle relative à f étant $\frac{2K\partial^3K}{\partial f^3}$ et par conséquent nulle." Aus diesem durchaus klaren, einfach verständlichen Satze macht der Herausgeber: „Da die Grössen f, g, h, . . . in dem Werte von K nur in Quadraten und Producten zu zweien vorkommen, muss die Grösse $\frac{2K\partial^2K-\partial K^2}{\partial f^2}$ notwendig frei von f sein. Es ist also das Differential dieser Grösse in Bezug auf f, nämlich $\frac{2K\partial^3K}{\partial f^3}$, gleich Null." Eine streng an den Wortlaut sich haltende Uebersetzung würde die sinnlose Verdrehung der Stelle vermieden haben.

Der Stil der Uebersetzung ist ungleich; während manche Seiten frei von Härten sind und ein echt deutsches Gepräge tragen, sind anderswo Verstösse gegen Stil und gegen angemessene Ausdrucksweise zu verzeichnen. Man vergleiche den Satz: „Das erstere beweist man, indem man die Bewegung, welche ein durch zwei Kräfte, die nicht im Gleichgewichte sind, getriebener Körper annehmen muss, betrachtet, und welche, da nur eine einzige Bewegung möglich ist, von einer Kraft herrühren muss (NB. peut être attribué à . . .), die allein auf ihn in Richtung seiner Bewegung wirkte." Ohne auf einzelne Missverständnisse und Ungenauigkeiten, die allerdings im ganzen Werke häufiger als wünschenswert vorkommen, grosses Gewicht zu legen, so muss Ref. auf Abweichungen von der hergebrachten Terminologie hinweisen. Die deutsche Mechanik kennt keine „variirende" Bewe-

gung, sondern nennt sie „ungleichförmig“; statt Grösse der Bewegung sagen wir „Bewegungsgrösse“, u. s. w. Die „méthode géométrique des premières et dernières raisons“ ist nicht eine „Methode der ersten und letzten Gründe“, sondern Newton's methodus rationum primarum et ultimarum, wo ratio = raison = Verhältnis, für den Nichtkenner dieser geschichtlichen Beziehung vielleicht als Exhaustionsmethode der Verhältnisse zu kennzeichnen.

Der kurze Lebensabriss, welchen der Herausgeber hinter dem Vorworte des Verfassers giebt, ist im wesentlichen ein Auszug, an manchen Stellen eine wörtliche Uebersetzung der „Notice sur la vie et les ouvrages de Lagrange“ von Delambre, die im ersten Bande der „Oeuvres complètes“ von Lagrange abgedruckt ist.

Lp.

J. G. MACGREGOR. An elementary treatise on kinematics and dynamics. London. Macmillan and Co. XVI+512 S.

Dieses Lehrbuch begreift alles in sich, was gewöhnlich unter der Bezeichnung der theoretischen Mechanik zusammengefasst wird, indem es die Kinematik, die Kinetik und die Statik enthält, und ist für Studirende bestimmt, deren Wissen sich noch nicht auf die Infinitesimalrechnung oder irgend einen Zweig der höheren Mathematik erstreckt. Der erste Teil des Bandes (S. 1-184) behandelt die Kinematik einschliesslich der Kinematik starrer Systeme und der Deformation. Der zweite Teil (S. 187-504) ist zwar Dynamik betitelt, aber der üblichen Einteilung in Kinetik und Statik ist nicht beigetreten, indem statische Probleme durchweg als Grenzfälle kinetischer angesehen und die Gleichgewichtsbedingungen aus denen der Bewegung abgeleitet sind. Newton's Bewegungsgesetze sind zur Grundlage der Darstellung der Dynamik gemacht, und eine grosse Frische der Behandlung zeichnet die verschiedenartigen Capitel aus. (Vgl. auch die Anzeige des Werkes durch den Uebersetzer des Referats in den Verhandl. der Berl. Phys. Ges. VII. 17-19. 1888). Gbs. (Lp.)

O. FABIAN. Abriss der analytischen Mechanik als Einleitung in die theoretische Physik. Lemberg 1886. 8°. 239 S. (Polnisch.)

Der Verfasser hat beabsichtigt, ein Compendium zu liefern, welches das zum erfolgreichen Studium der theoretischen Physik aus der Mechanik Erforderliche enthalten soll. Im ersten Teil seiner Schrift behandelt er die Mechanik des Punktes und zwar zuerst die Kinematik und dann die Dynamik desselben. (§ 1 Definition der Kraft und die darauf sich gründenden mechanischen Begriffe und Definitionen, § 2 die Bewegungsgleichungen.) Im zweiten Teil behandelt der Verfasser die Mechanik des Punktsystems, nämlich die Kinematik (§ 1 Bewegung eines festen Körpers, § 2 relative Bewegung, § 3 Bewegung eines veränderlichen Systems) und die Dynamik des Punktsystems (§ 1 die auf ein starres Punktsystem wirkenden Kräfte, § 2 die Principien der Dynamik, § 3 die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines festen Körpers, § 4 die nach dem Newton'schen Gesetz wirkenden Kräfte, § 5 die Hindernisse der Bewegung).

Das Werk empfiehlt sich für Studirende, die durch dasselbe einen recht guten Einblick in die wichtigsten Sätze der analytischen Mechanik gewinnen können. Dn.

J. PETERSEN. Dynamik. Forelaesninger holdte ved den Polytekniske Laereanstalt. Kjoebenhavn. 194 S. 8°.

J. PETERSEN. Lehrbuch der Dynamik fester Körper. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. VON FISCHER-BENZON. Kopenhagen. Höst & Sohn. 213 S. 8°.

Dem Lehrbuche der Statik fester Körper (F. d. M. XIV. 1882. 731) und der Kinematik (F. d. M. XVI. 1884. 759) hat Hr. Petersen jetzt ein nach denselben Grundsätzen gearbeitetes Lehrbuch der Dynamik folgen lassen. Nach einer Einleitung über die Grundbegriffe behandelt das Buch in zehn Capiteln der Reihe nach die

geradlinige und die krummlinige Bewegung eines freien Teilchens, die Bewegung eines gebundenen Punktes, die allgemeinen Principien für die Bewegung zusammengesetzter Systeme, das Trägheitsmoment, den Stoss, die Bewegung eines Körpers mit einer festen Axe, die Bewegung eines einzelnen Körpers, die relative Bewegung und vermischte Untersuchungen. Der Verfasser hat die Auswahl des Stoffes mit grossem Geschick getroffen und durch knappe Darstellung innerhalb des engen Rahmens eine bemerkenswerte Reichhaltigkeit erzielt, so dass alle Dinge berührt werden, die in einer Vorlesung über Dynamik vorzukommen pflegen. Geradezu erstaunlich ist z. B. die Fülle des Stoffes, welchen der Verfasser in dem vierten Capitel über die allgemeinen Principien bewältigt hat. Wie in den beiden früheren Leitfäden, so sind auch dieses Mal jedem Capitel Uebungsaufgaben ohne Lösungen angehängt; den schwierigeren sind Andeutungen über die Lösungen zugefügt. Diese Aufgaben, unter denen manche neue und interessante enthalten sind, bilden eine wertvolle Zugabe der Petersen'schen Lehrbücher und dürften ihnen viele Freunde verschaffen. Manche leicht lösbare, welche nur zur Beleuchtung der vorgetragenen Sätze dienen, eignen sich zu einer ganz elementaren Behandlung. Lp.

W. K. Clifford. Elements of dynamic: an introduction to the study of motion and rest. Part I. Kinematic. Book IV and appendix. London. Macmillan and Co. IX + 120 S.

Das Buch ist eine Fortsetzung der „Elements of dynamic“, die 1878 noch zu Lebzeiten des Verfassers erschienen. Das vorliegende Werk ist durch Herrn Tucker als kundigen Herausgeber veröffentlicht, hat jedoch leider ein sehr fragmentarisches Aussehen. Die Seiten 1-56, welche aus drei Capiteln mit den Ueberschriften Massenmittelpunkt, zweite Momente und Moment bestehen, sind ungefähr in der Gestalt gedruckt, in welcher Clifford sie hinterlassen hat. Der übrige Teil des Buches setzt sich aus mannigfachen abgerissenen Bestandteilen des Manuscriptes

zusammen, die zur Einfügung in den vollständigen Lehrgang bestimmt zu sein schienen. Proben von den in den Klassenprüfungen durch Clifford vorgelegten Fragen werden als charakteristisch für sein Werk mitgegeben, ebenso ein Register für beide Bände. Gbs. (Lp.)

G. Fumagalli. Principii di dinamica. Torino. Löscher. 8°. IV u. 120 S.

Ein elementares, aber ausgezeichnetes Lehrbuch der Dynamik zum Gebrauche an den technischen Mittelschulen. Titel der Abschnitte: Einleitung. I. Die drei Gesetze der Bewegung. II. Die Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes. III. Die Erhaltung der Flächen. IV. Die Erhaltung der Energie. V. Die gleichmässig veränderliche Bewegung; die harmonischen einfachen Schwingungen. VI. Die Centralbewegung auf einem Kegelschnitte. VII. Die Schwere auf der Erdfläche. VIII. Die universelle Gravitation. IX. Das Weltsystem. Vi.

P. Dulos. Cours de mécanique, à l'usage des Écoles d'Arts et Métiers et de l'enseignement spécial des Lycées. 5 vol. Paris. Gauthier-Villars.

Von diesem grossen Werke sind früher erschienen Bd. IV (Mechanische Wärmetheorie, 1879), Bd. V (Specielle Lehre von den Dampfmaschinen, 1882), Bd. I (Theoretische Mechanik, 2te Aufl. 1885). Von den Bänden II (Technische Mechanik) und III (Hydraulik) liegen im Berichtsjahre neue Auflagen vor. Bei dem Leser werden nur die Kenntnisse der Elementarmathematik vorausgesetzt. (Verlagskatalog von Gauthier-Villars, I u. II trim. 1887). Lp.

J. B. Lock. Dynamics for beginners. London. Macmillan and Co. 178 S. (1887).

J. B. Lock. Elementary statics. London. Macmillan and Co. VIII + 248 S. (1888).

R. H. Pinkerton. Dynamics and hydrostatics. London. Blackie and Son. 276 S. (1888).

Bücher für Anfänger. Beim ersten ist die Hauptneuigkeit die Einführung von Namen für verschiedene Einheiten. So ist die Geschwindigkeit (velocity) von einem Fuss in der Secunde ein „velo“ genannt, eine Beschleunigung von einem Fuss in der Secunde ein „celo“. Neuerdings haben ja viele Erörterungen über die Annahme gewisser Einheiten stattgefunden, und da ein Ausschuss der Gesellschaft zur Verbesserung des geometrischen Unterrichts den Gegenstand in seiner Tragweite für den Elementarunterricht augenblicklich in Erwägung zieht, so dürfen wir auf ein völlig befriedigendes Ergebnis in Bezug auf den Gegenstand hoffen. Gbs. (Lp.)

E. Kohlrausch. Physik des Turnens. Hof. R. Lion. VIII. u. 68 S. 8°. Mit 88 Fig.

Das vorliegende Büchlein soll dem Turnlehrer die Kenntnis der beim Turnen in Betracht kommenden Naturkräfte und Bewegungsgesetze vermitteln. Da es sich hierbei im wesentlichen um die Mechanik fester Körper handelt, so haben wir es mit einem populären Abriss der Mechanik zu thun, deren Gesetze sofort immer auf die bezüglichen turnerischen Uebungen angewandt werden. Sätze, welche anderen Gebieten der Physik angehören, kommen kaum vor oder werden, wie im Anhange die Lehre von der Verwandlung der Energie, nur eben gestreift. Die Zusammenstellung zeugt von der Sachkunde des Verfassers, und die erläuternden Figuren dürften den Freunden des Turnens sehr willkommen sein. Die Darstellung schliesst sich im allgemeinen der Sprache der Wissenschaft an, nimmt jedoch mit Rücksicht auf den Leserkreis, für den das Buch berechnet ist, einen popularisirenden Ton an. Dadurch sind wohl manche Ungenauigkeiten und Irrtümer veranlasst, die dem Werke anhaften und deren sorgfältige Ausmerzung bei einer folgenden Auflage wünschenswert erscheint.

Falsch ist z. B. der Satz über einen rotirenden Körper (S. 8,

Ende von § 20): „Die Gesamtwirkung aller dieser Centrifugalkräfte ist eine solche, als wäre die ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt“. Lp.

Ph. Gilbert. Bibliographie. Mathesis VII. 156-160.

Bericht über die von Hrn. Darboux zu der Mechanik von Despeyrous hinzugesetzten Noten. Mn. (Lp.)

H. Poincaré. Cours de Mécanique, année 1885-86. Partie I. Cinématique pure. Mécanismes. Partie II. Potentiel. Mécanique des fluides. Paris. 4°.

D. Bobylew. Lehrbuch der analytischen Mechanik. Zweite Aufl. I. Kinematik. St. Petersburg 1886. 281 S. u. 4 Taf. II. Mechanik des materiellen Punktes. 1887. 304 S. u. 1 Taf. (Russisch.)

M. Ferrari. Lezioni di meccanica razionale. Napoli.

J. J. Gray and G. Lowson. The elements of graphical arithmetic and graphical statics. London and Glasgow. William Collins, Sons and Co. XIII + 110 S. (1888.)

Ein gutes elementares Lehrbuch über einen Gegenstand, der im Englischen noch nicht weiter vertreten ist. Gbs. (Lp.)

A. B. W. Kennedy. The mechanics of machinery. London. Macmillan and Co. XV + 652 S. (1886.)

Anzeige in Nature XXXVII. 195-196. Gbs.

J. Lubieński. Mechanik. Erster Band: Theoretische Mechanik. Warschau. (Polnisch.)

Ein ohne Benutzung der höheren Mathematik verfasstes Lehrbuch. Dn.

J. KRAMERIUS. Repetitorium aus Geometrie und Mechanik. Wien. 173 S.

C. NEUMANN. Grundzüge der analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper. Leipz. Ber. 153-190.

Es giebt in der Mechanik gewisse Principien (wie z. B. das der virtuellen Verrückungen und das d'Alembert'sche Princip), die man nur höchst mangelhaft zu beweisen im Stande ist. Der Verfasser zeigt, wie man unter Vermeidung derartiger Principien die Mechanik construiren kann, indem man dabei ausgeht von drei bestimmten und einfachen Hypothesen. Diese Hypothesen sind repräsentirt durch das Trägheitsgesetz, das Gesetz des Parallelogramms und das Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction. N.

R. F. MUIRHEAD. The laws of motion. Phil. Mag. (5) XXIII. 473-489.

Dieser Aufsatz gewann den zweiten Smith'schen Preis zu Cambridge im Jahre 1886. Das Ziel desselben ist, in möglichst klarer Weise den besten vorhandenen Begriff der Wissenschaft der Dynamik festzustellen, einen Begriff, der versteckt in der Denk- und Schlussweise der besten neueren Meister enthalten ist. Die Kritik richtet sich fast ausschliesslich auf Newton's Entwurf der dynamischen Principien. Der folgende Auszug ergiebt die Grundlage der Stellung des Verfassers: „Wir sind jetzt zu dem Schlusse gekommen, dass der Versuch zur Festlegung der Bewegungsgesetze vermittelst einer Reihe vereinzelter Definitionen und Axiome eitel ist. Wir haben gefunden, dass Newton's erstes Bewegungsgesetz nicht festgelegt werden kann, bis wir den Begriff eines gewissen Bezugssystemes haben, dessen

Definition sowohl die Kenntnis des ersten Gesetzes in sich schliesst als auch die Definition der Kraft, u. s. w. Wir haben mithin eingesehen, dass die erfahrungsmässige Grundlage der Dynamik als eine organische Theorie oder als eine Hypothese hingestellt werden müsste. Wir haben es als passend gefunden, eine Wissenschaft der abstracten Dynamik zu gestalten, die eine verallgemeinerte Kinematik ist, bloss von Raum- und Zeitabmessungen abhängt, aber die Vorstellungen von Kraft und Masse (abstract) in sich schliesst." In einer dem Aufsatze angehängten Note merkt der Verfasser an, dass Kirchhoff in seiner Mechanik eine Ansicht zu vertreten scheint, die der im Aufsatze vorgetragenen ähnelt. Gbs. (Lp.)

J. M. de Tilly. Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en mécanique. Belg. Bull. (3) XIV. 975-1020.

Kritische Prüfung der Anschauungen de Saint-Venant's und Tait's über die Principien der Mechanik und über den Lehrgang für diese Principien. 1) Unter Ausschluss des Begriffs der Kraft und unter Beibehaltung desjenigen der Beschleunigung nach de Saint-Venant kann die Darlegung der Principien der Mechanik in logischer und strenger Weise erfolgen. 2) Man kann auf diesem Wege noch weiter gehen und die theoretische Mechanik als die Darstellung der Gesetze gleichzeitiger Aenderungen von Gruppen aus vier Grössen (Zeit, Coordinaten eines Punktes) ansehen, die an einen constanten Coefficienten (die Masse) gebunden sind. 3) Wissenschaftlich ist diese Darstellung von Nutzen, weil sie in der Mechanik eine bessere Unterscheidung ermöglicht zwischen dem, was der Erfahrung entspringt, und dem, was eine logische Folge von Grundsätzen oder Forderungssätzen ist, die als Ausgangspunkt zugegeben und aus der Erfahrung durch Idealisation abgezogen sind. 4) Beim Unterrichte empfiehlt es sich für die Mehrzahl der Schüler, bei der Untersuchung der geringsten Anzahl erster Principien der Mechanik nicht so hoch aufzusteigen. Wahrheiten, welche einen halb-experimentellen, halb-logischen Ursprung haben, deren Wesen dem

Begriffsvermögen der meisten zugänglicher sind, müssen als Ausgangspunkt dienen, aber das in den Händen der Schüler befindliche Lehrbuch muss als Note oder Anhang die streng wissenschaftliche Darstellung der Mechanik enthalten. Beim Unterrichte soll man also den Kraftbegriff beibehalten, indem man immerhin den Schülern die Möglichkeit der Einsicht lässt, wie man den Gebrauch dieses Begriffes auf das stricte Minimum reduciren kann. 5) Der Energie-Begriff, den Hr. Tait anstatt des Kraftbegriffs in die theoretische Mechanik einführen will, ist viel weniger klar. Wie soll man ihn erklären für den Fall eines Drucks, den keine sichtbare Wirkung begleitet? Ausserdem hat das Princip von der Erhaltung der Energie nur dann einen Sinn, wenn man die virtuelle Energie erklärt, und diese letztere hat kein actuelles Dasein und ist ein mathematisches Wesen, das man der Erkenntnis nur nahe bringen kann, wenn man wenigstens auf den Begriff der Beschleunigung zurückgreift. 8) Duhamel hat mit seinem Ausspruche Recht, dass man ein System ohne Translation nicht definiren kann; bei der Translation ist alles relativ. Die Bewegung und die absolute Ruhe sind für uns undefinirbar. 9) Mit der Rotation verhält es sich anders; denn wenn bei ihr alles relativ wäre, was würden dann die Versuche mit den frei fallenden Körpern bedeuten (Bergwerk zu Freiberg), mit dem Foucault'schen Pendel und Gyroskop? Die Frage, ob die Erde oder das Fixstern-System sich umdreht, wäre eine sinnlose, wenn man nur relative Bewegungen darunter verstände. Die Antwort würde lauten, jedes der beiden Dinge drehe sich in Bezug auf das andere, und dies sei alles, was man wissen könne. Augenscheinlich ist dem nicht so. 10) Das Trägheits-Princip soll man so aussprechen: Wenn keine Kraft auf einen materiellen Punkt einwirkt, so bleibt er in Ruhe oder bewegt sich mit gleichförmiger Bewegung auf einer festen und unbeweglichen Geraden. Es setzt also den vorgängigen Begriff absoluter Unbeweglichkeit voraus; diese absolute Unbeweglichkeit kann man dem Fixsternsysteme zuschreiben; denn nur wenn man dieselbe zugiebt, hört der Foucault'sche Pendelversuch auf, bedeutungslos zu sein. 11) Der Begriff der Kraft oder der des

freien Punktes kann den der absoluten Unbeweglichkeit in einer wissenschaftlichen Darstellung der theoretischen Mechanik ersetzen; anders verhält es sich jedoch mit den Begriffen der Beschleunigung und der Energie, welche nur in der Mechanik der relativen Bewegung einer Definition fähig sind. 12) Die Vorstellung der Kraft ist ferner zur Erklärung der Einwirkung der freien Willensäusserungen auf die materielle Welt unerlässlich (so lange eine Theorie ihres Eingreifens, ähnlich wie die von Hrn. Boussinesq, durch die Erfahrung nicht aufgestellt ist). In Wirklichkeit ergiebt sich nämlich der Zustand des Weltalls in jedem Augenblicke nicht einfach aus seinem Zustande im vorangehenden, wie Laplace behauptet hat, sondern auch aus den Aenderungen, welche von den Naturgesetzen hineingetragen werden, die ihre Einwirkung innerhalb der beiden Augenblicke ausgeübt haben, und aus dem unaufhörlichen Eingreifen von Willensmächten, die dem Stoffe entgegentreten und seine gewöhnlichen Gesetze abändern. In den dann folgenden Noten dieser bemerkenswerten Abhandlung giebt Hr. de Tilly, ausser verschiedenen bibliographischen Nachweisungen, einen Ueberblick über die Art, wie er die Principien der theoretischen Mechanik auf das Princip der Unbeweglichkeit bei der Rotation zurückführt; er zeigt auch, wie die Principe der Bewegung des Massenmittelpunktes, der Flächen, der lebendigen Kraft im ganzen Weltall trotz der Einwirkung der Mächte des freien Willens wahr bleiben können; es genügt hierzu die Annahme, dass diese wie Kräfte an mehreren Punkten wirken. Mn. (Lp.)

DE FREYCINET. Note sur certaines définitions de Mécanique et sur les unités en vigueur. C. R. CV. 903-910.

Durch ähnliche Ueberlegungen wie auf dem Gebiete der Wärmelehre, der Elektricität und der Elasticität ist der Verf. dazu geführt, die Masseinheiten der Mechanik wie folgt zu definiren: „Dynamische Capacität“ ist die Eigenschaft der Körper, vermöge deren sie mehr oder weniger Kraft oder dynamische Einwirkung verbrauchen, um in derselben Zeit dieselbe Geschwindigkeit zu erlangen. Wird die dynamische Capacität des Wassers

als Einheit genommen, so wird diejenige eines anderen Körpers durch die Zahl für sein specifisches Gewicht ausgedrückt. „Dynamie“ oder „Krafteinheit“ ist die Kraft, die man anwendet, um einem Kubikdecimeter Wasser in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit zu erteilen. „Dynamische Grösse“ eines Körpers von beliebigem Volumen ist das Product aus seiner dynamischen Capacität und aus seinem Volumen. „Masse“ heisst der Stoff der Körper, wenn man ihn unter dem blossen Gesichtspunkte der Bewegung betrachtet. Zwei Massen werden als gleich angesehen, wenn sie dynamisch äquivalent sind. Bei gleichem Volumen sind die Massen den specifischen Capacitäten proportional. Die Dichtigkeit ist der specifischen Capacität gleich. Nachdem so diese Begriffe unabhängig von der Schwere festgestellt sind, schliesst man durch Beobachtung, dass die Schwerkraft proportional der Masse wirkt, dass daher das Kilogramm (für Paris) sowohl als Masseneinheit als auch als Krafteinheit dienen kann. Nunmehr wird als Längeneinheit die Grösse $g = 9{,}808$ Meter vorgeschlagen, damit die Masseneinheit durch die Zahl 1 dargegestellt werden könne. Ohne die weiteren Ueberlegungen des Verfassers mitzuteilen, stellen wir nach seinem Vorgange nur noch die von ihm gewünschten Einheiten zusammen: Längeneinheit ist die Länge der Geschwindigkeit, welche ein im luftleeren Raume zu Paris frei fallender Körper nach Verlauf einer Secunde mittlerer Zeit erlangt. Diese Einheit ergiebt eine Verkehrseinheit durch ihr Zehntel = 0,98 m ungefähr. Volumeinheit ist der Würfel, dessen Kante gleich 0,01 von der Längeneinheit ist, also etwa 0,94 Liter. Masseneinheit ist die in der Volumeinheit enthaltene Wassermasse (von der Temperatur $4^{0},1$). Gewichtseinheit ist das Gewicht der Masseneinheit zu Paris. Krafteinheit ist gleich Gewichtseinheit. Die anderen Einheiten sind hieraus abzuleiten.

Der Verf. verhehlt sich nicht die praktischen Bedenken, welche der Aenderung des metrischen Systems entgegenstehen, möchte aber seine Einheiten in den Unterricht der Mechanik einführen. Möge es in Paris geschehen; für andere Oerter ist die Massregel weder bequem noch dringlich. Lp.

L. Henneberg. Ueber das Princip der virtuellen Verrückungen und das Princip von d'Alembert. Civiling. XXXIII. 93-96.

J. J. Weyrauch. Ueber das Princip der virtuellen Verrückungen. Civiling. XXXIII. 185-190.

In einer Besprechung der „Statik der starren Systeme" von L. Henneberg (F. d. M. XVIII. 1886. 802) hatte Herr Weyrauch es als unbefriedigend bezeichnet, dass das Princip der virtuellen Verrückungen, d. h. die Gleichung:

$$(1) \qquad \Sigma(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0,$$

welche gewöhnlich aus d'Alembert's Princip:

$$(2) \qquad \Sigma\left(\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} - X_i\right)\delta x_i + \left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - Y_i\right)\delta y_i + \left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} - Z_i\right)\delta z_i\right) = 0$$

hergeleitet werde, als Hypothese aufgestellt sei.

Dem gegenüber hebt Herr Henneberg hervor, dass die zweite Gleichung nicht bewiesen sei, und dass also eine Folgerung aus derselben nicht als Beweis gelten könne.

Herr Weyrauch bemerkt, dass er von einem Beweise nicht gesprochen habe, dass man es aber keinesfalls als unrichtig bezeichnen dürfe, wenn in „geschätzten Lehrbüchern der Mechanik" eine Herleitung des Satzes als Beweis bezeichnet werde, da ja jeder Beweis an Voraussetzungen geknüpft sei. Herr Weyrauch versucht dann selbst eine Herleitung des Princips, welche hier übergangen werden kann. Es muss aber hervorgehoben werden, dass Herr Weyrauch die Tragweite der Gleichung (2) beträchtlich unterschätzt, wenn er behauptet, dass die Gültigkeit des Princips davon abhängig sei, ob die Normalcomponenten der virtuellen Verrückungen gegen die Hindernisse gleich Null sind oder nicht, dass dieselbe also aufhöre, wenn bewegliche Hindernisse vorhanden sind. Ein einfacher Hinweis auf das Beispiel einer Bewegung materieller Punkte in einer Röhre, welche selbst um einen Punkt drehbar ist, genügt um das Gegentheil dieser Behauptung als richtig hinzustellen. Die Behauptung, dass solche Fälle von technisch nicht geschulten Mathematikern

unbeachtet geblieben seien, ist ebenso unrichtig. Die moderne Behandlung des Problems der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit beruht lediglich auf der geschickten Anwendung des Princips der virtuellen Verrückungen, und doch ist das Hindernis der freien Flüssigkeitsbewegung (der feste Körper) beweglich. Meines Wissens haben sich bisher keine Techniker, wohl aber Physiker und Mathematiker, die der Technik völlig fern stehen, an der Discussion der Frage beteiligt. F. K.

R. Heger. Das Parallelogramm der Bewegungen und der Kräfte. Pr. Wettiner Gymn. Dresden. 33 S. u. 2 Taf. 4°.

Um die betreffenden Sätze als unbeweisbare Grundsätze der Mechanik zu kennzeichnen, führt der Verf. die bezüglichen Stellen aus den ersten Autoren über diesen Gegenstand ausführlich vor, nämlich aus Stevin, Galilei, Roberval, Varignon, Newton, Euler. Bei allen Forschern werden die Vorzüge und die Mängel hervorgehoben und die von Dühring gefällten bezüglichen Urteile erörtert; im Anschlusse an Varignon werden auch die neueren Darstellungen bei Resal und Helm kritisirt. Zuletzt fasst der Verf. seine Ansicht in vier Thesen zusammen und giebt danach einen kurzen Abriss der Einleitung in die Mechanik für Schulen. Der erste historisch-kritische Teil ist als wertvoll der Beachtung zu empfehlen. Lp.

Piarron de Mondésir. Sur la force, le principe d'Alembert, l'équation de Lagrange, le principe moderne de la conservation du travail transformé. Ing. civ. II. 191, 361, 475.

Der Verfasser geht davon aus, dass die Kraft F gleich der Ableitung der Bewegungsgrösse Mv sei; er bemängelt jedoch, dass die Masse allgemein als unveränderlich angenommen werde, und setzt daher abweichend vom gewöhnlichen Gebrauch

$$F = M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt}.$$

Wie dies zu verstehen sei, geht aus dem ersten vom Verfasser behandelten Beispiel hervor; über eine Rolle ist ein gewichtsloser Faden gelegt, welcher beiderseits eine Kette trägt, deren unteres Ende auf einer Unterlage ruht. Diejenige Seite, auf welcher ein schwereres Stück hängt, wird so lange mit steigender Geschwindigkeit sinken, bis eine Gleichgewichtslage erreicht ist; dann wird die Geschwindigkeit abnehmen, bis endlich die andere Seite anfängt zu sinken, u. s. f. Hier werden als veränderliche Massen die hängenden Stücke der Ketten betrachtet. Die Bestimmung der Schwingungen wird dann mit dem oben angedeuteten Princip des Verfassers ausgeführt. Referent hat allerdings nicht zu erkennen vermocht, welche Vorteile die Auffassung des Verfassers gegenüber der Anwendung der gewöhnlichen Principien der Mechanik gewährt.

Ist α die Grösse einer Ausflussöffnung, V die Geschwindigkeit, ϱ die Dichtigkeit einer Flüssigkeit, g die Gravitationsconstante, so nennt der Verfasser den Ausdruck

$$F = \frac{\alpha \varrho V^2}{2g}$$

die „Kraft des ausfliessenden Strahles“. Dass dieser Ausdruck, wenn man mit dem Verfasser Torricelli's Formel für V zu Grunde legt, gleich dem Druck ist, welchen die verschlossene Oeffnung erleiden würde, ist leicht zu übersehen, und der Weg von drei Seiten, den der Verfasser hierauf verwendet, scheint uns für die Gewinnung des Resultates etwas lang.

Ein weiteres Beispiel bildet die mathematische Grundlage einer interessanten experimentellen Bestimmung eines Trägheitsmomentes. Es sei M die Masse eines Rades, K sein Trägheitshalbmesser, ω seine anfängliche Winkelgeschwindigkeit. Das Rad trägt einen gewichtslosen Faden, an dessen Ende eine zunächst auf ebener Unterlage ruhende Kette befestigt ist. Indem das Rad sich dreht, wird ein immer grösseres Stück der Kette aufgehoben und dadurch die Geschwindigkeit mehr und mehr verzögert. Ist λ die Länge des aufgehobenen Kettenstückes in dem Moment, wo Ruhe eintritt, so ist die gesamte ursprünglich vorhandene kinetische Energie $\frac{1}{2}MK^2\omega^2$ dazu verwandt, um den

Schwerpunkt der aufgehobenen Kettenmasse $\mu\lambda g$ auf die Höhe $\frac{1}{2}\lambda$ zu heben, d. h. es ist

$$\tfrac{1}{2}MK^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}\mu\lambda^2 g \quad \text{oder} \quad K = \frac{\lambda}{\omega}\sqrt{\frac{\mu g}{M}}.$$

Man sieht, dass auch diese Aufgabe sich vollständig ohne das von dem Verfasser aufgestellte Princip der veränderlichen Massen erledigen lässt. F. K.

M. Lévy. Sur le principe de l'énergie. Nouv. Ann. (3) VI. 501-525.

Eine Vorlesung über die ersten Begriffe und Sätze in der Lehre von der Energie; zuerst im Jahre 1880 am Collège de France, später teilweise in der École centrale des Arts et Manufactures in dieser Fassung gehalten. Lp.

J. Hundhausen. Zum Begriff der Kraft. Hamm. 31 S. 8°.

E. Hvalgren. Paradoxa mathematica. Mensura speculativa sive systema metricum eiusque consequentiae et extremitates. Varberg. 8 S. 4°.

Capitel 2.

Kinematik.

A. Schönflies. Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig. Teubner. VI u. 194 S. (1886).

In dem vorliegenden Lehrbuch wird eine systematische Entwickelung der kinematischen Geometrie gegeben. Ohne die Begriffe „Geschwindigkeit“ und „Beschleunigung“ in die Betrachtung

einzuführen werden die geometrischen Gesetze, welche sich bei der Bewegung eines räumlichen Systems gegen ein anderes darbieten, rein aus den gegenseitigen Lagen abgeleitet, welche die Systeme der Reihe nach gegen einander einnehmen. Besonders fruchtbar für die Entwickelung dieser Gesetze erweist sich der Gedanke, mit der Bewegung eines Systems σ gegen ein System σ' zugleich die indirecte Bewegung, nämlich die des Systems σ' gegen das System σ, zu verknüpfen; gerade hierdurch gelingt es dem Verfasser, wechselseitige geometrische Verwandtschaftsverhältnisse herzustellen, welche eine Einsicht in die Natur der Probleme leicht und zweckmässig vermitteln.

Das erste Capitel beschäftigt sich mit der Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene. Indem zunächst zwei Lagen σ_0 und σ_1 des Systems σ gegen das System σ' betrachtet werden, wird der Blick auf das System der Mittelpunkte der Sehnen gelenkt, welche homologe Punkte von σ_0 und σ_1 verbinden. Dieses System ist ähnlich mit σ_0 und hat den Drehpunkt von σ_0 und σ_1 zum selbstentsprechenden Punkte. Das Verwandtschaftsverhältnis dieser beiden Systeme vermittelt leicht die Erkenntnis derjenigen Gesetze, welche sich auf zwei consecutive Lagen des Systems σ beziehen. Nachdem die Bewegung von σ gegen σ', sowie von σ' gegen σ, auf die rollende Bewegung einer Curve auf einer anderen, also auf die Bewegung der Polcurven, zurückgeführt ist, wendet sich der Verfasser zu drei Lagen des Systems σ gegen σ'. Durch drei Homologiepunkte eines Punktes A in den drei Lagen σ_0, σ_1, σ_2 des Systems σ führt ein Kreis, dessen Centrum als ein Punkt A' des Systems σ' aufgefasst werden kann. Bei der umgekehrten Bewegung entspricht A' in den drei Lagen σ'_0, σ'_1, σ'_2 des Systems σ' in gleichem Sinne der Punkt A von σ. Die in dieser Weise durch A und A' aufeinander bezogenen ebenen Systeme σ und σ' stehen in quadratischer Verwandtschaft; jeder Geraden in σ entspricht ein Kegelschnitt in σ', welcher durch die drei Drehungscentra der directen Bewegung hindurchgeht, und umgekehrt, jeder Geraden in σ' ein Kegelschnitt, welcher die drei Drehungscentra der indirecten Bewegung in sich hat. Diese quadratische

Verwandtschaft führt auf einfache und durchsichtige Weise zur Theorie der Wendekreise und der Wendepole für die directe und indirecte Bewegung der Systeme σ und σ'. Mit ihrer Hülfe werden, wenn die Bewegung eines Systems σ durch die Bahnen zweier Punkte desselben gegen σ' bestimmt ist, der Drehungspol, die Polcurventangente, die Wendekreise und der Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines beliebigen Systempunktes aus den gegebenen Elementen durch Construction abgeleitet. Beispiele erläutern die Bedeutung der gewonnenen allgemeinen Ergebnisse.

Vier Lagen des Systems σ stellen den Verf. vor die Frage, ob es Punkte in σ giebt, welche in den vier Lagen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 auf einem und demselben Kreise liegen. Diese Punkte bilden, wie Burmester zuerst gezeigt hat, eine Curve dritter Ordnung K^3; dieselbe führt durch die sechs Drehungspole, welche die vier Lagen bestimmen, und durch die imaginären Kreispunkte. Die Mittelpunkte der Kreise, welche den Punkten von K^3 entsprechen, bilden eine in σ' gelegene Curve dritter Ordnung $K^{3\prime}$; diese gewinnt bei der umgekehrten Bewegung dieselbe Bedeutung, welche K^3 bei der directen Bewegung besitzt. Nachdem hiermit über die Punkte stationärer Krümmung eine Einsicht gewonnen ist, schreitet die Entwickelung zu der Krümmung der von Systemcurven umhüllten Enveloppen fort.

Umhüllt eine Systemcurve $\varkappa$ eine Curve $\varkappa'$, so fällt in jedem Augenblick der Krümmungsmittelpunkt von $\varkappa'$ mit dem Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahn zusammen, welche der Krümmungsmittelpunkt der Systemcurve $\varkappa$ beschreibt. Bei der indidirecten Bewegung übernimmt $\varkappa'$ die Rolle von $\varkappa$. Wenn daher $\varkappa$ und $\varkappa'$ zwei beliebige Curven von σ und σ' sind, welche im gegenseitigen Verhältnis von Curve und Enveloppe stehen, so sind ihre Krümmungsmittelpunkte im momentanen Berührungspunkt stets zwei entsprechende Punkte A und A' für die quadratische Verwandtschaft, welche den betrachteten Bewegungsmoment kennzeichnet. Die Polcurven sind Curven dieser Art. Indem auf sie die in früheren Paragraphen aus der quadratischen Verwandtschaft entwickelten Relationen über die Lage entsprechender Punkte zum Drehungspol herangezogen werden, gelangt

der Verfasser zur Savary'schen Gleichung, welche die Verbindung zwischen der Krümmung der Polcurven und dem Durchmesser des Wendekreises herstellt. Ist im besonderen $\varkappa$ eine Gerade, so liegt ihr Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen; daher liegt der Krümmungsmittelpunkt ihrer Enveloppe auf dem Wendekreis des Systems σ'. Liegt aber der Krümmungsmittelpunkt einer Curve des Systems σ auf dem Wendekreise, so hat die von ihr umhüllte Enveloppe des anderen Systems im momentanen Berührungspunkt einen Wendepunkt. Einige Beispiele zeigen die Bedeutung der entwickelten Gesetze für die Untersuchung specieller Bewegungsformen.

Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Der bewegliche Körper wird als Strahlenbündel aufgefasst, und die Bewegung dieses Strahlenbündels um seinen Mittelpunkt untersucht. Geht der Strahlenbündel S aus der Lage S_0 in die Lage S_1 über, so bilden die Halbirungslinien der Winkel entsprechender Strahlen einen Strahlenbündel, welcher mit S_0 und S_1 collinear ist. Diese collinearen Bündel haben die Drehaxe, welche S_0 in S_1 überführt, und die zu ihr senkrechte Ebene entsprechend gemein. Diese Verwandtschaft bildet die Grundlage für die Entwickelung vieler räumlichen Beziehungen, zu denen zwei Lagen des Körpers Anlass geben. Drei Lagen S_0, S_1, S_2 führen zu einer anderen geometrischen Verwandtschaft. Sind a_0, a_1, a_2 homologe Strahlen, so schneidet die Ebene, welche den Winkel $(a_0 a_1)$ halbirt und normal zur Ebene des Winkels steht, die Ebene, welche die gleiche Beziehung zu a_1 und a_2 hat, in einer Geraden. Diese kann als ein Strahl a' in einem festen Bündel S' aufgefasst werden, welcher dem Strahl a im Bündel S entspricht. Die beiden in dieser Weise auf einander bezogenen Strahlenbündel stehen in quadratischer Verwandtschaft. Diese Verwandtschaft vermittelt in analoger Weise, wie bei den ebenen Systemen, eine grosse Zahl von Gesetzen, die sich auf drei consecutive Lagen beziehen. Ein Strahl und seine Krümmungsaxe stehen in dieser Verwandtschaft. Sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ irgend zwei Kegelflächen der Bündel S und S', welche im gegenseitigen Verhältnis von Kegel und Enveloppe

stehen, so sind die momentanen Krümmungsaxen der Kegel im gemeinsamen Berührungsstrahl zugeordnete Strahlen derjenigen quadratischen Verwandtschaft, welche den betrachteten Bewegungsmoment charakterisirt. Die Rolle, welche für die ebenen Systeme die Wendekreise spielen, übernehmen hier zwei orthogonale Kegel. Diese haben jedoch nicht dieselbe kinematische Bedeutung, vielmehr sind die Wendekegel in den Systemen S und S' dritter Ordnung. Nachdem diese sowie ihre Polarkegel in ihrer kinematischen Bedeutung behandelt sind, schliesst das Capitel mit dem Kegel der stationären Krümmungsaxen. Derselbe ist ein Kegel H^3 von der dritten Ordnung, seine sämtlichen Punkte beschreiben Bahnen, welche vierpunktig berührende Krümmungskreise besitzen, und die Krümmungsaxen dieser Bahnen bilden im System S' einen Kegel $H^{3\prime}$. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen beide Kegelflächen ihre Bedeutung.

Das dritte Capitel behandelt die Bewegung eines starren räumlichen Systems. Wenn ein solches System Σ aus der Lage Σ_0 in die Lage Σ_1 übergeht, so bilden die Mittelpunkte der Sehnen, welche homologe Punkte verbinden, ein System Σ^m, welches mit Σ_0 und Σ_1 im Verwandtschaftsverhältnis der Affinität steht. Die Ebenen, welche in den Mitten der Sehnen senkrecht zu ihnen errichtet sind, bilden ein System Σ^v, welches mit Σ_0 und Σ_1 reciprok ist. Daher sind auch Σ^m und Σ^v reciproke Systeme, und zwar geht jede Ebene des einen Systems, durch den entsprechenden Punkt des anderen; sie bilden also ein Nullsystem. Dieses Verwandtschaftsverhältnis führt zur kinematischen Bedeutung der conjugirten Geraden, der zu Büscheln paralleler Ebenen adjungirten Durchmesser und der Hauptaxe des Systems. Aus diesen Gesichtspunkten wird die Schraubenbewegung entwickelt und die allgemeinste Bewegung eines starren Systems auf ein Rollen und Gleiten einer Pol- oder Axenfläche auf einer anderen zurückgeführt. Nachdem über Centralpunkte, Centralebene und Parameter beider Flächen gehandelt ist, wendet sich der Verfasser zu dem linearen Strahlencomplex, welcher aus den sich selbst conjugirten Geraden des Nullsystems gebildet ist. Wenn zwei unendlich nahe Lagen von Σ betrachtet werden,

so steht jede Gerade dieses Complexes normal zu den Bahnen aller ihrer Punkte; jede Gerade, welche zwei conjugirte Gerade schneidet, gehört diesem Complex an; die Momentanaxe trifft den kürzesten Abstand zweier conjugirten Geraden und steht auf ihm senkrecht u. s. w. Zwei Paare conjugirter Geraden bestimmen den Complex der Normalstrahlen, dasselbe geschieht durch fünf Strahlen des Complexes. Nachdem eine Reihe wichtiger Sätze über die von den Ebenen und den Geraden des bewegten Systems erzeugten Gebilde entwickelt ist, behandelt der Verfasser den Complex der Bahntangenten. Derselbe ist ein tetraedraler Strahlencomplex, für welchen das Fundamentaltetraeder sich auf die Axe der Schraubenbewegung und die zu ihr senkrechte unendlich ferne Gerade reducirt. Die Untersuchung der speciellen Natur dieses Complexes führt zu einer grossen Anzahl von interessanten Gesetzen. Es muss genügen, einige derselben hervorzuheben. Die Charakteristiken aller Ebenen, welche durch eine beliebige Gerade des räumlichen Systems hindurchgehen, bilden ein orthogonales Hyperboloid. Ist die Gerade Tangente der Bahn eines Punktes, so entartet dasselbe in einen orthogonalen Kegel. Die Punkte des räumlichen Systems, deren Bahnen nach einem festen Punkt gerichtet sind, liegen auf einer Raumcurve dritter Ordnung, welche als Durchschnitt eines orthogonalen Kegels und eines Kreiscylinders auftritt; dieselbe enthält die Kreispunkte der zur Axe der Schraubenbewegung senkrechten Ebenen. Lage und Natur dieser Gebilde wird eingehend untersucht, und es werden Sätze hinzugefügt, welche sich auf die Ebenen beziehen, deren Charakteristiken in einer beliebigen Ebene des Raumes enthalten sind, oder die Tangenten derjenigen Bahnen betreffen, welche die Punkte einer Ebene beschreiben.

Drei consecutive Lagen des Systems Σ führen zu den Krümmungsaxen der Bahnen. Dieselben bilden einen tetraedralen Strahlencomplex mit imaginären Hauptpunkten und Hauptebenen. Die Punkte, deren Krümmungsaxen in einer Ebene enthalten sind, bilden eine Raumcurve dritter Ordnung, also auch die Punkte, welche Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen. Nachdem auf die reciproke Beziehung für den Complex der

Krümmungsaxen der ursprünglichen Bewegung und denjenigen der umgekehrten Bewegung hingewiesen ist, werden vier auf einander folgende Lagen des Systems Σ betrachtet. Vier Homologiepunkte eines Punktes A des Systems bestimmen eine Kugel; ihr Mittelpunkt A', als Punkt von Σ' betrachtet, bestimmt bei der umgekehrten Bewegung in gleichem Sinne den Punkt A. So entspricht jedem Punkt A von Σ eindeutig ein Punkt A' von Σ'. Die hierdurch auf einander bezogenen räumlichen Systeme stehen in einer kubischen Verwandtschaft. Diese Verwandtschaft führt zu dem Orte der Punkte, deren Bahnen vierpunktig berührende Schmiegungsebenen und deren Bahnen fünfpunktig berührende Schmiegungsebenen haben, und zu den Punkten, welche Bahnen mit sechspunktig berührenden Schmiegungsebenen beschreiben. Weiter leitet die Untersuchung zu dem Ort derjenigen Punkte, deren Bahnen vierpunktig berührende Krümmungskreise besitzen, zu dem Ort derjenigen, deren Bahnen fünfpunktig berührende und deren Bahnen sechspunktig berührende Schmiegungskugeln haben, sowie endlich zu denjenigen Punkten, welche Bahnen mit siebenpunktig berührenden Schmiegungskugeln beschreiben. Das nächste Capitel behandelt die Grade der Bewegungsfreiheit eines starren räumlichen Systems. Die indirecte Bewegung lässt die Bedingung, dass ein Punkt auf einer festen Fläche gleite, sofort als gleichwertig mit der Forderung erkennen, dass eine Fläche des bewegten Systems durch einen festen Punkt gehe. Aus den theoretischen Grundlagen, welche bereits gewonnen sind, werden leicht und übersichtlich die mannigfachen Gesetze entwickelt, welche Schönemann und später Mannheim über diesen Gegenstand gegeben haben. Eine besondere Behandlung erfährt das Cylindroid, d. i. der Ort der Momentanaxen für die zulässigen Bewegungen des Systems Σ, wenn dasselbe mit vier Punkten auf vier festen Flächen geführt wird. An diese Untersuchungen schliesst sich eine Reihe interessanter bezüglicher Relationen. Beispiele, welche die Bewegungen specieller räumlicher Gebilde darstellen und der Erläuterung der allgemeinen theoretischen Ergebnisse dienen, schliessen das reichhaltige, die Wissenschaft der Kinematik nach vielen Richtungen erweiternde, anziehende Werk.

Schn.

L. Burmester. Lehrbuch der Kinematik. I_3. Leipzig. A. Felix. XX u. 561-941 mit einem Atlas.

Von dem Werke, über dessen beide ersten Lieferungen seiner Zeit Bericht erstattet wurde (siehe F. d. M. XVIII. 1886. 814), liegt die dritte Lieferung (pag. 561—928) vor. Mit ihr erfolgt der Abschluss des ersten Bandes, welcher die Bewegung in der Ebene zum Gegenstand der Betrachtung macht. Auch in dieser Fortsetzung findet das reichhaltige Material, welches die wissenschaftliche Forschung auf dem Gebiete der Kinematik zu Tage gefördert hat, seine systematische Verarbeitung. Die Vorzüge, auf welche bei der Besprechung der ersten Lieferungen hingewiesen wurde, charakterisiren auch diesen Teil des Werkes.

An die Erzeugung ähnlicher Bewegungen vermittelst des Pantographen oder Storchschnabels und gewisser aus allgemeineren Gesichtspunkten herzuleitenden Mechanismen schliesst sich die Darstellung inverser Bewegungen. Dieselbe knüpft an den Hart'schen Inversor an, behandelt den quadruplanen Inversor von Sylvester und Kempe und schliesst mit der Behandlung des Inversors von Peaucellier. Einzelne interessante geometrische Beziehungen erscheinen in enger Verbindung mit dem behandelten Gegenstande. Die Grundlage für gewisse Mechanismen, die Sylvester angegeben hat, bildet der Satz, dass, wenn in einem Gelenkviereck die Summen der Quadrate der gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind, die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Im Anschluss an diesen Satz wird das Wesen dieser Mechanismen entwickelt und ihre Beziehung zum Peaucellier'schen Inversor klar gelegt. Die Betrachtung mehrfach geführter und übergeschlossener Mechanismen bildet den Schluss dieses Abschnittes. Dem folgenden Capitel, welches sich mit der angenäherten Geradführung beschäftigt, ist eine zusammenhängende Entwickelung der geometrischen Gesetze vorausgeschickt, zu denen die Betrachtung der Lagenbeziehungen von drei, vier oder fünf complanen congruenten ebenen Systemen den Anlass bietet. Die eigentümlichen Verwandtschaftsverhältnisse, zu denen die Entwickelung führt, werden untersucht, die Bedeutung der Kreispunktcurve und der Mittelpunktcurve für vier in einer

Ebene gelegene congruente Systeme klar gelegt, ihre Constructionen aus ihrer geometrischen Natur hergeleitet und endlich die Bestimmung derjenigen Kreise gegeben, welche fünf homologe Punkte von fünf congruenten in einer Ebene liegenden Systemen enthalten. Durch diese allgemeine und umfassende Entwickelung wird die geometrische Grundlage für die systematische Bearbeitung des reichhaltigen Stoffs gewonnen, zu dem das Problem der angenäherten Geradführung im Lauf der Zeiten die wissenschaftliche Arbeit geleitet hat. Im Anschluss an diesen Teil des Werkes werden die Mechanismen derjenigen Schiebersteuerungen behandelt, welche sich in der Praxis bewährt haben; die zweckentsprechenden Constructionen der Technik finden hier ihre enge Verbindung mit der rein theoretischen Wissenschaft der Kinematik. Den Principien dieser Wissenschaft gemäss werden im folgenden Capitel die Begriffe der Beschleunigung, der Deviation, der Normal- und Tangentialbeschleunigung zu vollkommener Klarheit entwickelt; die Beschleunigungen höherer Ordnung erhalten ihre Vermittelung durch die von Hamilton ersonnenen Hodographen der Bewegung. Die eingeführten Begriffe finden ihre Anwendung bei der sich anschliessenden Behandlung einfacher Bewegungsformen, wie sie sich in der Wurfbewegung, der allgemeinen Centralbewegung, der Planetenbewegung u. s. w. darbieten. Die Zusammensetzung von Beschleunigungen führt zu dem Satz von Coriolis, und im Anschluss an ihn finden die Begriffe „absolute .Beschleunigung“, „relative Beschleunigung“, „Führungsbeschleunigung“ ihre Erläuterung. Für die bisher gebräuchliche Benennung „zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung“ bringt der Verfasser den angemesseneren Ausdruck „Zusatzbeschleunigung“ in Vorschlag. Zahlreiche Beispiele interessanter Bewegungsformen zeigen die Fruchtbarkeit des Coriolis'schen Lehrsatzes. Die Beschleunigungen der Punkte eines ebenen starren Systems, ihre allgemeinen und ihre besonderen Beziehungen führen über zur constructiven Bestimmung der Beschleunigung bei einfachen und zusammengesetzten Mechanismen; ein reicher Stoff ist hier in den Kreis der Betrachtung gezogen, und seine wissenschaftliche Durcharbeitung leitet zu

tieferer Erkenntnis eines wesentlichen Teils der Maschinenlehre.

Der letzte Abschnitt ist der Bewegung gesetzmässig veränderlicher ebener Systeme gewidmet. Nach einer einleitenden Betrachtung der allgemeinen Gesetze solcher Bewegung werden ebene Systeme behandelt, welche während der Bewegung ihre Aehnlichkeit bewahren, und besondere Formen dieser Bewegung verfolgt. Eine grosse Fülle von geometrischen Relationen erhält so eine innigere wissenschaftliche Verbindung. Es folgt die Behandlung solcher Systeme, welche während der Bewegung in Affinitätsverwandtschaft verbleiben, und den Schluss bildet ein Capitel, welches sich mit der Bewegung der bifocal-veränderlichen Systeme beschäftigt. Diese Systeme hat der Verfasser in den Math. Ann. 1880. Bd. XVI zuerst behandelt, und es ist seiner Zeit in Bd. XII dieses Jahrbuchs darüber berichtet worden.

Es hat hier das reichhaltige Werk nur nach seinem wesentlichen Inhalt und in einigen allgemeinen Zügen gekennzeichnet werden können; auf Einzelnheiten näher einzugehen, verbietet das der Berichterstattung zustehende Mass des Raumes.

Schn.

Edm. Bour. Cours de mécanique et machines, professé à l'École Polytechnique. Cinématique. 2e éd. Paris, Gauthier-Villars.

E. Boggio-Lera. Sulla cinematica dei mezzi continui. Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa. IV. 53-99. Abgedruckt in Nuovo Cimento (3) XXII. 63-69, 143-149, 231-240; XXIII. 158-162; XXIV. 41-45.

Betrachtet man die in einem Zeitelemente stattfindenden unendlich kleinen Verschiebungen der Punkte eines Körpers als lineare homogene Functionen der Coordinaten, so besteht bekanntlich die Veränderung eines Teilchens des Körpers aus einer Translation, einer Drehung und einer Dilatation (vgl. z. B. Kirchhoff, Mechanik, X. Vorlesung). Behält man in den Ausdrücken der Verschiebungen auch die quadratischen Glieder bei, so kommen noch drei Bewegungen hinzu, nämlich:

a) eine Deformation, welcher ein Potential zukommt;

b) ein Tripel von Windungen (torsioni) um drei rechtwinklige, durch den Nullpunkt gehende Axen;

c) eine Biegung (flessione) um eine durch den Nullpunkt gehende Gerade.

Hierbei versteht man unter einer Windung um eine durch den Nullpunkt gehende Axe eine Bewegung, bei welcher jeder Punkt um die Axe mit einer Drehungsgeschwindigkeit rotirt, die dem Abstande der Projection des Punktes auf der Axe von dem Nullpunkte proportional ist; — unter einer Biegung um eine Axe eine Deformation, bei welcher jede die Axe rechtwinklig schneidende Gerade einem bestimmten Gesetze gemäss in eine Parabel übergeht, welche in der durch die beiden Geraden gehenden Ebene liegt. — Die Biegungen setzen sich nach den Gesetzen der Streckentheorie zusammen. Die Biegungsgeschwindigkeit ist das constante Verhältnis der Geschwindigkeitscomponente irgend eines Punktes in der Richtung der Axe zum Quadrate des Abstandes desselben von der Axe.

Sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten in einem Punkte einer incompressibeln Flüssigkeit, λ, μ, ν die Componenten der Biegungsgeschwindigkeit in demselben Punkte, so findet man:

$$\lambda = -\tfrac{1}{6}\Delta_2 u, \quad \mu = -\tfrac{1}{6}\Delta_2 v, \quad \nu = -\tfrac{1}{6}\Delta_2 w.$$

Sind die Windungen eines Teilchens stationär, so ist die Biegung desselben ebenfalls stationär.

Giebt es keine Biegung, so existirt ein „Drehungspotential", d. i. eine Function, deren partielle Differentialquotienten die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit angeben.

Führt man (nach Analogie mit den Helmholtz'schen Wirbellinien und -Fäden) Biegungslinien und -Fäden ein, so gelangt man zu interessanten Ergebnissen, auf welche aber hier nicht eingegangen werden kann.

Die Theorie wird auf zwei besondere Fälle angewandt.

Manche Rechnungs- und Druckfehler, einige ungerechtfertigte Umformungen (z. B. der Uebergang von (1) zu (a) S. 79) und

Bezeichnungen (z. B. die Function φ S. 89), und die wohl zu analytische und unübersichtliche, bloss auf Formeltransformationen gestützte Untersuchungsmethode, — dies alles, ohne die Wichtigkeit der Resultate zu vermindern, erschwert die Lectüre der Abhandlung. Vi.

R. Reiff. Zur Kinematik der Potentialbewegung.
Böklen Mitt. I_2. 41-48.

Bewegt sich ein stetiges System so, dass die Geschwindigkeitscomponenten die partiellen Ableitungen einer Function $\varphi(x, y, z)$ nach den Coordinaten x, y, z sind, so nennt der Verfasser diese Bewegung eine Potentialbewegung, die Function aber ist das Geschwindigkeitspotential. Die Untersuchungen erstrecken sich nun auf die Frage, welche Veränderungen ein unendlich kleines Linienelement in der Zeit dt erleidet. Dieselben bestehen in einer Verschiebung, einer Drehung und einer Dehnung; als Mass der letzteren gilt das Verhältnis des Zuwachses des Linienelementes zur ursprünglichen Länge. Diese Grösse hat für alle Linienelemente, welche in der Fläche constanten Potentials $\varphi(x, y, z) = c$ liegen, ein Maximum oder Minimum in den Krümmungslinien der Fläche, oder allgemeiner, die Dilatation eines Linienelementes dieser Fläche ist proportional der Krümmung des zugehörigen Normalschnitts der Fläche. Derartige Relationen, welche die Dehnung der Elemente, oder solche, welche die Drehung betreffen, bilden den Inhalt der vorliegenden Arbeit. Schn.

Aug. Seydler. Ueber die Hauptarten der Bewegung.
Casop. XVI. 49. (Böhmisch.)

Enthält eine gründliche Discussion der in der Mechanik abgehandelten Hauptarten der Bewegung und ihres gegenseitigen Verhältnisses. Std.

MOHR. Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne. Ein Beitrag zur graphischen Kinematik. Civiling. XXXIII. 631-650.

Trägt man die Geschwindigkeiten mehrerer sich in einer Ebene bewegender Punkte A, B, C, ... von einem Punkte P_1 nach Grösse und Richtung ab, so wird eine Figur $A_1B_1C_1$ ... erhalten, welche „Geschwindigkeitsplan“ heisst. Ebenso erhält man den „Beschleunigungsplan“ $A_2\,B_2\,C_2$ .... Es ist ohne weiteres klar, dass der Beschleunigungsplan der Figur ABC... identisch mit dem Geschwindigkeitsplan von $A_1\,B_1\,C_1$ ... ist. Sind A und B durch eine starre Gerade verbunden, so steht die Richtung $A_1\,B_1$ senkrecht auf AB; und der Geschwindigkeitsplan einer starren Figur ist eine der ursprünglichen ähnliche, welche um einen rechten Winkel gedreht ist. Auch für den Fall ähnlich veränderlicher Figuren bleibt die Geschwindigkeitsfigur ähnlich der gegebenen. Dasselbe gilt natürlich dann auch von dem Beschleunigungsplan der ähnlich veränderlichen Figur. Diese und ähnliche Betrachtungen wendet der Herr Verfasser auf die ebene kinematische Kette und das ebene Fachwerk an.

F. K.

F. WITTENBAUER. Sätze über die Bewegung eines ebenen Systems. Wien. Anz. XXIII. 145-146 (1886), Schlömilch Z. XXXII. 314.

Wenn ein ebenes System gleichzeitig mehreren Bewegungen unterworfen ist, von denen jede einzelne durch den momentanen Drehpunkt C_n, den Wendepol W_n und die Winkelgeschwindigkeit ω_n charakterisirt ist, so ist der resultirende Drehpunkt C Schwerpunkt aller Punkte C_n, wenn dieselben mit den bezüglichen Winkelgeschwindigkeiten belastet gedacht werden. Zu diesem bereits bekannten Gesetz fügt Herr Wittenbauer folgendes: Der Wendepol W der resultirenden Bewegung ist der Schwerpunkt aller Wendepole W_n und aller Drehpunkte C_n, wenn die ersteren bezüglich mit ω_n^2, die letzteren mit $\omega_n(\Sigma\omega-\omega_n)$ belastet gedacht werden.

Wenn ein ebenes System gleichzeitig zwei Bewegungen mit

den Drehpunkten C_1 und C_2 und den Wendepolen W_1 und W_2 besitzt, so ist der Wendepol der resultirenden Bewegung auf einer Parabel gelegen, welche W_1 und W_2 enthält. Die Tangenten in W_1 und W_2 schneiden sich im Mittelpunkte der Strecke C_1C_2.

Schn.

R. J. Dallas. Note on the kinematics of a quadrilateral. Edinb. M. S. Proc. V. 92-93.

Von folgender Aufgabe wird eine Lösung mitgeteilt: Ein Viereck $ABCD$ aus vier Gelenkstäben ist gegeben; der Stab CD werde festgehalten; es ist die Tangente an den Ort von P, dem Schnittpunkte von DA, CB in beliebiger Lage, zu finden und die folgende Construction für den Krümmungshalbmesser der Bahn von P zu bestätigen: Es sei PQ die dritte Diagonale; man errichte in P auf PQ ein Lot, welches BA, CD in L und L' schneide; durch L und L' ziehe man Parallele zu PQ, die AD in M und M' treffen; durch M und M' ziehe man Senkrechte zu AD, welche die zu P gehörige Normale in O und O' treffen; dann ist

$$-\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{OP}+\frac{2}{O'P}.$$

Gbs. (Lp.)

J. Neuberg, G. de Longchamps, G. B. Mathews. Solutions of questions 8220, 8552. Ed. Times XLVI. 85-86, 98-99.

Eine Curve (C) und ein Winkel XOY sind gegeben. Eine beliebige Tangente von (C) trifft OX in A, OY in B. 1) Die Tangente des Ortes zu finden, den der Höhenschnitt des Dreiecks OAB beschreibt. 2) Die Tangente des Ortes zu finden, den das Inkreiscentrum von OAB beschreibt. 3) Die Tangente des Ortes für den Schwerpunkt von OAB zu finden.

Alle drei von Herrn Neuberg herrührenden Aufgaben werden an der ersten Stelle von ihm selbst mit Hülfe kinematischer Betrachtungen gelöst. An der zweiten Stelle geben die Herren L. und M. rein geometrische Constructionen nebst einigen Erweiterungen.

Lp.

Ph. Gilbert. Sur les accélérations des points d'un système invariable en mouvement. C. R. CIV. 162-165.

Die Ausdrücke für die Beschleunigungen erster Ordnung der Punkte eines starren Systems haben Herrn Gilbert zu einer Reihe allgemeiner Beziehungen geführt, welche die Beschleunigungen mit anderen bei der Analyse der Bewegung auftretenden Grössen verknüpfen. Sie alle anzuführen, würde hier zu weit führen; zu ihrer Charakterisirung möge deshalb eines der Theoreme genügen. Bildet man die geometrischen Producte einerseits aus der Beschleunigung eines Punktes und der augenblicklichen Drehaxe OJ, andererseits aus seiner Geschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung OL, so ist die Summe dieser Producte für jeden Punkt Null, wenn das starre System sich um einen festen Punkt dreht. Ist dagegen das starre System frei beweglich, so ist diese Grösse für alle Punkte constant und zwar gleich der nach der Zeit genommenen Derivirten des Products, welches aus der Rotations- und Gleitungsgeschwindigkeit zu bilden ist.

Schn.

R. Mehmke. Zur Construction der Strictionslinie der Bahnfläche einer bewegten Geraden, sowie der Berührungslinie einer bewegten Ebene mit ihrer Hüllbahn. Böklen Mitt. II. 99-101.

In den C. R. CII. 604—606 hatte Herr Godefroy einen Satz veröffentlicht, über den F. d. M. XVIII. 1886. 821 berichtet ist. Herr Mehmke giebt diesem Satz eine andere Gestalt: „Bewegen sich zwei Punkte a und b in einer Ebene, so lässt sich von einem festen Punkte p in jedem Moment der Bewegung eine Strecke pc gleich und parallel mit ab gezogen denken. Sind A, B, C zu einem Zeitpunkt die Tangenten an den Bahnen, welche a, b, c beschreiben, so ist der Berührungspunkt der Geraden ab mit ihrer Hüllbahn auf folgende Art zu construiren. Man ziehe durch a parallel zu B die Gerade A' und durch b parallel mit A die Gerade B', durch den Schnittpunkt von A' und B' führe man eine Gerade parallel zu C; diese Gerade bestimmt auf der Geraden

ab den Berührungspunkt mit ihrer Hüllbahn." Dieser Construction setzt Herr Mehmke eine andere zur Seite, welche, wenn *a* und *b* beliebige Raumcurven beschreiben, den Centralpunkt der durch *ab* erzeugten Regelfläche finden lehrt. Hierzu fügt er noch folgende Verallgemeinerung. Bewegen sich drei Punkte *a*, *b*, *c* beliebig im Raum, so lässt sich in jedem Moment der Bewegung von einem festen Punkte *p* ein Lot auf die Ebene *abc* gefällt denken. Trägt man darauf eine Strecke *pd* proportional dem Inhalt des Dreiecks *abc* ab, und zwar in einer Richtung, die eindeutig bestimmt wird, so beschreibt *d* in einem Bewegungsmoment die Bahnrichtung *D*, wenn *a*, *b*, *c* ihre Bahnen mit den Bahnrichtungen *A*, *B*, *C* beschreiben. Legt man nun durch *bc* parallel mit *A* die Ebene Α, durch *ca* parallel mit *B* die Ebene Β und durch *ab* parallel mit *C* die Ebene *Γ*, so schneiden sich diese drei Ebenen Α, Β, *Γ* in einem Punkt. Führt man durch diesen senkrecht zu *D* eine Ebene, so schneidet diese die Ebene *abc* in ihrer Charakteristik, d. h. in der Berührungslinie der von der Ebene des Dreiecks *abc* umhüllten Fläche. Schn.

J. Réveille. Détermination du rayon de courbure d'une trajectoire particulière d'un point faisant partie d'un solide invariable assujetti à quatre conditions. C. R. CIV. 1827-1829.

Wenn ein starres System mit 4 Punkten auf 4 festen Flächen geleitet wird, so beschreibt bekanntlich jeder Punkt des Systems eine Flächentrajectorie. Die Normalen derselben treffen zwei Gerade *D* und *Δ*. Unter den Elementarbewegungen des Systems, welche mit den Bedingungen der Leitung verträglich sind, lässt sich diejenige unterscheiden, welche allein in einer Rotation um die Gerade *D* besteht. Indem man diese besonderen Elementarbewegungen verfolgt, wird ein beliebiger Punkt *a* des Systems eine Trajectorie $(a)_D$ beschreiben, welche auf der Flächentrajectorie [*a*] gelegen ist. Die Krümmungsaxe dieser besonderen Trajectorie $(a)_D$ wird nunmehr bestimmt aus den Krümmungselementen der vier gegebenen Flächen, auf denen das System mit vier Punkten geführt wird. Schn.

J. Réveille. Déterminations des éléments de courbure de la surface décrite par un point quelconque d'un solide invariable, dont quatre points donnés décrivent des surfaces dont les éléments de courbure sont donnés. C. R. CV. 159-163.

Die Elemente für die Lösung der Frage werden jenen kinematisch-geometrischen Betrachtungen entnommen, für welche die Arbeiten des Herrn Mannheim die wesentlichsten Gesichtspunkte gegeben haben. Schn.

D. Bobylew. Ueber die Bewegung einer Oberfläche, welche eine andere ruhende Oberfläche berührt. Petersb. Abh. LV. 97-121. (Russisch.)

In dieser kinematischen Untersuchung werden Ausdrücke für die Bedingungen derjenigen mechanischen Verbindungen gebildet und betrachtet, welche einen starren, von einer gegebenen Oberfläche begrenzten Körper zwingen, eine gegebene ruhende Oberfläche so zu berühren, dass die Spuren der Berührungspunkte auf beiden Oberflächen vorgeschriebene Curven sind; dabei werden auch Relationen zwischen den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen betrachtet, die aus der Existenz dieser Bedingungen hervorgehen. Ausserdem wird hinsichtlich der Bedingungen des Rollens ohne Gleiten, welche sich als Bedingungen zwischen den Geschwindigkeiten oder, was dasselbe ist, unter der Form zweier Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen lassen, der Nachweis geführt, dass diese Gleichungen unmittelbar nicht integrabel sind, sobald die Berührungsspuren auf beiden Oberflächen nicht gegeben sind, und es wird ferner gezeigt, wie sie sich integriren lassen, wenn die genannten Curven vorgeschrieben sind. Bb.

G. Floquet. Sur le mouvement d'une surface autour d'un point fixe. C. R. CV. 746-749.

Es bewege sich eine Fläche vom Grade m um einen festen Punkt O. Für jede Lage der Fläche bestimmt eine feste Ebene

(*P*) Pole, deren Anzahl $(m-1)^3$ beträgt. Ist *M* einer derselben, so wird dieser während der Bewegung continuirlich seine Lage ändern. Von einer gegebenen Anfangslage aus wird die weitere Bewegung an die Bedingung geknüpft, dass die augenblickliche Rotation *OS* jeder Zeit gegen den Pol *M* hin gerichtet und eine Function des Abstandes *OM* sei. Die Bewegungsgleichungen, welche die Bahn des Pols *M* zu beurteilen gestatten, führen zu folgendem Ergebnis: Wenn der Pol *M* zu Anfang auf der beweglichen Oberfläche liegt, so dass die feste Ebene (*P*) die Fläche in ihm berührt, so bleibt die Berührung der Oberfläche mit der festen Ebene bestehen, und zwar rollt die Oberfläche, ohne zu gleiten, auf der festen Ebene *P*. Schn.

Pinczon. Sur la génération de l'herpolhodie. C. R. CIV. 1048-1051.

Es sei *XOY* die Ebene, welche senkrecht zur Axe des Moments der Bewegungsgrössen steht, und O_x, O_y, O_z seien die Hauptträgheitsaxen. Die Ebene xOy schneidet *XOY* längs der Geraden O_χ. Projicirt man den Richtstrahl ϱ der Herpolodie auf die Ebene *XOY*, so bildet dieser mit O_χ einen Winkel σ. Durch die Gleichung zwischen ϱ und σ wird die Curve in Polarcoordinaten auf die bewegliche Axe O_χ bezogen. Die Discussion der Curve folgt aus den aufgestellten Gleichungsformen.

Schn.

G. Floquet. Sur une propriété de la surface $xyz = l^3$. C. R. CV. 854-856.

Die in rechtwinkligen Coordinaten in der Form $xyz = l^3$ sich darstellende Fläche (*S*) bewege sich um den als fest gedachten Coordinatenanfang *O* in der Art, dass sie auf einer festen Ebene *P* rollt, ohne zu gleiten; die augenblickliche Rotation *OS* sei in jedem Augenblick gegen den Berührungspunkt *M* hin gerichtet und sei proportional dem Richtstrahl *OM*. Bei einer so charakterisirten Bewegung der Fläche wird die Bewegung des Punktes *M* in der festen Ebene untersucht. Ist *h* der Ab-

stand der festen Ebene (*P*) von dem festen Centrum, so giebt es ein bestimmtes zweischaliges Hyperboloid (*H*), dessen Axen durch *h* und *l* bedingt sind, welches die Bewegung jenes Punktes *M* in anderer Form darzustellen gestattet. Ist nämlich die augenblickliche Rotation ω durch $n.OM$ gemessen, so kann das Hyperboloid (*H*) an die Stelle der Fläche (*S*) treten, wenn man die Constante *n* durch $2n$ ersetzt. Es ist also der Ort der Punkte *M* die Herpolodie einer Poinsot'schen Bewegung des Hyperboloids (*H*), wobei die feste Ebene jene Ebene (*P*) und die Constante der Winkelgeschwindigkeit $2n$ ist. Wenn also die Flächen (*S*) und (*H*) unter den angegebenen Bedingungen sich bewegen, so haben die Pole *M* in der Ebene (*P*) dieselbe Bahn, und zwar berühren sich jeder Zeit (*S*) und (*H*) in dem betreffenden *M*. Die augenblickliche Rotation ist für beide Flächen nach *M* hin gerichtet. Es lässt sich daher die Bewegung von (*H*) so auffassen, als rolle (*H*) auf der fest gedachten Fläche (*S*) mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche durch $n.OM$ gemessen ist. Es bietet sich hier also eine Poinsot'sche Bewegung dar, bei der die feste Ebene durch eine krumme Fläche ersetzt ist. Sehn.

P. J. Somoff. Ueber die Freiheitsgrade der kinematischen Ketten. Phys. Ges. St. Pet. XIX. 443-476. (Russisch.)

In dieser Abhandlung werden die Bedingungen bestimmt und untersucht, unter welchen eine geschlossene einfache oder zusammengesetzte kinematische Kette durch Feststellung eines ihrer Glieder in einen Mechanismus verwandelt wird. Unter Mechanismus versteht der Verfasser eine kinematische Kette, deren sämtliche Punkte gezwungen sind, sich auf vorgeschriebenen Curven zu bewegen. Bb.

J. Taubeles. Ueber die Bildung ebener kinematischer Ketten. Techn. Blätter. XIX. 20-40.

Als Ziel der Abhandlung wird die Methode der Bildung ebener kinematischer Ketten bezeichnet. Besondere Aufmerksam-

keit wird der für die Technik besonders wichtigen Erzielung der Zwangläufigkeit gewidmet. Nebenher kommt die Verbindung zwangläufiger Ketten zur Sprache. F. K.

A. Föppl. Zur Fachwerktheorie. Schweiz. Bauztg. IX.

Ein Fachwerk mit k Knotenpunkten muss, wenn es geometrisch bestimmt sein soll, mindestens $2k-3$ Stäbe enthalten. Diese Bedingung reicht nicht immer aus; ist jedoch ein Fachwerk von $2k-3$ Stäben geometrisch bestimmt, so ist es auch statisch bestimmt. Es seien x_α, y_α; x_β, y_β die Coordinaten zweier durch einen Stab verbundenen Knotenpunkte, $l_{\alpha\beta}$ die Länge des Stabes; dann gelten die $2k-3$ Gleichungen

$$(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 - l_{\alpha\beta}^2 = 0.$$

Da wir die beiden Coordinaten eines Knotenpunktes und eine Coordinate eines zweiten Knotenpunktes willkürlich annehmen können, so bleiben noch $2k-3$, d. h. ebensoviel Unbekannte wie Gleichungen. Ist nun das Fachwerk geometrisch bestimmt, so giebt es kein von Null verschiedenes System von Variationen δx_α und δy_α, welches mit den Gleichungen vereinbar wäre. Bezeichnen wir nun die Gleichungen in irgend einer Reihenfolge mit $f_\lambda = 0$ und die Unbekannten durch x_μ, so wird die Determinante

$$(1) \qquad \left|\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu}\right| \qquad \binom{\lambda = 1,2,\ldots,2k-3}{\mu = 1,2,\ldots,2k-3}$$

einen von Null verschiedenen Wert haben müssen. Die Spannung in dem Stabe l_λ möge S_λ sein, die Componenten in dem Knotenpunkt mit den Coordinaten x_{μ_1}, x_{μ_2} seien X_{μ_1}, X_{μ_2}, dann gelten, wie leicht zu sehen, die Gleichungen:

$$(2) \qquad X_\mu = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=2k-3} \frac{S_\lambda}{l_\lambda} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu} \qquad (\mu = 1,2,\ldots,2k-3).$$

Für den Stab mit einer unbekannten Coordinate haben wir nur eine Gleichung, für den festen Knotenpunkt gar keine, für alle anderen zwei Gleichungen, also im ganzen $2k-3$ Gleichungen

für die $2k-3$ unbekannten Spannungen. Da die Determinante (1) einen von Null verschiedenen Wert hat, so sind die Spannungen durch die Gleichungen (2) bestimmt. F. K.

R. Land. Ueber die statische und geometrische Bestimmtheit der Träger, insbesondere der Fachwerkträger. Centralbl. d. Bauverw. VII. 363-365.

Der Herr Verfasser entwickelt zunächst die Beziehungen zwischen den Anzahlen der Knotenpunkte und Auflagerpunkte einerseits und der Stäbe andererseits, welche erkennen lassen, ob ein Träger statisch oder geometrisch unbestimmt, bestimmt oder überbestimmt sei. Diese Anzahlen allein reichen jedoch nicht immer aus, um die genannte Frage zu entscheiden. Es wird, um die angeregte Frage zu beantworten, zunächst das Fachwerk durch Stäbe vervollständigt, welche die Auflagerbedingungen ersetzen; dann wird die so entstehende Figur vereinfacht durch Fortlassung derjenigen Knotenpunkte, welche gerade durch zwei Stäbe mit zwei anderen Knotenpunkten verbunden sind. Die Restfigur hat dann dieselbe Beweglichkeit wie die Hauptfigur und kann daher für die weitere Untersuchung an Stelle der letzteren zu Grunde gelegt werden.

Es ergiebt sich als Kriterium der geometrischen Bestimmtheit der Grundfigur der Satz:

„Lässt sich unter Beibehaltung einer Seitenlänge zu einem Vielseit (Stabwerk) ein entsprechendes mit parallelen Seiten und gleichartigen Ecken zeichnen, welches mit dem gegebenen Vielseit nicht vollständig übereinstimmt, so ist das letztere auch nicht geometrisch bestimmt.“ (Vergl. das folgende Ref.)

F. K.

H. Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks. Schweiz. Bauztg. IX. 121-123.

Nach den Entwickelungen des Hrn. Müller-Breslau ist ein Fachwerk geometrisch bestimmt oder nicht, je nachdem alle Figuren, deren Seiten denen des Fackwerks parallel sind, dem

letzteren ähnlich sind oder nicht. Es seien $1, 2, 3, \ldots, n$ die Ecken eines ebenen Fachwerks, $1', 2', 3', \ldots, n'$ die Ecken einer parallellinigen Figur. Jeder Knotenpunkt möge sich nun senkrecht zu derjenigen Linie bewegen, welche ihn mit dem entsprechenden der Hülfsfigur verbindet, und zwar um eine unendlich kleine Strecke, die jener Verbindungslinie proportional ist. Irgend ein Stab ändert dabei seine Länge nicht, und seine Bewegung ist nichts anderes als eine Drehung um denjenigen Punkt $\mathfrak{P}_{\alpha,\beta}$, in welchem sich die Verbindungslinien seiner Enden α, β mit den entsprechenden Punkten α', β' schneiden. Soll nun das Fachwerk geometrisch bestimmt, d. h. seine Gestalt unveränderlich sein, so ist jede Bewegung eine Drehung um einen Punkt P, und es müssen also stets die Drehpunkte der einzelnen Stäbe in einen einzigen Punkt zusammenfallen. Damit ist die anfangs ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Im weiteren Verlauf zeigt Hr. Müller-Breslau noch, wie sich die Hülfsfigur zur Bestimmung der Spannungen verwenden lässt, indem man das Fachwerk durch Fortnahme eines Stabes in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt. F. K.

H. Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie der ebenen Träger. Schweiz. Bauztg. X. 129-131.

R. Land. Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Schweiz. Bauztg. X. 157-160.

Hr. Müller-Breslau behandelt im Anschluss an die Arbeit in Bd. IX der Schweiz. Bauztg. (vergl. das vorige Ref.) die für die Wertschätzung neuer Arten von Trägern wichtige Frage:

„Zu untersuchen, ob die durch Nachgeben der Widerstände hervorgerufenen Verrückungen der Stützpunkte etwa unzulässige Formänderungen des Trägers verursachen“.

Herr Land erhebt bezüglich der von Hrn. Müller-Breslau vorgetragenen Methode Prioritätsansprüche, indem er auf einen Artikel im „Wochenblatt für Baukunde 1887“ verweist. Aus den dort gegebenen allgemeinen Beziehungen werden speciellere

Folgerungen gezogen, bezüglich deren wir auf die Abhandlung selbst verweisen. F. K.

H. Müller-Breslau. Theorie statisch unbestimmter Systeme unter Berücksichtigung der Anfangsspannungen. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XXXIX. 157.

Fr. Steiner. Erwiderung hierauf. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XXXIX.

Discussion im Anschluss an den Aufsatz von Hrn. Steiner gleichen Titels in Bd. XXXVIII. (F. d. M. XVIII. 1886. 979). Die Einwürfe des Hrn. Müller lassen sich dahin zusammenfassen: Die Berechnung einer Grösse y unter der Voraussetzung, dass y selbst gegen eine Grösse x klein sei und also überall statt $x+y$ einfach x geschrieben werden könne, liefert nicht mehr immer ein richtiges Resultat, wenn x gleich Null wird. Herr Steiner versucht einerseits durch allgemein gehaltene, nach Meinung des Referenten nicht zutreffende Ueberlegungen sein Verfahren zu rechtfertigen, andererseits sucht er die Richtigkeit der Resultate für den speciellen Fall noch besonders nachzuweisen.

F. K.

Fr. Steiner. Unrichtigkeit bisheriger Theorien statisch unbestimmter Systeme und diesbezügliche Versuche. W. Oestr. Ing. u. Arch. XII. 37.

H. Müller-Breslau. Zur Frage der Berücksichtigung der Anfangsspannungen bei der Berechnung von Trägern. W. Oestr. Ing. u. Arch. XII. 107-109.

Hr. Steiner hebt den Einfluss der durch Eigengewicht hervorgerufenen Anfangsspannungen hervor. Da derselbe sehr schwer zu schätzen sei, empfiehlt es sich, wo es irgend angängig ist, den statisch bestimmten Systemen den Vorzug zu geben. Dem gegenüber hebt Hr. Müller-Breslau hervor und zeigt an einem Beispiel, dass der Einfluss der Anfangsspannungen nicht notwendig ein schädlicher sei, sondern im Gegenteil auch zuweilen günstig hervortrete. F. K.

Fr. Steiner. Theorie der Spreng- und Hängewerke unter Berücksichtigung der Anfangsspannung. W. Oestr. Ing. u. Arch. XII. 42.

Zweck und Ziel der Abhandlung ist aus dem Titel zu ersehen, die Behandlungsweise nimmt mathematisches Interesse nicht in Anspruch. F. K.

Hacker. Fachwerk im Raume mit einseitiger Belastung. Hannov. Zeitschr. XXXIII.

Notiz über einen Vortrag des Herrn Verfassers; wir verschieben das Referat, bis die in Aussicht gestellte ausführlichere Wiedergabe erschienen ist. F. K.

Hans Schwarz. Die Beanspruchung von Fachwerksträgern durch wagerechte Kräfte in der Trägerebene. Centralbl. d. Bauverw. VII. 80.

Die Aufgabe ist aus dem Titel ersichtlich, ihre Behandlung erfolgt mit den üblichen Hülfsmitteln der Festigkeitslehre. F. K.

H. Léauté. Sur la caractéristique cinématique d'un système mécanique en mouvement. J. de Math. (4) III. 465-476.

Wenn eine Maschine, welche, von irgend welchen Kräften getrieben, Arbeit leistet, sich in einem Bewegungszustande befindet, so kann die Bewegung durch diejenige von irgend einem Punkt des Mechanismus bestimmt werden. Als solcher wird ein Punkt einer in continuirlicher Rotation befindlichen Welle gewählt, und die Geschwindigkeit der Maschine durch die Zahl der Umdrehungen r bestimmt, welche dieser Punkt in der Minute macht. Die gesamte lebendige Kraft des Mechanismus ist alsdann proportional r^2. Durch Anwendung des Theorems der lebendigen Kräfte wird die der Maschine zugeführte und die durch Ueberwindung der Widerstände geleistete Arbeit mit

der lebendigen Kraft des Mechanismus in Verbindung gebracht, und dadurch eine Differentialgleichung für die Grösse r gewonnen. In diese Gleichung geht eine Grösse $\varDelta$ ein mit folgender Bedeutung. Kennzeichnet r_0 einen bestimmten Geschwindigkeitszustand des Mechanismus, so wird, wenn plötzlich der Zufluss der Arbeitskräfte gehemmt wird, ohne dass die Widerstände eine Aenderung erleiden, der Mechanismus nach einiger Zeit zur Ruhe gelangen. Die Grösse $\varDelta$ ist alsdann definirt durch $\int_{r=r_0}^{r=0} r dt$; sie ist also die Zahl der Umdrehungen, welche die Maschine einzig und allein in Folge der Trägheit macht, nachdem die Zuführung der bewegenden Kräfte plötzlich ohne irgend welche Modification der Widerstandskräfte unterbrochen wurde. Diese Grösse nennt der Verfasser die kinematische Charakteristik des in Bewegung befindlichen mechanischen Systems. Die Bestimmung des Wertes dieser Charakteristik ist ein Ergebnis der Erfahrung. Ihrer Bestimmung setzen sich aber in der Praxis deshalb Schwierigkeiten entgegen, weil der Zufluss der treibenden Kräfte nicht plötzlich abgeschnitten werden kann; es ist deshalb die Zeit in Rechnung zu ziehen, welche der völlige Abschluss dieser Kräfte erfordert. Während dieses Zeitraums τ_1 macht die Maschine eine Zahl von Umdrehungen λ_1, welche durch ein Zählwerk bestimmt werden kann. Die Zahl der Umdrehungen von der vollständigen Absperrung der treibenden Kräfte bis zum Stillstand der Maschine wird mit λ_2, die Zeitdauer für diese Zahl mit τ_2 bezeichnet. Zwischen diesen Grössen und der Charakteristik $\varDelta$ werden die verbindenden Gleichungen hergestellt, welche gestatten, die Grösse $\varDelta$ zu berechnen, nachdem die Grössen λ_1 und λ_2 durch Beobachtung gefunden sind. Die Grösse $\varDelta$ entspricht einem bestimmten Geschwindigkeitszustand des Mechanismus oder, wenn die treibenden Kräfte als gegeben vorausgesetzt werden, einer bestimmten Grösse der Widerstände, welche bei der Arbeitsleistung zu überwinden sind; es würde deshalb nötig erscheinen, bei jeder Veränderung der Widerstandsgrösse die Elemente zur Berechnung von $\varDelta$ von neuem erfahrungsmässig zu bestimmen. Indessen zeigt der Ver-

fasser, dass es für den Grad der Annäherung, den man in der Praxis nötig hat, ausreicht, die Charakteristik $\varDelta$ für einen mittleren Bewegungszustand des Mechanismus zu bestimmen.

Schn.

L. Neu. Système articulé pour tracer la courbe symétrique par rapport à un axe d'une courbe donnée. S. M. F. Bull. XV. 44-45.

Wenn ein Gelenkviereck mit gleichen Seiten so geführt wird, dass zwei gegenüberliegende Ecken auf einer Geraden verbleiben, so verzeichnen die beiden anderen Ecken zu dieser Geraden symmetrische Gebilde. Um das erste Paar Ecken auf einer Geraden zu leiten, wird jede derselben mit einem Peaucellier'schen Mechanismus von sieben Gliedern verbunden.

Schn.

Cranz. Ellipsograph. Böklen Mitt. 1886. I_2. 58-59.

Auf einer Geraden LL_1 liegt ein fester Punkt O, um diesen ist eine Stange OB beweglich; in B ist drehbar eine zweite Stange AB verbunden, welche mit OB gleiche Länge hat. Bewegt sich nun A gleitend auf der Geraden, so beschreibt jeder Punkt P der Stange AB eine Ellipse. Bei der mechanischen Ausführung eines auf diese Idee sich gründenden Ellipsographen entsteht dadurch eine Schwierigkeit, dass der zu verschiebende Punkt A mit dem festen Drehpunkt O einmal zusammenfällt, und dadurch die Verzeichnung der Vollellipse schwierig wird. Eine mechanische Construction sucht diese Schwierigkeit zu umgehen. Der von dem Verfasser angegebene Apparat wird vom Mechaniker Mohr in Esslingen angefertigt. Schn.

A. Schoenflies. Ueber Gruppen von Bewegungen I, II. Math. Ann. XXVIII. 319-342, XXIX. 50-80.

Referat S. 143 dieses Bandes.

P. J. Somoff. Ueber die Deformation eines collinear-veränderlichen Systems von drei Dimensionen. Chark. Ges. II. 74-94. (1886.) (Russisch.)

A. Madomet. Considérations géométriques relatives aux systèmes de distribution Marshall, Joy et autres analogues. Détermination de l'excentrique fictif du tiroir. Paris.

Pichou. La roue universelle Pichou. Ass. Franç. (Toulouse.) 242-256.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

L. Poinsot. Elemente der Statik. Autorisirte deutsche Ausgabe. Nach der von Bertrand bearbeiteten zwölften Auflage des französischen Originals herausgegeben von H. Servus. Berlin. Springer. X u. 173 S. gr. 8⁰ nebst 4 Taf.

Hr. Servus hat die vorliegende Ausgabe von Poinsot's Elementen der Statik in demselben Jahre erscheinen lassen, in welchem er auch die analytische Mechanik von Lagrange veröffentlicht hat. Die deutsche Uebersetzung von Hartmann nach der fünften Auflage ist zum Vergleichen benutzt worden. Der Inhalt des Werkes ist so vollständig in alle späteren Lehrbücher der Statik übergegangen, dass man wohl aus historischem Interesse und aus Wohlgefallen an der lichtvollen und elementaren Darstellung, nicht aber um neuer Anregung willen das Lesen des Buches vornehmen wird. Die Uebersetzung des durchsichtigen und nicht sehr umfangreichen Jugendwerkes Poinsot's bot

weniger Schwierigkeiten als die der Mécanique analytique von Lagrange; doch sind auch hier einige Verstösse von der oben (S. 864) erwähnten Art bemerkt worden. Man beachte z. B. den bekannten französischen Sprachgebrauch von „force estimée suivant une direction“, den Poinsot am Ende der No. 39 erklärt, eine Wendung, die Hr. Servus dort übersetzt „Kraft, geschätzt nach einer Richtung“. Bei einem Schriftsteller wie Poinsot, der jedes Wort genau abwägt, musste nun diese Uebersetzung festgehalten werden; in den Nummern 113ff. übersetzt Hr. Servus aber estimer durch „bestimmen“, anderswo „messen“ auch „nehmen“, oder lässt es unübersetzt. Ferner sei als Curiosum angeführt, dass im Lehrsatze von No. 23 (S. 12, letzte Zeile) die Proportion $P:Q = BC:AB$ steht statt, wie sofort ersichtlich, $BC:AC$, ein Druckfehler, den Ref. schon in der 9ten Aufl. der Eléments de Statique, die ihm vorliegt, vorfindet; desgl. S. 13 Zeile 24 $GC = AC$ statt $= AB$, ebenfalls nach der 9ten Aufl. schon vorhanden. In unserer wissenschaftlichen Terminologie pflegt „lemme“ = Lemma ein „Hülfssatz“ oder „Lehnsatz“ nicht aber „Zusatz“ zu heissen (S. 8 u. 9; später richtig); dieser Ausdruck wird dagegen für corollaire = Corollarium gesetzt, wofür Hr. Servus „Folgerung“ gebraucht.

Der kurze Lebensabriss Poinsot's (S. V—VII), den Hr. Servus durch Namensunterschrift als sein Eigentum ausgiebt, ist zu drei Vierteln eine nicht immer fehlerfreie Uebertragung einzelner Stellen aus dem Vorworte, mit welchem Hr. Bertrand zuerst die elfte Auflage der Eléments de Statique begleitet hat (abgedruckt auch in Darboux Bull. (1) IV. 7—24, 1873); Hr. Servus giebt diese Quelle nicht an. Als Beispiel für Fehler, die bei nicht sorgfältiger Prüfung des Originals entstehen können, setze ich her: Lagrange en fut vivement frappé; il avait montré plus clairement que Gauss les véritables principes de la belle théorie de l'équation binôme, et découvert le secret de sa profonde analyse. Hr. Servus schreibt: ..., so dass Lagrange darüber auf das höchste erstaunt war. Gauss hatte (NB. 1808) eine Abhandlung über die Binomischen Gleichungen (sic!) geschrieben, und Lagrange hatte denselben Gegenstand auf noch klarere Weise (!) behandelt.“ Lp.

R. KLIMPERT. Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen, einem ausführlichen Formelnverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Stuttgart (1888). X u. 460 S. 8°.

J. A. TODHUNTER. A treatise on analytical statics, with numerous examples. 5th ed., edited by J. D. EVERETT. London. IX + 364 S. 8°.

H. MÜLLER-BRESLAU. Die graphische Statik der Bauconstructionen. 2. Aufl. Leipzig. Baumgärtner. I. Bd. X u. 435 S., mit 422 Textfiguren und 7 lithogr. Tafeln.

Die auf drei Bände berechnete zweite Auflage hat mit der ersten (136 Seiten starken) Auflage nur den Titel gemein. Der vorliegende erste Band enthält zuerst die Zusammensetzung der Kräfte, sodann die Trägheitsmomente und Centrifugalmomente ebener Querschnitte und die Spannungen in geraden Stäben, wobei statt der Trägheitsellipse der bequemere (Culmann'sche) Hülfskreis zur Verwendung gelangt. Weiter folgt die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger, mit Ausschluss der Untersuchung der Formänderungen. Einleitend wird Stützung und Belastung erörtert und Allgemeines über Einflusslinien gegeben. Hierauf folgt die Ermittelung der Querkräfte und Angriffsmomente für den einfachen Balken, den Gerber'schen Balken und den Bogen mit drei Gelenken. Daran schliesst sich die allgemeine Theorie des statisch bestimmten ebenen Fachwerks. Hier ist namentlich die Behandlung der aus gegliederten Scheiben zusammengesetzten Systeme hervorzuheben. Ausgehend von kinematischen Betrachtungen giebt der Verfasser ein Verfahren, welches die Bestimmung jeder einzelnen Unbekannten mittels einer (das Gesetz der virtuellen Verrückungen ausdrückenden) Momentengleichung gestattet und zugleich über die Starrheit und statische Bestimmtheit des Fachwerks Aufschluss giebt. An diesen Abschnitt reiht sich die eingehendere Betrachtung der wichtigsten

Systeme von statisch bestimmten Fachwerkträgern, zunächst des einfachen Fachwerkbalkens (Brücken- und Dachbinders), dann des Gerber'schen Fachwerkbalkens, des Fachwerkbogens mit drei Gelenken und der statisch bestimmten Hängebrücke. Bei den diesbezüglichen Untersuchungen, welche vielfach Neues enthalten, war der Verfasser auf Behandlungsweisen bedacht, welche im Princip und in der Ausführung einfach, „an das Gedächtnis möglichst geringe Anforderungen stellen, den Studirenden zur selbständigen Lösung von Aufgaben anleiten und schliesslich zu übersichtlichen Kräfteplänen führen, die auch ein anderer, als derjenige, der sie angefertigt hat, schnell prüfen kann". Ein Anhang enthält Angaben über die Belastung der Bauconstructionen, sowie ein Literaturverzeichnis. — Das Buch ist in seinem klaren und präcisen Vortrag ebensowohl dem Studirenden als dem über den neuesten Stand der betreffenden Disciplin Belehrung suchenden Fachmann angelegentlichst zu empfehlen. Hk.

W. Jeep. Das graphische Rechnen und die Graphostatik in ihrer Anwendung auf Bauconstructionen. Weimar. B. F. Voigt. Mit einem Atlas von 35 Foliotafeln. VIII u. 178 S.

Das Buch ist für den praktischen Baugewerksmeister bestimmt und beschränkt sich daher in seinen theoretischen Ausführungen auf elementarmathematische Hülfsmittel oder verzichtet, wo diese nicht ausreichen, auf den strengen Beweis. Die Beispiele sind in grosser Mannigfaltigkeit der Praxis des Bauhandwerks entnommen und in zweckentsprechender Weise durchgeführt. Nachdem in einem einleitenden Abschnitt das graphische Rechnen behandelt ist, wird die Zusammensetzung der Kräfte gelehrt und auf die Bestimmung der Schwerpunkte ebener Flächen angewandt. Hierauf folgt die Behandlung des einfachen Balkens, der Fachwerkträger und Dachconstructionen mit vielen praktischen Beispielen. Anhangsweise erfahren noch die Futtermauern und Gewölbe eine kurze Besprechung. Hk.

J. Schlotke. Lehrbuch der graphischen Statik. Hamburg. Nestler u. Melle. 163 S.

Die graphische Statik wird in dem vorliegenden, 163 S. starken Lehrbuche für angehende Techniker behandelt; zur Uebung für Anfänger enthält dasselbe eine Anzahl von Aufgaben, die der Praxis, insbesondere dem Baufache entnommen sind.

Sbt.

M. Lévy. La statique graphique et ses applications aux constructions. 2e éd. IIIe Partie. Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupoles et corps de révolution. IX + 418 S. Paris. Gauthier-Villars.

Genauere Inhaltsangabe im Katalog der Verlagsbuchhandlung. I et II trimestre 1887, S. 68ff.

Lp.

Hausser. Statique graphique appliquée. Tome I. Paris.

E. Olander. A new method of graphic Statics, applied to the construction of wrought iron girders. London.

G. Hermann. The graphical statics of mechanism. New-York.

R. H. Graham. Graphic and analytic statics in theory and comparison; their practical application to the treatment of stresses in roofs, solid girders, braced iron archers and piers, and other frame works. New-York. 390 S. 8°.

G. Hauck. Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik. J. für Math. C. 365-389.

Die Arbeit giebt in ausserordentlich einfacher, fast kann man sagen elementarer Weise die Erklärung des Auftretens von reciproken Figuren in der graphischen Statik, behandelt kurz

das allgemeine räumliche Gleichgewichtssystem und liefert Beweis und Determination des Rankine'schen Satzes für das Gleichgewicht der Kräfte am polyedralen Stabnetz. Der Gang der Untersuchung ist folgender. Ist O Centrum einer Kugel, $\mathfrak{P}$ eine Ebene, so bildet der Verf. nach Fr. Neumann's Vorgange die reciproke Projection einer Geraden Q, indem er die zu ihr normale Ebene in $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{P}$ zum Schnitt bringt; analog wird $\mathfrak{P}$ durch das Lot aus O auf die Ebene α in der reciproken Projection $\mathfrak{A}$ von α getroffen. $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{A}$ heissen die Neumann'sche Projection von Q, resp. α. Legt man zwei reciproke Figuren der graphischen Statik so, dass ein Paar entsprechender Seiten auf einander senkrecht stehen, so ist dies bei allen der Fall und sie bieten genau das Bild der orthogonalen und Neumann'schen Projection eines offenen Polyedergebildes. Daher wird ein ebenes Stabnetz (mit Inbegriff der Actionslinien der an seinen Knotenpunkten wirkenden äusseren Kräfte) aufgefasst als die Projection eines räumlichen Stabnetzes. Ersteres repräsentirt bei k Knotenpunkten eine Combination von k im Gleichgewicht befindlichen ebenen Kräftebüscheln. Die entsprechenden räumlichen Kräftebündel brauchen nicht im Gleichgewicht zu sein; es genügt, wenn ihre Resultante senkrecht zur Ebene $\mathfrak{P}$ des ebenen Stabnetzes steht; für solche gilt der in sehr eleganter Weise abgeleitete Fundamentalssatz von der Kräftepyramide. Sind Q_1, ... die Kräfte des Bündels, dessen Resultante V senkrecht zu $\mathfrak{P}$ sei, ferner q_1, .., $\mathfrak{q}_1$, ... die orthogonalen resp. Neumann'schen Projectionen derselben in Bezug auf eine Kugel vom Radius r, deren Centrum O von $\mathfrak{P}$ um h entfernt ist, so stehen die Seiten Δ_1 der Pyramide $O(\mathfrak{q}_1 \dots)$ senkrecht zu den Kräften Q_1, ..., die Kanten $\mathfrak{q}_1$, ... ihrer Grundfläche Π senkrecht zu den Kräften q_1, ..., und es ist

$$Q_i = \frac{2}{r^2} \cdot \Delta_i; \qquad V = \frac{2}{r^2} \cdot \Pi; \qquad q_i = \frac{h}{r^2} \cdot \mathfrak{q}_i.$$

Da nun die k Kräftebündel des räumlichen Stabnetzes die genannte Bedingung erfüllen müssen, so bildet die Neumann'sche Projection des räumlichen Stabnetzes das Kräftenetz des ebenen Netzes. Aus der Bedingung, dass in jedem Stabe des ebenen Netzes zwei gleiche Spannungen in entgegeng

wirken, wird diejenige abgeleitet, dass die Actionslinien je zweier aufeinanderfolgenden äusseren Kräfte einander schneiden, also die Gesamtfigur des räumlichen Stabnetzes ein einfach zusammenhängendes polyedrales Flächenstück vorstellt, dessen Rand von den Actionslinien der äusseren Kräfte gebildet wird. Fügt man den k Kräftebündeln ihre Resultanten in entgegengesetztem Sinne zu, so erhält man ein allgemeines räumliches Kräftesystem im Gleichgewicht, dessen benachbarte Kräfte sich nicht zu schneiden brauchen; es wird gezeigt, wie sich ein solches leicht mit Hülfe der gegebenen Theorie berechnen lässt. Mit dem Satze von der Kräftepyramide wird weiter der von Rankine ohne Beweis gegebene Satz über das Gleichgewicht der Kräfte am polyedralen Stabnetz bewiesen und gezeigt, dass ein Rankine'sches Kräftepolyeder nur dann construirbar ist, wenn je zwei äussere Kräfte, deren Knotenpunkte durch einen Stab verbunden sind, in einer Ebene liegen. Den Schluss der Arbeit bildet die Anwendung der Theorie auf ein praktisches Beispiel (englischer Dachstuhl).

Bekanntlich haben Clerk Maxwell und Cremona (vergl. die genaueren Notizen in dem Originalartikel) die reciproken Figuren der graphischen Statik, ersterer mit Hülfe eines Rotationsparaboloids, letzterer mittels eines Nullsystems, behandelt. Wie nicht unerwähnt bleiben darf, hat Hr. Hauck noch nachgewiesen, dass zu gleichem Zwecke jede Rotationsfläche II. Ordnung dienen kann. Bk.

R. W. Genese. Reciprocation in Statics. Lond. M. S. Proc. XVII. 409-413.

Der Verfasser geht von der Bemerkung aus, dass, wenn ein ebenes System von Kräften P_1, P_2, ... in Gleichgewicht ist und die Richtungslinien derselben von einer Transversale in J_1, J_2, ... unter den Winkeln θ_1, θ_2, ... geschnitten werden, die zur Transversale senkrechten Componenten $P_1 \sin\theta_1$, $P_2 \sin\theta_2$, ... an den Angriffspunkten J_1, J_2, ... im Gleichgewicht sind. Hierdurch gelangt er zu Sätzepaaren, die sich dualistisch gegenüber stehen, und dies führt ihn zu dem Beweise des folgenden Satzes: „Wenn in den Polen der Wirkungslinien eines beliebigen ebenen Kräfte-

systems in Bezug auf einen Kreis mit dem Mittelpunkte O parallele Kräfte angebracht werden, die den Momenten dieser Kräfte in Bezug auf O (mit den passenden Zeichen versehen) proportional sind, so wirkt die resultirende Kraft längs der Polare des Mittelpunktes der parallelen Kräfte, und ihre Grösse und Richtung kann aus dem resultirenden Gewichte gefunden werden." Durch Orthogonalprojection wird der Satz auf die Ellipse ausgedehnt, durch imaginäre Projection auf die Hyperbel; für die Parabel wird die entsprechende Modification aufgestellt. Endlich wird auch noch eine Ausdehnung auf die Kinetik gemacht. Lp.

E. Rouché. Propriétés géométriques des polygones funiculaires. Nouv. Ann. (3) VI. 439-465.

Der Aufsatz enthält einen Auszug aus den Vorlesungen über graphische Statik, welche der Verf. im Conservatoire des Arts et Métiers 1886/87 gehalten hat. Nur die ebenen Seilpolygone werden betrachtet. Die Behandlung stützt sich auf ganz elementare Sätze. Nach der Definition der Seilpolygone werden einige Hülfssätze der Planimetrie entwickelt; sodann wird die Existenz der Axe nachgewiesen, die zwei Seilpolygonen desselben Kräftesystems gemeinsam ist, und diese Axe zu einigen Constructionen benutzt. Der Ort der Schnittpunkte zweier Seiten vorgeschriebenen Ranges bei den verschiedenen Seilpolygonen desselben Systems und der Ort der Pole für die Seilpolygone, bei welchen zwei Seiten vorgegebenen Ranges durch zwei gegebene Punkte gehen, werden aufgesucht, ebenso die besonderen Eigenschaften solcher Seilpolygone, welche zu einem Systeme von Kräften mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte oder von parallelen Kräften gehören. Zuletzt wird der Pol eines Kräftepolygons bestimmt, wenn drei Seiten vorgegebenen Ranges durch drei gegebene Punkte gehen sollen. Lp.

C. Segre. Sull' equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità e su alcune questioni geometriche affini. Nap. Mem. (3) VI. 35 S.

Siehe F. d. M. XVI. 1884. 776-78. Vi.

MANTEL. Nouvelle théorie des couples et de la composition des forces. Ass. Franç. (Toulouse.) 257-263.

S. CH. RÂY, W. J. BARTON, S. MARKS. Solution of question 8452. Ed. Times XLVII. 52.

Zwei homogene schwere Stäbe von der Länge a und b sind durch ein reibungsloses Gelenk an dem einen Ende verbunden, ruhen als Tangenten auf der convexen Seite eines Parabelbogens mit verticaler Axe und schliessen in der Gleichgewichtslage einen rechten Winkel ein. Dann ist der Winkel θ, welchen die Berührungssehne mit der Axe bildet, gleich $2\operatorname{arctg}\frac{a^2}{b^2}$. Lp.

A. GUYÉTAND. Note sur les propriétés du point central dans les actions mutuelles des trois corps. Brux. S. sc. XI. 320-336.

Wenn drei Körper sich derartig anziehen oder abstossen, dass ihre gegenseitigen Einwirkungen paarweise gleich und entgegen gerichtet sind, so gehen die Resultanten der Einwirkungen von zwei beliebigen der drei Punkte auf den dritten durch einen und denselben Punkt. Diesen nennt der Verfasser den Centralpunkt; er sucht die Lage desselben auf und bestimmt dann die Resultante der Einwirkungen der beiden ersten Punkte auf den dritten. Anwendungen und Eigenschaften. Mn. (Lp.)

T. K. ABBOT. To what order of lever does the oar belong? Phil. Mag. (5) XXIII. 58-61.

F. A. TARLETON. To what order of lever does the oar belong? Phil. Mag. (5) XXIII. 222-223.

Hr. Abbot betrachtet das Ruder als einen Hebel erster Art mit dem Stützpunkte am Ruderpflock und nicht, wie manche Schriften über Mechanik angeben, als einen Hebel zweiter Art

mit dem Stützpunkte im Wasser. Hr. Tarleton hält die Schlussweise des Hrn. Abbot für sachlich correct, aber für paradox, wenn nicht ungenau ausgedrückt. Gbs. (Lp.)

D. Besso. Dimostrazione elementare di un teorema sul centro di gravità di un arco di circolo. Besso Per. di Mat. II. 26-27.

Elementare Bestimmung des Schwerpunktes eines homogenen Kreisbogens. Vi.

Weinmeister. Ueber den Schwerpunkt des Mantels eines schiefen Cylinders. Hoffmann Z. XVIII. 107-108.

Es wird der allgemein gültige Satz bewiesen: Haben die Grundflächen eines schiefen Cylinders Mittelpunkte, so liegt in der Verbindungslinie derselben der Schwerpunkt des Mantels. Lg.

K. Meyer. In welchen Punkten seiner Oberfläche ruht ein durch einen Halbkreis entstandenes, homogenes schweres Halbellipsoid, und was für Gleichgewicht findet in ihnen statt? Diss. Erlangen. 38 S. 8°.

E. Sang. On cases of instability in open structures. Edinb. Trans. XXXIII. 321-333.

Der Verfasser bemerkt, er sei im Verlaufe einiger Bemerkungen über den Plan zur Forth-Brücke, der im XI. Bande der Transactions of the Royal Scottish Society of Arts veröffentlicht wurde, unter anderen Sätzen auch zur Aufstellung eines gar nicht vorauszusehenden geführt worden; derselbe geht darauf hinaus, dass jeder symmetrische Bau notwendig instabil ist, der auf einer rechtwinkligen Basis errichtet ist, keine überzähligen Stücke besitzt und nur von longitudinaler Deformation abhängt. Das Theorem gehört zu einer ausgedehnten Klasse,

und der Zweck des Aufsatzes ist eine Erörterung des Gegenstandes von einem abstracten allgemeinen Gesichtspunkte aus.

Cly. (Lp.)

Ed. Autenrieth. Berechnung der Anker, welche zur Befestigung von Platten an ebenen Flächen dienen. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 341, 459, 552.

R. Bredt. Berechnung von Fundamentplatten. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 459, 552.

Auf Grund vereinfachender Annahmen und Voraussetzungen behandeln die Herren Autenrieth und Bredt die Bestimmung der Kräfte, welche zwischen der durch Anker befestigten Fundamentalplatte eines Krahnes und ihrer Unterlage wirksam sind. Ueber die Zulässigkeit dieser Voraussetzungen zu entscheiden, ist wesentlich Sache des Praktikers; wir verweisen daher bezüglich der zwischen den Herren Autenrieth und Bredt entstandenen Discussion auf die Originalarbeiten.

F. K.

M. Köchlin. Arc parabolique supportant une charge uniformément répartie sur toute sa longeur et suivant l'horizontale. Schweiz. Bauztg. IX.

Es wird angenommen, dass jeder Querschnitt des Trägers senkrechte Beanspruchung erfährt, was bei der vorausgesetzten Form und Belastung des Bogens möglich ist, und dass die Grösse der Beanspruchung der Querschnittsfläche proportional ist. Es sei die Belastung $2T$, das Verhältnis eines Querschnittes zum Druck gleich k, die Breite des Bogens $2l$, f die Höhe, dann ist die Masse des Bogens gleich

$$kTl\left(\frac{l}{f}+\frac{4}{3}\frac{f}{l}\right).$$

Dieser Ausdruck wird bei gegebenem T und l zu einem Minimum, wenn

$$f=\frac{\sqrt{3}}{2}l=0{,}868\,l$$

wird.

F. K.

HÖPPNER. Seilzug durch drei gegebene Punkte. Civiling. XXXIII. 89-92.

Beschreibung eines von Maurice Lévy in seiner graphischen Statik gegebenen Verfahrens zur Lösung der im Titel genannten Aufgabe. Dasselbe beruht auf dem Gedanken, dass der geometrische Ort des Poles eine gerade Linie ist, wenn der Seilzug durch zwei feste Punkte gehen soll. F. K.

G. EMERY. Sulla condizione di scambievolezza e sui casi d'identità fra curve rappresentanti distribuzione continua di forze parallele e curve funicolari corrispondenti, con particolare disqnisizione sulle clinoidi. Torino Atti. XXII. 176-198.

Wirkt ein stetiges System von parallelen Kräften (y-Richtung) auf eine geradlinige Strecke (x-Richtung) und ist (in schiefwinkligen Coordinaten)

$$y = f(x)$$

die Gleichung derjenigen Curve (Belastungscurve), deren Ordinate die auf die Längeneinheit bezogene Intensität der Wirkung in jedem Punkte angiebt, so ist bekanntlich:

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{a}\int dx \int f(x)dx$$

die Gleichung der entsprechenden Seilcurve, wobei a eine willkürliche Constante bezeichnet. Der Verfasser wirft zunächst die ganz einfache Frage auf, von welcher Beschaffenheit die Function $f(x)$ sein muss, wenn zugleich der Belastungscurve $y = \varphi(x)$ die Seilcurve $y = f(x)$ entsprechen soll. Man findet als die einzig möglichen Formen:

$$f(x) = c_1 e^{\frac{x}{M}} + c_2 e^{-\frac{x}{M}} + c_3 \cos\frac{x}{M} + c_4 \sin\frac{x}{M},$$

$$f(x) = h\, e^{\frac{x}{N}} \sin\left(\gamma + \frac{x}{N}\right) + k e^{-\frac{x}{N}} \sin\left(\beta + \frac{x}{N}\right),$$

wo c_1, c_2, c_3, c_4, h, k, β, γ, M, N reelle Constanten sind.

Sollen ferner die zwei Curven $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ identisch sein, so muss offenbar $f(x)$ der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} y$$

genügen. Die entsprechenden (reellen) Curven zerfallen in vier Arten:

1. Meneklinoide (μένω; die Ordinate behält ihr Zeichen)

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{M}} + e^{-\frac{x}{M}}\right),$$

2. Trepsiklinoide (τρέπω; die Ordinate ändert ihr Zeichen)

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{M}} - e^{-\frac{x}{M}}\right),$$

3. Logarithmische Curve

$$y = ce^{\frac{x}{M}},$$

4. Sinusoide

$$y = c \cos \frac{x}{M}.$$

Jede Curve, deren Gleichung die Form:

$$y = c_1 e^{\frac{x}{M}} + c_2 e^{-\frac{x}{M}}$$

hat („Klinoide" nach Heinzerling in Zeitschrift für Bauwesen 1869, 1872), kann durch passende Verschiebung der y-Axe auf eine der drei Arten 1, 2, 3 gebracht werden.

Endlich möge auf folgendes Problem hingewiesen werden, welches vom Verfasser gelöst wird: Die Gleichung einer Klinoide aufzufinden, wenn der Berührungspunkt einer zur y-Axe senkrechten Tangente und ein anderer Punkt der Curve gegeben sind. Vi.

E. Novarese. Sopra una trasformazione delle equazioni d'equilibrio delle curve funicolari. Torino Atti XXII. 801-808.

Durch Zerlegung der einen materiellen Punkt angreifenden Kraft in zwei Componenten, von welchen die eine längs des Fahrstrahls nach einem Punkte in der Schmiegungsebene der Raumcurve und die andere nach der Tangente gerichtet ist, gelangt der

Verfasser zu einer Transformation der Gleichgewichtsbedingungen für die Kettenlinien. Diese Formeln lassen sich, wie er bemerkt, direct aus denjenigen für die Bewegung eines Punktes ableiten, welche Hr. Siacci und nach diesem die Herren Cerruti und Bardelli durch die gleiche Transformation (1879 und 80) gegeben haben; doch legt Hr. Novarese auf den von ihm gegebenen directen Beweis Gewicht. Lp.

P. Appell. Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. Toulouse Ann. I. B. 1-5.

Vervollständigung und Beweis eines in C. R. XCVI. 688 (F. d. M. XV. 1883. 794) ausgesprochenen Satzes. Wenn eine Kräftefunction U existirt, so können die Differentialgleichungen für das Gleichgewicht eines Fadens in die Gestalt gebracht werden:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0, \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}=0, \end{cases}$$

woraus sofort T (die Spannung) $=-(U+h)$ folgt. Der betreffende Satz lautet:

Man betrachte die partielle Differentialgleichung

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2=(U+h)^2,$$

welche Θ als Function von x, y, z definirt; nimmt man an, dass ein vollständiges Integral $\Theta(x, y, z;\ \alpha, \beta, h)$ von (2) gefunden ist, worin die beiden willkürlichen Constanten α und β von h und von der immer zu Θ zusetzbaren Constante verschieden sind, so sind die Integrale von (1):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}=\alpha', \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}=\beta', \quad \frac{\partial \Theta}{\partial h}=s+h',$$

wenn α', β', h' neue Constanten bezeichnen. Der Beweis schliesst sich ganz eng an Jacobi's Vorlesungen über Dynamik an.

Lp.

H. DANNEHL. Die Kettenlinie auf einigen Rotationsflächen. (Kreiskegel, Kreiscylinder, Rotationsparaboloid.) Diss. Königsberg. 64 S. 8°.

J. ŠOLIN. Bemerkungen zur Theorie des Erddrucks. Wien. Bauztg. LII. 53-54.

Die erste Bemerkung gilt einer Construction der Gleitfläche im unbegrenzten Erdreich bei ebener Terrainfläche und kann in ihren Ergebnissen nicht von älteren Constructionen abweichen. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die oft behandelte Frage, ob die Theorie des Erddrucks im unbegrenzten Erdreich zur Berechnung des Wanddrucks anzuwenden sei. Der Herr Verfasser kommt zu dem Resultat, dass dies nur in wenigen Ausnahmefällen zulässig sei. Er stützt sich dabei auf die Betrachtung einer vertical gestellten Wand, welche beiderseits von Erdreich begrenzt ist, welches eine gemeinschaftliche, durch den Kamm der Wand gehende, ebene Terrainfläche besitzt. Es sei unbestreitbar, dass der Druck auf der einen Seite, der des ansteigenden Geländes, erheblich grösser sei als auf der andern, und demgemäss sei die Theorie des unbegrenzten Erdreichs nicht anzuwenden.

Nach Meinung des Referenten ist diese Behauptung nicht richtig und beruht auf einer irrigen Auffassung des Grenzfallbegriffes. F. K.

A. C. ELLIOTT. On a new formula for the pressure of earth against a retaining wall. Edinb. Proc. XIV. 85-97.

Die Untersuchung stützt sich auf das Rankine'sche Princip, doch nimmt der Verf. Rücksicht auf die Reibung zwischen der Erdmasse und der Mauer; dadurch führt er in die Theorie einen Winkel β ein, den Rankine als Null annimmt. Cly. (Lp.)

K. v. OTT. Vorträge über Baumechanik. 3[te] umgearbeitete Aufl., Teil I. Die Statik des Erdbaues, der Stützmauern und Gewölbe. Prag. 8°.

J. Laffargue. Études théoriques et pratiques sur la poussée des terres et la stabilité des murs de soutènement et de revêtement. Toulouse. 95 S.

Mohr. Ueber die Bestimmung und graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civiling. XXXIII. 43-68.

Sind df ein Flächenelement, z seine Entfernung von einem festen Punkte P, φ_1 und φ_2 die Winkel zwischen der Verbindungslinie und zwei durch P gehenden Geraden PB und PC, so ist das Deviationsmoment von df bezüglich der beiden Geraden:

$$df\, z^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Beschreibt man nun irgend einen durch P gehenden Kreis mit dem Radius r, so schneiden der verlängerte Strahl (P, df), sowie PB, PC den Kreis zum zweiten Mal in A_1, B_1, C_1, und es ist nach bekannten geometrischen Sätzen der Abstand des Punktes A_1 von der Sehne B_1C_1 gleich $2r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$. Denken wir uns nun in A_1 die Masse

$$\frac{df z^2}{2r}$$

vereinigt, so ist deren statisches Moment bezüglich B_1C_1 gleich dem Deviationsmoment von df bezüglich der Strahlen PB und PC. Fallen die Geraden PB und PC zusammen, so geht das Deviationsmoment in das Trägheitsmoment über, und die Sehne B_1C_1 wird eine Tangente des gezeichneten Kreises. Das Deviationsmoment einer ausgedehnten Fläche ist also gleich dem statischen Moment einer über den Kreisbogen ausgedehnten Masse in Bezug auf die Sehne B_1C_1. Will man das erstere bestimmen, so bedarf man also nur der Kenntnis der über den Kreisbogen ausgedehnten Masse und der Lage ihres Schwerpunktes T_p. Sind nun Fi_1^2, Fi_2^2, Fi_3^2 die Trägheitsmomente der Fläche F in Bezug auf drei durch P gehende Axen, h_1, h_2, h_3 die Abstände des Punktes T_p von den zugehörigen Kreistangenten, so ist

$$\frac{Fi_1^2}{h_1} = \frac{Fi_2^2}{h_2} = \frac{Fi_3^2}{h_3}$$

der Ausdruck für die Masse des Kreises, ausserdem geben die Gleichungen die Bestimmungsstücke für die Lage von T_p. Die Masse von T_p ist das durch $2r$ dividirte polare Trägheitsmoment Fi_p^2 der gegebenen Fläche bezüglich P.

Ist nun S der Schwerpunkt der Fläche, P irgend ein anderer Punkt, welcher von jenem die Entfernung p hat, so ist der Trägheitsschwerpunkt T_p in Bezug auf irgend einen durch P und S gehenden Kreis gleichzeitig der Schwerpunkt der in T_s angebrachten Masse $\frac{Fi_s^2}{2r}$ (Trägheitsmasse des Schwerpunktes) und der in P selbst angebrachten Masse $\frac{Fp^2}{2r}$.

Macht man den Durchmesser des Kreises gerade gleich dem Halbmesser des polaren Trägheitsmomentes, so kann man den Trägheitshalbmesser für irgend eine Axe, welche den Kreis in S und A schneidet, sehr leicht folgendermassen construiren: Ueber der Strecke T_pM (Mittelpunkt des Kreises) als Durchmesser beschreibe man einen zweiten Kreis; die Verbindungslinie MA schneide den letzteren in B und die Verbindungslinie AT_s den ersten Kreis in C resp. C', dann sind AC und AC' gleich dem Trägheitsradius i in Bezug auf SA.

Besonders interessant sind die Punkte, bei denen die Trägheitsmomente in Bezug auf alle Axen einander gleich sind; bei diesen muss der Trägheitsschwerpunkt stets mit dem Mittelpunkt des Kreises zusammenfallen. Solche Punkte giebt es stets zwei. Der Herr Verfasser construirt sie folgendermassen. Der Mittelpunkt eines durch S gehenden Kreises vom Durchmesser i_s wird auf der Axe des kleineren Hauptträgheitsmomentes angenommen; dann liegt auch T_s auf dieser Axe. Der Endpunkt des Durchmessers ST_s sei H_2. Ueber ST_s als Durchmesser wird ein zweiter Kreis beschrieben, dann wird in M ein Lot zu MS errichtet, welches den eben beschriebenen Kreis in A_1 und A_2 schneidet. Die Schnittpunkte B_1 und B_2 der Verbindungslinien H_2A_1 aus H_2A_2 mit der Tangente in S sind die gesuchten Punkte, welche der Herr

Verfasser Brennpunkte nennt. Zahlenbeispiele, Andeutungen für eine graphische Darstellung der Trägheitsmomente und eine Anwendung der vorgetragenen Entwickelungen auf eine Aufgabe der Festigkeitslehre bilden den Schluss der interessanten Abhandlung. F. K.

PESCHECK. Der Ausdruck Trägheitsmoment. Centralbl. d. Bauverw. VII. 28.

Hr. Pescheck behauptet und sucht durch Anführung der betreffenden Stellen aus der Theoria motus corporum solidorum zu beweisen, dass für Euler bei der Wahl des Namens „Trägheitsmoment“ eine rein äusserliche Aehnlichkeit in den Formeln für die fortschreitende und drehende Bewegung massgebend gewesen sei. F. K.

R. LE BRUN. Méthodes approchées de quadratures. Génie civ. XI. 340.

Im Anschluss an ältere Formeln für näherungsweise Berechnung von Flächeninhalten (Leclerk, Simpson, Poncelet, Catalan) teilt Herr Le Brun neue Formeln mit, welche sich von jenen teils durch grössere Einfachheit, teils durch grössere Genauigkeit unterscheiden. Auch Methoden zur Bestimmung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten kommen zur Besprechung. F. K.

LEYGUE. Table des moments d'inertie. Paris. 8°.

B. Hydrostatik.

R. POTTER. Treatise on hydrostatics and hydrodynamics. Part II. London. 250 S. 8°.

D. Bobylew. Hydrostatik und Theorie der Elasticität starrer Körper. St. Petersburg. 1886. 182 S. u. 1 Taf. gr. 8°. (Russisch.)

J. W. Tatarinoff. Ueber die Zahl der Gleichgewichtslagen eines horizontal schwimmenden geraden vieleckigen Prismas. Mosk. Math. Samml. XIII. 544-550. (Russisch.

Indem der Verfasser von dem Satze ausgeht, dass die Schwerpunktscurve eines beliebigen Vielecks aus hyperbolischen und parabolischen Bogen besteht, beweist er, dass ein n-seitiges horizontal schwimmendes Prisma nicht mehr als $4n$ Gleichgewichtslagen haben kann; ferner zeigt er, dass ein derartiges Prisma bei einer gewissen Dichtigkeit genau $4n$ Gleichgewichtslagen besitzt, wenn der Querschnitt des Prismas ein regelmässiges n-Eck ist. Ms.

G. Cabjolsky. Ueber den Einfluss des im Innern von Schiffen, Schwimmdocks u. s. w. befindlichen Wassers auf deren Stabilität. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 425.

Wenn in einem schwimmenden Körper sich Wasser befindet, so wird die Beweglichkeit des letzteren einen nachteiligen Einfluss auf die Stabilität ausüben. Als Mass für die Stabilität eines starren schwimmenden Systems kann man bekanntlich die Höhe des Metacentrums über dem Schwerpunkt betrachten; Metacentrum nennt man bekanntlich die Grenzlage desjenigen Punktes, in welchem die Wirkungslinie des Auftriebes nach einer kleinen Drehung des Schiffes die ursprüngliche Schwerlinie schneidet. Das vorhandene Wasser bewirkt eine Veränderung der Schwerpunktslage des gegebenen Systems. Verlängert man nun die Wirkungslinie der Schwere des schwimmenden Körpers und diejenige des Auftriebs, bis sie die ursprüngliche Schwerlinie in zwei Punkten A und M schneidet, so kann die Entfernung H_r, die sogenannte reducirte metacentrische Höhe, als Mass für die Stabilität benutzt werden. Der Herr Verfasser berechnet nun für einige Fälle die Länge der reducirten metacentrischen Höhe.

Im Anschluss hieran bespricht er einige Mittel, die dazu dienen können, den Verlust der Stabilität, welche das Vorhandensein der Flüssigkeit im Innern — z. B. bei Petroleumschiffen — mit sich bringt, entweder ganz zu vermeiden oder wenigstens zu verringern. F. K.

GUYOU et SIMART. Développements de géométrie du navire avec application aux calculs de stabilité du navire. C. R. CIV. 746-751.

Es liegt in der Note ein äusserst anerkennender Bericht des Herrn de Jonquières über eine Abhandlung gleichen Titels vor, welche die Herren G. und S. der französischen Akademie vorgelegt haben. Der Brief schliesst mit dem seitens der Akademie angenommenen Vorschlage, die Abhandlung in den Mém. des S. étrang. zu veröffentlichen. Wir werden daher Gelegenheit haben, später auf den Inhalt einzugehen. F. K.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

J. C. McCONNELL. On Lagrange's equations o[illegible]ion. Cambr. Proc. VI. 25-27. (1886.)

Eine Abänderung des Beweises für diese Gleich[illegible] chen Lord Rayleigh in seiner Theory of Sound gegebe[illegible] Vereinfachung wird durch die Annahme bewirkt, dass [illegible] kürlichen Verrückungen des Systems nicht mit der [illegible] ändern. Der Verf. meint, dadurch trete die Rolle klarer [illegible] welche das letzte Glied der Endglei[illegible] der Bewegung [illegible] Am Schluss der Note wird der vo[illegible]well in Elec[illegible]

and Magnetism gegebene Beweis der Lagrange'schen Gleichungen kritisirt. Lp.

R. RIJKENS. Transformatie en integratie van de dynamische vergelijkingen volgens de methode van Hamilton en Jacobi. Diss. Groningen. Wolters. 86 S. 4°.

Nach Anleitung der „Vorlesungen über Dynamik“ von Jacobi behandelt diese Dissertation die Transformation und Integration der allgemeinen dynamischen Grundgleichungen unter Zugrundelegung der Methode von Hamilton und speciell mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Zeit in den Bedingungen oder in der Kräftefunction auftritt.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Einführung der allgemeinen Coordinaten von Lagrange, im zweiten folgt die Ableitung der canonischen Gleichungen, im dritten wird der erste Satz von Hamilton besprochen; der vierte leitet aus diesem Satz die zweite Form von Lagrange für allgemeine Coordinaten ab, aus denen im fünften von neuem die canonischen Gleichungen aufgestellt werden, worauf einige Beispiele als Anwendungen sich anschliessen. Im sechsten Abschnitt wendet sich der Verfasser zu der partiellen Differentialgleichung Hamilton's, im siebenten zum Theorem von Jacobi über die Function V, von der einige besondere Fälle bearbeitet werden. Im achten, neunten und zehnten Abschnitt folgt die Integration der partiellen Differentialgleichung Hamilton's mit einer, zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen, wovon einige Beispiele vorgeführt werden; endlich im letzten Abschnitt wird eine Erweiterung des Theorems von Poisson behandelt, welche bereits früher mitgeteilt wurde.

G.

G. SABININE. Sur les considérations d'Ostrogradsky et de Jacobi relatives au principe de la moindre action. Annali di Mat. (2) XV. 27-51.

Ostrogradsky hat in den Mémoires der Petersburger Akademie (6) IV folgende Fassung für das Princip der kleinsten

Wirkung vorgeschlagen: Bei der Bewegung eines beliebigen Systems von Körpern, auf welche Kräfte einwirken, deren Kräftefunction Π nur von den Coordinaten, nicht aber von der Zeit t explicit abhängt, wird das zwischen den Grenzen t_0 und t_1 genommene Integral $\int_{t_0}^{t_1} (\Pi + T)\, dt$, in welchem T die halbe lebendige Kraft des Systems bezeichnet, ein Minimum, vorausgesetzt, dass man die Anfangs- und die Endlage des Systems als gegeben ansieht, und dass die Variationen von t bezüglich der Grenzen t_0 und t_1 unter einander gleich sind. In den ersten beiden Paragraphen beschäftigt sich der Verf. mit dem Nachweise der Richtigkeit dieses Satzes und der Herleitung der Bewegungsgleichungen aus ihm. Er ist der Ansicht, das Ostrogradsky'sche Theorem enthalte als besonderen Fall jedes der beiden Principien, welche er selbst in dem Aufsatze „Sur le minimum d'une intégrale" (Annali di Mat. (2) XIV. 30, F. d. M. XVIII. 1886. 845ff.) ausgesprochen und dort als Principe der kleinsten lebendigen Kraft sowie der kleinsten Intensität der Kräfte bezeichnet hat. Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen zeigt Hr. S. die Ungenauigkeit einer Bemerkung Ostrogradsky's in betreff der bezüglichen Methode bei Lagrange.

Im dritten Paragraphen sucht der Verf. zu beweisen, dass das Minimum, welches durch das Princip der kleinsten Wirkung in der Jacobi'schen Fassung bestimmt wird (Vorlesungen über Dynamik, S. 45), ein relatives ist, und dass der Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Principe der kleinsten Wirkung bei Jacobi (l. c. S. 50 und 51) eine Ungenauigkeit anhaftet; dieselbe sei vollkommen derjenigen analog, welche Bertrand in se[illegible] Ausgabe der Mécanique analytique bei Lagrange hervorge[illegible] habe (Bd. I, S. 277 und 279 der dritten Aufl.). Lp.

Lord Rayleigh. The reaction upon the driving-p[illegible] of a system executing forced harmonic oscillation[illegible] various periods, with applica[illegible] electric[illegible]
Phil. Mag. (5) XXI. 369-381.

Der Zweck dieser Mitteilung ist der Beweis einiger allgemeinen mechanischen Theoreme, welche in gewisser Hinsicht als Erweiterungen jenes Thomson'schen betreffs der Energie anfänglicher Bewegungen angesehen werden können (Thomson and Tait, Nat. Phil. §§ 316, 317.). In der Einleitung zur Abhandlung ist das Theorem über die kinetische Energie in eine Form gebracht, welche das Theorem von Thomson und das von Bertrand als bloss verschiedene Ansichten derselben Wahrheit erscheinen lässt. In enger Verwandtschaft zu diesem Theoreme stehen zwei andere. Das erste derselben gilt für ein System, welches aus dem stabilen Gleichgewichte durch eine Kraft von festgesetztem Typus abgebracht wird: Wenn die Grösse der entsprechenden Verrückung gegeben wird, so ist die Kraft ein Minimum; oder wenn die Grösse der Kraft gegeben wird, so ist die Verrückung ein Maximum, falls kein Zwang vorhanden ist. Das zweite bezieht sich auf die Eigenschaften der Dissipationsfunction. Die Frage wird dann aufgenommen, unter welchen Bedingungen die Theoreme gelten, wenn die (mitgeteilte) Kraft eine harmonische Function der Zeit ist, indem alle drei Theoreme voraussetzen, dass nur eine von den drei Functionen: kinetische Energie (T), Dissipation (F), potentielle Energie (V) jedesmal in Betracht kommt. Nunmehr wird der Hauptgegenstand der Abhandlung in Angriff genommen, nämlich das Verhalten von Systemen, in denen F und die eine oder die andere der übrigen Functionen T und V wahrnehmbar sind, aber ohne die Beschränkung auf sehr schnelle oder sehr langsame Bewegungen, wodurch der Einfluss der zweiten Function beseitigt werden kann. Als Beispiele für das allgemeine Theorem führt der Verf. die Probleme an, welche Stokes in seiner Schrift über „The effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums" betrachtet hat. Für den Fall zweier Grade von Freiheit erörtert er die Rückwirkung der in einem benachbarten secundären Stromkreis inducirten elektrischen Ströme auf den primären Stromkreis und das Problem zweier elektrischen Conductoren in Parallelstellung. Der Fall mehrerer Conductoren in Parallelstellung wird auch kurz behandelt. Gbs. (Lp.)

J. J. Rachmaninoff. Ueber die Transformation der Differentialgleichungen bei der relativen Bewegung eines Systems in die kanonische Form. Kiew Nachr. 14 S. (Russisch.)

N. Joukowsky. Ueber den Mittelwert des kinetischen Potentials. Odessa Ges. VIII. 4 S. (Russisch.)

J. Mestschersky. Differentialbedingungen in dem Falle eines einzigen materiellen Punktes. Chark. Ges. 68-79. (Russisch.)

Es wird vorzugsweise der Fall betrachtet, wo die Bedingungsgleichungen Differentialquotienten erster Ordnung von den Coordinaten des Punktes enthalten. Nachdem der Verfasser gezeigt hat, dass die durch eine derartige Gleichung ausgedrückte Bedingung in der Regel durch ein auf den materiellen Punkt wirkendes Medium erfüllt werden kann, bildet er die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes und wendet dieselben auf zwei specielle Fälle an. Ms.

G. Schouten. No. 5 der prijsvragen voor het jaar 1885. Nieuw Archief. XIV. 1-77.

Fortsetzung und Schluss einer früher genannten Abhandlung (Siehe F. d. M. XVIII. 1886. 855). Jetzt werden die folgenden besonderen Fälle untersucht.

Die bewegende Kraft ist gegeben durch: 1) $ar^{-3}+$
2) $ar^{-3}+br^{-5}$, 3) $ar^{-3}+br^{-4}$, 4) $ar^{-3}+br$, 5) ar^{-3}
6) $ar^{-3}+br^{5}$, 7) $ar^{-4}+br^{-5}$, 8) $ar^{-5}+br^{-7}$, 9) ar^{-}
10) $ar^{-7}+br$. Die Behandlung ist dieselbe wie die berei
geteilte; die Formeln werden auf elliptische Functionen z
geführt und daraus die Formen der Bahnen abgeleitet. D
Verfasser von der Voraussetzung ausgeht, dass die Anf
geschwindigkeit senkrecht zum Leitstr findet er
den neun möglichen Hauptformen nu G.

G. Schouten. Algemeene regel voor den baanvorm en duur der centrale beweging. Amst. Versl. en Meded. III. (3) 373-425.

G. Schouten. Elucidation graphique de la règle générale pour la forme de la trajectoire et les propriétés du mouvement central. Néerl. Arch. XXII. 392-421.

G. Schouten. Règle générale pour la forme de la trajectoire et la durée du mouvement central. Néerl. Arch. XXII. 158-209.

Diese Abhandlungen über die centrale Bewegung eines Punktes schliessen sich an die vorhergehende an. Hier sucht der Verf. für die Fälle, in denen eine directe Integration nicht möglich ist, allgemeine Regeln festzustellen, um zu bestimmen, zu welchen der verschiedenen möglichen Bahntypen eine Bahn gehört, deren Anfangsgrössen gegeben sind.

Nachdem er die bekannten Bewegungsgleichungen auf eine für seinen Zweck passende Art umgeformt hat, weist er auf den Umstand hin, dass die radiale Geschwindigkeit bei zunehmendem Abstand vom Mittelpunkt abnimmt oder wächst, nach Massgabe des Zeichens, welches der Ausdruck C^2-Fr^3 besitzt, worin C die doppelte Sectorgeschwindigkeit, F die Centralkraft, r den Abstand vom Mittelpunkt bedeutet. Dabei ergeben sich vier Fälle. Der erste umfasst alle Kraftgesetze, bei denen die bewegende Kraft überall abstossend wirkt. In den übrigen wirkt sie anziehend, aber erstens so, dass Fr^3 constant bleibt, zweitens so, dass Fr^3 stets zunimmt, drittens so, dass es stets abnimmt mit zunehmendem Abstand vom Mittelpunkt. Für jeden dieser Fälle werden die Bahnformen bestimmt und die Bedingungen ihres Auftretens untersucht.

Darauf geht der Verfasser zu der allgemeinen Voraussetzung über, dass das Kraftfeld an verschiedenen Stellen einen verschiedenen Charakter trägt, und giebt eine allgemeine Regel zur Unterscheidung der verschiedenen Bahntypen. Er untersucht nicht nur, ob die Bahn in das Unendliche läuft oder den Mittelpunkt erreicht, sondern giebt auch an, welche Gestalt der nach

dem Unendlichen oder nach dem Mittelpunkt gerichtete Zweig hat, und ob die Zeit, in welcher das erstere oder der letztere erreicht wird, endlich oder unendlich ist. Die ins Unendliche sich erstreckenden Zweige teilt er ein in hyperbolische, die eine durch den Mittelpunkt gehende Asymptote besitzen oder nicht, parabolische ohne Asymptote und spiralförmige, welche sich mit einer unendlichen Anzahl Windungen ins Unendliche fortsetzen. Ebenso werden die nach dem Mittelpunkt führenden Zweige nach der endlichen oder unendlichen Anzahl von Windungen unterschieden. Schliesslich wird die entwickelte Theorie auf einige Beispiele angewandt. Die Ergebnisse stimmen mit den Eigenschaften überein, welche Hr. Korteweg für die centrale Bewegung festgestellt hat (Siehe F. d. M. XVI. 1884. 802), sind jedoch auf anderem Wege gefunden. G.

F. Rudio. Ueber die Bewegung dreier Punkte in einer Geraden. J. für Math. C. 442-446.

In Bd. IV der gesammelten Werke von C. G. J. Jacobi S. 533—539 veröffentlichte Hr. Wangerin aus Jacobi's Nachlass eine Abhandlung über die Bewegung dreier Punkte in einer Geraden, wenn die Punkte sich umgekehrt dem Kubus der Entfernung anziehen. Aus diesem Anlasse übergiebt Hr. Rudio eine denselben Gegenstand behandelnde Arbeit dem Drucke. Schon 1881 beendigt, stützt sich die Abhandlung auf Betrachtungen aus Jacobi's Vorlesungen über Dynamik und liefert die Coordinaten als Functionen der Zeit und einer von der Zeit abhängenden Function φ. Die Form des Resultates wird durch die Berichtigung eines Versehens, welche Bd. CII. S. 8 erfolgt, ein wenig geändert. Lp.

H. Vogt. Die elementare Herleitung des Newton'schen Anziehungsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen. Hoffmann Z. XVIII. 481-491.

Nach einer kurzen Besprechung der bisher gegebenen Beweise für die Ableitung einer dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportionalen Beschleunigung legt der Verfasser

einen Beweisgang vor, der streng und ganz elementar ist, insbesondere nicht der Kenntnis des Krümmungshalbmessers der Ellipse bedarf. Zunächst erfolgt die Herleitung der Beschleunigung der Kreisbewegung für einen beliebigen Punkt im Innern als Anziehungspunkt (Newton, Principia lib. I, prop. VII), sodann die Zurückführung der elliptischen Bewegung auf die Kreisbewegung durch Parallelprojection (cf. Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels § 24). Natürlich gilt diese Ableitung nur für die elliptische Bewegung. Der Beweis von Hrn. Lespiault, der im vorigen Jahrgange (S. 850) angedeutet wurde, ist weniger einfach, weil er von den Bezeichnungen der Infinitesimalrechnung Gebrauch macht, und selbst von diesen befreit mehr Rechnung erheischt. Lp.

DE LA RIVE. Étude mathématique sur un cas particulier de la gravitation. Arch. sc. phys. (3) XVI. 593-595. (1886.)

Die Notiz giebt nur den Gedankengang und den Verlauf der Rechnung einer grösseren Arbeit im Auszuge an. Als Ergebnis wird angeführt: Wenn eine Masse m um eine andere M kreist, so giebt es einen Punkt P, dessen Lage mit dem Fahrstrahle fortrückt, von solcher Beschaffenheit, dass ein Massenpunkt μ, der sich in seiner Nähe befindet, dort bleiben kann, indem er eine geschlossene Bahn um diesen Punkt beschreibt (unter der combinirten Einwirkung der Attraction und der Centrifugalbeschleunigung). Theoretisch ist es also zulässig, dass ein Sternschnuppenschwarm während einer gewissen Zeit kreisen kann, indem er einem Planeten in seiner einem Kreise angenäherten Bahn folgt. Lp.

B. K. MLODZIEWSKY. Ueber die Enveloppe der Bahnen bei dem Newton'schen Anziehungsgesetze. Mosk. Math. Samml. XIII. 399-405. (Russisch.)

N. JOUKOWSKY. Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. Mlodziewsky. Mosk. Math. Samml. XIII. 406-408. (Russisch.)

DE SALVERT. Mémoire sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans les problèmes de Mécanique et les lignes géodésiques des surfaces isothermes. Brux. S. sc. XI. B. 1-138, Paris. Gauthier-Villars.

Bericht auf S. 765-766 dieses Bandes.

K. BOHLIN. Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. Acta Math. X. 109-130.

Man nehme an, dass die Bewegungsgleichungen eines in einer Ebene frei beweglichen materiellen Punktes auf ein erstes Integral von der Form

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = f(x,y)-h$$

führen (ds das Wegdifferential, x und y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes, h die Integrationsconstante). Statt der rechtwinkligen Coordinaten treten häufig bipolare r, ϱ auf, so dass $f(x,y) = F(r,\varrho)$. Die Curve $f(x,y) = h$ oder $F(r,\varrho) = h$ bezeichnet die Grenze, auf welcher die Geschwindigkeit Null wird; dagegen stellt $f(x,y)-h = c^2$ eine Curve dar, auf welcher die Geschwindigkeit den Wert c hat. Die Grenzcurve $f(x, y)-h = 0$ zerlegt die Ebene in solche Teile, dass c^2 das Zeichen wechselt, wenn der Punkt (x, y) die Curve überschreitet. Negative Werte kann c^2 aber nicht annehmen; der Punkt muss sich also immer in einem positiven Gebiete der Ebene befinden. Ist die Grenzcurve um ein positives Gebiet geschlossen, so bleibt daher die Bewegung stabil. Wird die Grenzcurve irgendwo erreicht, so erhält die Bahncurve in dem bezüglichen Punkte eine Spitze.

Diese Betrachtungen werden zunächst an bekannten Beispielen erläutert: 1) An der relativen Bewegung eines der beiden Körper im Zweikörperproblem um den anderen. Aus $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a}$ folgt die Gleichung der Grenzcurve $r = 2a$, für positive a also ein Kreis. 2) An der Bewegung eines von

zwei festen Punkten nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen Punktes. Das Quadrat der Geschwindigkeit wird:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\varrho} - h,$$

die Grenzcurve hat daher die Gleichung

$$\frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\varrho} = h,$$

und ist die Niveaucurve der beiden anziehenden Punkte; ein positiver Wert von h sichert die Stabilität der Bewegung. Danach werden die Schlüsse auf die Erforschung folgender Fälle von Bewegungen in einer Ebene angewandt:

1) Ein materieller Punkt μ beschreibt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit n einen Kreis vom Radius a um einen zweiten Punkt m. Beide ziehen nach dem Newton'schen Gesetze einen dritten Punkt P an, von welchem vorausgesetzt wird, dass er auf die vorigen keine Einwirkung ausübt. Man sucht die Bedingungen dafür, dass die Bewegung in Bezug auf die beiden anziehenden Punkte stabil ist. Die eingehendere Discussion der in Betracht kommenden Curve

$$n^2 r^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\varrho} = h$$

ist im Bihang till Kongl. Svenska Vetenskapsakademiens handlingar, B. 13 No. 1 veröffentlicht.

2) Ein besonderer Fall des Dreikörperproblems. Die Geschwindigkeit des einen materiellen Punktes μ sei in einem gewissen Augenblicke längs der y-Axe gerichtet. Die beiden anderen Punkte, jeder von der Masse m, haben in demselben Augenblicke Lagen und Geschwindigkeiten, die symmetrisch in Bezug auf die y-Axe sind.

3) Das Dreikörperproblem in der Ebene. Die zu discutirende Gleichung, über welche einige Betrachtungen angestellt werden, ist

$$\frac{c}{r} + \frac{c'}{r'} + \frac{c''}{r''} = h.$$

4) Nach der Bemerkung, dass entsprechende Schlüsse auf den Raum übertragen werden können, wird eine Anwendung

der angeführten Betrachtungsweise auf die Untersuchung über die Existenz der Libration in der Länge eines Planeten hinzugefügt. Lp.

H. Bruns. Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems.
Leipz. Ber. 1-39, 55-82; Acta Math. XI. 25-96.

„Die bis jetzt bekannten Integrale des Vielkörper-Problems, nämlich die Schwerpunkts- und Flächen-Sätze und der Satz von der lebendigen Kraft, besitzen die gemeinsame Eigenschaft, dass sie die Coordinaten und die Geschwindigkeits-Componenten nur in algebraischen Verbindungen enthalten. Dieser Umstand, sowie die Vergeblichkeit der bisherigen Bemühungen zur Auffindung weiterer Integrale legen die Vermutung nahe, dass der Kreis der algebraischen Integrale mit den genannten abgeschlossen sei. Es soll deshalb hier die Aufgabe behandelt werden, alle algebraischen die Zeit nicht explicite enthaltenden Integrale aufzusuchen".

Die Untersuchung betrifft die Eigenschaften der Integrale gewisser Differentialgleichungen und gehört somit eigentlich in das Capitel der Differentialgleichungen. Da es nicht angeht, den Gedankengang hier auszugsweise vorzuführen, so begnügen wir uns mit der Wiedergabe der hauptsächlichsten Ergebnisse. Der Inhalt der §§ 1—8 wird vom Verfasser in § 9 zusammengefasst: „Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt}=y_\alpha,\quad \frac{dy_\alpha}{dt}=A_\alpha \qquad (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

in welchem die A als homogene rationale Functionen von der geraden Ordnung $2N$ aus den x und einer gewissen Irrationalität s zusammengesetzt sind. Die Grösse s ist Wurzel einer irreductiblen Gleichung

$$s^n+S_1s^{n-1}+\cdots+S_n=0,$$

deren linke Seite eine ganze homogene Function der s, x von der n^{ten} Ordnung bildet. Wenn das vorgelegte System von Differentialgleichungen algebraische, von t freie Integrale besitzt, so lassen sich dieselben allemal darstellen als algebraische Functionen eines oder mehrerer Integrale φ, welche folgende Eigen-

schaften besitzen: 1) Jedes φ ist eine ganze rationale Function der y, eine rationale Function der x und s. 2) φ ist in den Dimensionen homogen, d. h., wenn man für die x, s, y resp. setzt xk^2, sk^2, yk^{1+2N} (k = Constante), so nimmt φ wieder die ursprüngliche Gestalt an, jedoch versehen mit einer gewissen Potenz von k als Factor. 3) Bedeutet φ_0 das Aggregat der Glieder in φ, welche in Bezug auf die y von der höchsten Ordnung sind, so sind, wenn φ_0 nach den y geordnet wird, die Coefficienten ganze rationale Functionen der x ohne gemeinsamen Teiler. 4) Der Ausdruck φ_0 genügt der Bedingung $\Sigma\, y_a \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_a} = 0$, enthält also die x nur in den Verbindungen $y_1 x_a - y_a x_1$ ($a = 2, 3, \ldots, m$)."

Die Differentialgleichungen des Vielkörper-Problems, welche einen speciellen Fall der hier betrachteten Differentialgleichungen bilden, werden von da an für sich untersucht, und am Ende von § 14 wird der Satz gewonnen:

„Bei dem Vielkörper-Problem ist der Kreis der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale vollständig mit den bekannten Integralen, nämlich den Schwerpunktsätzen, den Flächensätzen und dem Satz von der lebendigen Kraft abgeschlossen".

Nachdem dieses Hauptresultat der Untersuchung erreicht ist, transformirt der Verfasser die Gleichungen für das Dreikörperproblem in ein System zwölfter Ordnung; aus ihm erhält er durch Abspaltung der Reihe nach ein System zehnter und dann ein System achter Ordnung; endlich erlangt er ein System sechster Ordnung, über welches er in § 16 sich so ausspricht: „Eine weitere Reduction als auf dieses System sechster Ordnung, welches schon mehrfach, wenn auch in abweichender Gestalt, abgeleitet worden ist, lässt sich, wie aus den Untersuchungen von Hrn. Lie über Gruppen (Math. Ann. VIII.) hervorgeht, an der Hand der bisher bekannten Integrale nicht erreichen".

Im zweiten Teile der Arbeit wird zunächst (§ 17) gezeigt, dass, wenn ein Integral des Vielkörperproblems auch noch die Variable t algebraisch enthält, das Gebiet aller algebraischen

Integrale durch die bekannten zehn völlig erschöpft ist. Sodann wird die Frage in Angriff genommen, wie weit es möglich sei, durch algebraische Transformationen der Lösung des Vielkörperproblems näher zu kommen; doch wird die Untersuchung nur für das Dreikörper-Problem durchgeführt. Statt des Systems achter Ordnung wird das System siebenter Ordnung betrachtet, welches sich aus dem System achter Ordnung dadurch ergiebt, dass man mittels des Integrals der lebendigen Kraft die Variable p fortschafft und q an Stelle von t als unabhängige Variable einführt. Wir geben zuletzt die Schlussworte der Untersuchung (§ 25): „Es existiren zu dem System siebenter Ordnung keine Abel'schen Integrale, und ebenso auch nicht zu dem System achter Ordnung. Bei den vorstehenden Entwickelungen waren wir von einer besonderen Form der Bewegungsgleichungen für das Dreikörper-Problem ausgegangen; nämlich dem hier benutzten System siebenter Ordnung. Da jedoch ein Abel'sches Integral durch eine algebraische Transformation der Variabeln wiederum in ein Abel'sches übergeht, so gilt das gefundene negative Resultat für alle Formen der Bewegungsgleichungen, welche aus den ursprünglichen durch rein algebraische Umformungen entstehen. Das gefundene Resultat gilt ferner auch für das Vielkörper-Problem. Reducirt man nämlich beim Vielkörper-Problem die Ordnung des Systems ähnlich wie bei dem Dreikörper-Problem durch Benutzung der bekannten Integrale, so erhält man algebraische Differential-Gleichungen. Existirt zu diesen ein Abel'sches Integral, so enthält der Ausdruck, über welchen die Quadratur auszuführen ist, die Massen nur in algebraischer Weise; man müsste also unter allen Umständen durch das Verschwindenlassen einer oder mehrerer Massen zu einem Abel'schen Integral für das Dreikörper-Problem gelangen, was nicht sein darf. Die vorstehend hergeleiteten negativen Ergebnisse enthalten, wie mir scheint, eine hinreichende Erklärung für die Thatsache, dass man bei der Aufsuchung neuer Integrale des Dreikörper-Problems seither nicht über den bereits vor einem Jahrhundert erreichten Standpunkt hinausgelangt ist". Lp.

A. SEYDLER. Ausdehnung der Lagrange'schen Behandlung des Dreikörperproblems auf das Vierkörperproblem. Prag. Abh. (7) I. 1-20.

In der Abhandlung von Lagrange „Essai sur le problème des trois corps“ 1772 ist das Problem der drei Körper auf den Standpunkt gebracht worden, auf den es im wesentlichen jetzt noch steht. Da seine Lösung 18 willkürliche Constanten mit sich führt und 10 Integrale bekannt sind, so bleiben acht Integrationen zu leisten. Diese kann man trennen, wenn man zunächst die Entfernungen allein in Betracht zieht, und erzielt so mit Benutzung der 10 Integrale ein System siebenter Ordnung und schliesslich eine einfache mechanische Quadratur. Nachdem der Verf. die Lagrange'schen Formeln übersichtlich zusammengestellt hat, entwickelt er die natürlich complicirteren Formeln für vier Körper und erhält, wie es sein muss, ein dem Lagrange'schen System entsprechendes System 13ter Ordnung, welches übrigens durch Elimination der Zeit noch um eine Einheit verringert werden kann. Die Behandlung ist teils analytisch, teils geometrisch. Dz.

P. HARZER. Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Pétersbourg Mém. (7) XXXIV. No. 12. IV u. 156 S. 4⁰ nebst 1 Taf.

Bei dem Berichte über diese umfangreiche Arbeit schliessen wir uns der Einleitung an, in welcher der Verfasser die leitenden Gedanken der Rechnung darlegt.

Das Problem betrifft die Bewegungen eines Planeten (Hekuba, 108), welcher ausser der Anziehung durch die Sonne noch der durch einen anderen Planeten, den störenden (Jupiter), unterliegt, dessen mittlere Bewegung näherungsweise halb so gross ist wie die des gestörten Planeten. Dieser Fall verdient vor allen anderen Fällen, in welchen die mittleren Bewegungen sich näherungsweise wie zwei ganze Zahlen verhalten (oder angenähert commensurabel sind) deswegen besondere Beachtung, weil die durch den störenden Planeten verursachten Abweichungen

von der sonst elliptischen Bewegung des gestörten Planeten ganz besonders gross werden.

Die Annahme, dass die Bewegung der Planeten in unveränderlichen Ellipsen nach Kepler's Regeln erfolge, entspricht bei keinem Planeten so nahe der Wirklichkeit, dass man dieselbe einer brauchbaren ersten Annäherung zu Grunde legen könnte, wenn man nicht von vorneherein die Gültigkeit derselben beschränken will. Während sich aber die Unbrauchbarkeit dieser Annahme bei den Bewegungen eines irgend welcher Commensurabilität der mittleren Bewegungen ferne liegenden Planeten erst nach einer sehr bedeutenden Anzahl von Umläufen offenbart, vermag diese Hypothese, wenn nur die aufgestellte Bedingung der approximativen Commensurabilität genügend nahe erfüllt ist, selbst während weniger Umläufe ebensowenig analytisch eine brauchbare Annäherung zu liefern, wie beispielsweise die Annahme einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise. Man muss eben schon bei der ersten Annäherung nicht nur die Teile der Bewegungen berücksichtigen, welche aus der Anziehung der Sonne resultiren, sondern den genannten Teilen sofort auch durchaus gleichgeordnete Teile hinzufügen, welche von der Anziehung durch den störenden Planeten herrühren.

In der Bearbeitung der Aufgabe schliesst sich der Verfasser der Methode an, mit deren Hülfe Hr. Gyldén die säcularen Störungen in seiner Theorie der Planetenbewegungen behandelt hat, und die auch vor ihm schon in einigen Specialfällen zu Hülfe gezogen ist; hauptsächlich wird bei ihr das Auftreten der säcularen Störungen ausserhalb der Glieder mit Winkelgrössen vermieden. Man bezeichne mit σ einen Bruch von der Ordnung $\frac{m'}{m_1}$, der Masse des störenden Planeten zur Summe der Massen der Sonne und des gestörten Planeten, mit v die wahre Länge des gestörten Planeten, mit A und B constante Winkel, mit a und b constante Coefficienten, so besitzen die erwähnten Glieder die Form:

$$\text{A)}\quad a \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\sigma v + A\right), \qquad \text{B)}\quad b \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left((1-\sigma)v - B\right).$$

Die niedrigste Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten der Bahnen des gestörten und störenden Planeten ist bei den Gliedern von der Form A) die zweite, bei den Gliedern von der Form B) die erste.

Den erwähnten, in jedem Falle auftretenden Gliedern (von Hrn. Gyldén als „elementare" bezeichnet) treten im speciellen Falle approximativer Commensurabilität der mittleren Bewegungen andere Glieder zur Seite. Es sei μ, das Verhältnis der mittleren Bewegungen des störenden und des gestörten Planeten, angenähert gleich $p:q$, wo p und q ganze Zahlen sind. Man setze $p-q\mu=\delta$ und bezeichne mit d eine constante Grösse von der Ordnung von δ, so haben die erwähnten Glieder die beiden Formen

$$\text{C)}\quad x\,{\cos \atop \sin}\left(dv+\Xi\right),\qquad\qquad \text{D)}\quad y\,{\cos \atop \sin}\left((1+d)\,v+H\right).$$

Die niedrigste Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten hängt bei den Gliedern von den Formen C) und D) von den Werten der ganzen Zahlen p und q ab; die Grössenordnungen sind die absoluten Werte von $q-p$, resp. $(q-p)-1$. Da der Fall $q=p$ ausgeschlossen ist, so liefert die Annahme $p=1$, $q=2$ die grössten Glieder in den Bewegungsgleichungen.

In diesem speciellen Falle, der am nächsten bei Hekuba erfüllt zu sein scheint in Bezug auf Jupiter, können die Glieder von den Formen C) und D) dadurch von derselben Grössenordnung werden wie die Glieder von den Formen A) und B), dass sie in Bezug auf die Excentricitäten bezüglich von der ersten und nullten Ordnung sind, also Grössenordnungen angehören, welche um eine Einheit geringer sind als die der Glieder von den Formen A) und B). Daher kommt es, dass gewisse Teile der Bewegungsgleichungen, welche man gemäss der gewöhnlichen Ausdrucksweise als Störungen zweiter Ordnung zu bezeichnen hat, von gleicher Grössenordnung sind, und im numerischen Beispiele teilweise sogar bedeutend grösser, als die entsprechenden gleichgeformten Teile der Störungen erster Ordnung.

Der Zweck der Untersuchungen ist, eine Grundlage für die dem speciellen Fall entsprechenden Rechnungen zu schaffen und

diese Rechnungen in Bezug auf die Glieder mit Argumenten von den vier Formen A), B), C), D) und, soweit die niedrigste Ordnung der Excentricitäten in Frage kommt, in extenso durchzuführen und so eine erste Näherung für die Bewegungen des gestörten Planeten herzustellen. Im ersten Capitel werden die Differentialgleichungen der Bewegung behandelt und die Störungsfunctionen entwickelt; im zweiten wird eine erste Annäherung für die Bewegung in dem vom Verfasser behandelten Specialfall gegeben; im dritten wird die erste Näherung für die Bewegung von Hekuba unter dem Einflusse der Anziehung durch die Sonne und den Jupiter berechnet. Die Tafel stellt sechs osculirende Ellipsen von Hekuba dar.

Ueber Lösungen des vorliegenden Problems hat der Verfasser bereits an zwei Stellen berichtet, nämlich 1) in der Vierteljahrsschrift der Astron. Ges. XX.: „Ueber einen Versuch, eine beschränkt gültige Form der Bewegungen eines kleinen Planeten zu finden für den Fall, dass dessen mittlere Bewegung näherungsweise doppelt so gross ist als die des Jupiter". (Ein Versuch, der mit den jetzigen Untersuchungen nur in losem Zusammenhange steht.) 2) Ein Résumé der Arbeit, betitelt: „Quelques remarques sur un cas spécial des trois corps", steht in Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda pa Stockholms Observatorium, Bd. III, Heft 4. Lp.

H. Pfaff. Ueber die freie und eine bestimmte unfreie Bewegung eines Systems materieller Punkte, zwischen denen den Massen und der Entfernung proportionale anziehende Kräfte wirken. Pr. Gymn. Holzminden (No. 644). S. 3-32. 4°.

Die auf Veranlassung des Hrn. Dedekind unternommene Arbeit erledigt die Aufgabe der Bewegung von n Massenpunkten, welche sich gegenseitig im Verhältnisse ihrer Entfernungen und ihrer Massen anziehen, 1) für den Fall, dass alle Massenpunkte frei beweglich sind, 2) für den Fall, dass jeder einzelne gezwungen ist, sich in je einer ihm vorgeschriebenen Ebene zu bewegen.

Die Abhandlung giebt also ein Beispiel für das Vielkörperproblem, bei welchem sämtliche Integrale der Differentialgleichungen herstellbar sind.

Für die freie Bewegung gestaltet sich die Rechnung sehr einfach. Dem Principe von der Erhaltung des Schwerpunktes entsprechend, bewegt sich der Schwerpunkt aller Massenpunkte geradlinig und mit constanter Geschwindigkeit. Die relative Bewegung eines jeden der materiellen Punkte um den Schwerpunkt erfolgt so, als ob die Gesamtmasse des Systems im festgedachten Schwerpunkte vereinigt wäre und nach dem zu Grunde liegenden Anziehungsgesetze wirkte. (Der Verf. unterlässt es, Newton's Principia lib. 1 Prop. 64 als Quelle zu citiren). Daher führen die Punkte des Systems um den Schwerpunkt als Mittelpunkt elliptische Schwingungen aus, und die Zeitdauer eines Ellipsenumlaufs ist für alle Punkte des Systems dieselbe, nämlich der Masse des Systems umgekehrt proportional. Die Gestalt der absoluten Bahn eines der Massenpunkte ist mithin eine gleichmässig gewundene Schraubenlinie auf einem elliptischen Cylinder. Die Höhe des Schraubenganges ist für alle Punkte des Systems dieselbe, nämlich gleich dem Wege, den der Schwerpunkt in der Umlaufszeit zurücklegt.

Die Untersuchung desjenigen Falles, bei welchem die einzelnen Massenpunkte auf vorgegebenen Ebenen zu verharren gezwungen sind, erfordert viel grössere Zurüstungen und führt bei der Erforschung der Bewegung des Schwerpunktes zu Rechnungen, welche denen bei der Aufsuchung der Hauptaxen einer Fläche 2ter Ordnung sehr ähnlich sind. Der Verfasser hat denn auch den Zusammenhang zwischen beiden Problemen beleuchtet, und wir führen seine Ergebnisse auf Grund der Schlussbetrachtungen an. Der Massenpunkt m_x bewege sich auf der Ebene E_x, deren Gleichung

$$A_x x + B_x y + C_x z = D_x$$

sei. Man setze $Q_x^2 = A_x^2 + B_x^2 + C_x^2$ und bilde die halbe Summe V der Quadrate der Entfernungen eines beliebig im Raume gewählten Punktes (x, y, z) von sämtlichen Ebenen E_x, jedes Quadrat multiplicirt mit m_x, also:

(1) $$V = \frac{1}{2}\Sigma\frac{m_x}{Q_x^2}(D_x - A_x x - B_x y - C_x z)^2.$$

Fragt man, für welchen Punkt oder für welche Punkte im Raume diese Function ein Minimum wird, so hat man zu setzen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

oder man hat die Gleichungen dreier Ebenen (in denen die Bedeutung der Coefficienten C_{ik} aus (1) ersichtlich ist):

$$(\mathrm{E}_1) \qquad C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z = C_{14},$$
$$(\mathrm{E}_2) \qquad C_{12}x + C_{22}y + C_{23}z = C_{24},$$
$$(\mathrm{E}_3) \qquad C_{13}x + C_{23}y + C_{33}z = C_{34}.$$

Ist die Determinante $\mathrm{A}_3 = |C_{ik}|$ dieser drei Gleichungen nicht Null, so schneiden sich die drei Ebenen E_1, E_2, E_3 in einem Punkte, dem Bewegungsmittelpunkte; um diesen führt nämlich der Schwerpunkt des Systems eine schwingende Bewegung aus.

Ist $\mathrm{A}_3 = 0$, so schneiden sich E_1, E_2, E_3 in einer Geraden, der Bahn des Bewegungscentrums, welche „Centralgerade" zu sämtlichen gegebenen Ebenen E_x parallel ist.

Ist ausser A_3 auch noch

$$\mathrm{A}_2 = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 + C_{11}C_{33} - C_{13}^2 + C_{22}C_{33} - C_{23}^2 = 0,$$

so fällt jede der Ebenen E_1, E_2, E_3 mit einer „Centralebene" zusammen, in welcher die Bewegung des Schwerpunktes stattfindet. Das den Mittelpunkt der Bewegung enthaltende Centralgebilde ist hiernach zu definiren als der Punkt, resp. als der geometrische Ort des Punktes, für welchen V seinen kleinsten Wert besitzt. Die Bewegung des Schwerpunktes findet im allgemeinen, d. h. wenn A_3 nicht verschwindet, um einen festen Punkt statt. Ist $\mathrm{A}_3 = 0$, so schreitet die Bewegung längs einer Geraden ins Unendliche fort. Ist auch $\mathrm{A}_2 = 0$, so ist der Schwerpunkt selbst das Centrum der Bewegung. Die Gleichungen für die Coordinaten des Schwerpunktes [als lineare Functionen von $\sin\omega_i t$ und $\cos\omega_i t$ $(i = 1, 2, 3)$] werden in allen besonderen Fällen aufgestellt. Wenn der Schwerpunkt das Centralgebilde des Punktsystems passirt, hat er seine grösste Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit nimmt ab, wenn die Function V zunimmt, und ist für alle die Punkte der Schwerpunktsbahn dieselbe, für

welche V denselben Wert hat. Diese Punkte liegen nach (1) auf einer Fläche zweiter Ordnung, die somit als Niveaufläche von V anzusehen ist.

Mit Hülfe der gefundenen Gleichungen der Schwerpunktsbewegung sind die Differentialgleichungen der relativen Bewegung eines beliebigen Massenpunktes m_x integrirbar. Die Bewegung findet um den Fusspunkt des vom Bewegungscentrum des Systems auf die Ebene E_x gefällten Lotes als Mittelpunkt der Bewegung statt. Die Bewegung kann vorgestellt werden als zusammengesetzt aus drei einfachen geradlinigen Schwingungen und aus einer elliptischen. In besonderen Fällen tritt eine Vereinfachung der Bewegungsform ein. Lp.

O. Staude. Ueber bedingt periodische Bewegungen. Dorpat. Naturf. Ges. Ber. VIII. 249-262.

Im ersten Paragraphen werden diejenigen bedingt periodischen Functionen kurz charakterisirt, welche der Verfasser in den Math. Ann. XXIX. (Bericht in diesem Bande S. 486) näher untersucht hat. Durch diese Functionen werden ganze Gruppen mechanischer Probleme gelöst, welche sich in ihrer Gesamtheit als eine Gattung einfach bedingt periodischer Bewegungen an die Gattung der unbedingt periodischen Bewegungen anreihen (§ 2). Hierher gehören: 1) Die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Rotationsaxe, wenn diese Fläche von keiner Rotationsebene in mehr als einem Parallelkreise geschnitten wird (§ 3). 2) Die Bewegung eines Punktes der Axe eines Kreisels, wenn dieser sich auf eine horizontale Ebene stützt (§ 4). 3) Die Bewegungen eines materiellen Punktes auf dem dreiaxigen Ellipsoide, wenn α) bloss die Trägheit in Betracht kommt, β) eine vom Mittelpunkte des Ellipsoides ausgehende, der Entfernung proportionale Anziehungskraft wirksam ist (§ 5). 4) Die Bewegung eines von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen Punktes (§ 6). In betreff der letzten Aufgabe verweist der Verfasser auch auf den Aufsatz: „Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten“.

(Bericht S. 504 dieses Bandes.) Der letzte Paragraph ist der Betrachtung der Verwandtschaft dieser Bewegungsformen gewidmet. „Bei der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche windet sich die Bahncurve im allgemeinen zwischen zwei Parallelkreisen der Fläche, die sie abwechselnd berührt, in immer neuen und neuen Windungen hin und her“ (vgl. Stäckel, F. d. M. XVII. 1885. 883). „Ein beliebiger Punkt der Figuraxe des Kreisels beschreibt eine Raumcurve, die zwischen zwei Kreisen mit senkrecht übereinander liegenden Mittelpunkten ihre rosettenartigen Windungen in der Weise zieht, dass sie sich abwechselnd mit einer Spitze auf den einen Kreis aufsetzt und den anderen berührt. Ein Punkt, der auf dem Ellipsoid ohne Einfluss von Kräften oder unter Einfluss der Centralkraft g^2r sich bewegt, beschreibt eine Curve, die sich zwischen zwei Aesten einer Krümmungscurve hin- und herwindet und beide abwechselnd berührt. Aehnlich verhält sich die Bahncurve eines von zwei festen Centren angezogenen Punktes unter Umständen zu zwei confocalen Ellipsen, deren Brennpunkte die beiden Centra sind“. Lp.

O. Staude. Ueber verzweigte Bewegungen. Dorpat. Naturf. Ges. Ber. VIII. 336-342.

Wie eine ebene Curve aus getrennten Teilen bestehen kann, die aber als zusammengehörig aufzufassen und durch Aenderung eines Parameters der Curvengleichung (durch eine Uebergangsform hindurch) zu einem einzigen Curvenzweig zu vereinigen sind, so giebt es periodische Bewegungen (z. B. auf Curven oder Flächen), welche deshalb als Zweige einer einzigen Bewegung angesehen werden müssen, weil sie bei geeigneter stetiger Aenderung der Constanten allmählich in eine einzige periodische Bewegung verschmelzen; dazwischen schiebt sich eine singuläre Bewegungsform ein. Dies erläutert der Verf. an der periodischen Bewegung eines schweren Punktes auf der Fusspunktencurve einer Ellipse mit verticaler kleiner Axe und an der bedingt periodischen Bewegung eines schweren Punktes auf der Kreisringfläche mit verticaler Rotationsaxe. Lp.

U. Dainelli. Del moto di un punto materiale libero sollecitato da una forza diretta constantemente ad una retta fissa. Bologna Mem. (4) VIII. 91-102.

E. Cesaro. Sul moto d'un punto sollecitato verso una retta. Palermo Rend. I. 304-309.

M. Gebbia. Intorno a una nota di Valentino Cerruti. Palermo Rend. I. 310-313.

Der erste Artikel behandelt folgende Aufgabe: Ein Punkt M von der Masse 1 beschreibe eine Raumcurve, den Durchschnitt der beiden Cylinder $\varphi(x,y)=0$, $\psi(y,z)=0$, unter dem Einflusse einer Kraft, deren Richtung fortwährend eine gegebene Gerade r schneidet. Die Geschwindigkeit und die beschleunigende Kraft zu bestimmen. Der Verfasser findet durch analytische Behandlung: 1) „Die Geschwindigkeit ist dem Abstande des beweglichen Punktes von der festen Geraden und dem Cosinus des Winkels, welchen die Ebene P durch M und die feste Gerade mit der Normalebene P_n zur Bahncurve bildet, umgekehrt proportional“:

$$(1) \qquad v=\frac{h'}{\delta\cos(PP_n)}.$$

2) „Die Kraft F ist dem Sinus des Winkels zwischen der Ebene P und der Schmiegungsebene P_0 der Bahncurve direct, dagegen dem Krümmungsradius, dem Quadrate des Abstandes des beweglichen Punktes von der festen Geraden und dem Kubus des Cosinus des Winkels zwischen der Ebene P und der Normalebene zur Bahncurve umgekehrt proportional“:

$$(2) \qquad F=\frac{h^2\sin(PP_0)}{\varrho\delta^2\cos^3(PP_n)}.$$

Als Specialfälle werden hieraus die entsprechenden Formeln abgeleitet, 1) wenn die Gerade im Unendlichen liegt, und 2) wenn die gegebene Curve eben, die gegebene Gerade senkrecht zur Ebene der Curve ist (Centralbewegung), für welchen Fall:

$$(1_a) \qquad v=\frac{h}{p} \text{ (Newton)}, \qquad (2_a) \qquad F=\frac{h^2\delta}{\varrho p^3} \text{ (Moivre)}.$$

Ist die Kraft F gegeben, so enthält (2) eine Eigenschaft der

Bahncurve, welche der Verf. für besondere Fälle der Newton'schen Gravitation im Zwei- und Dreikörperproblem entwickelt. Zuletzt wird das Verhältnis der Geschwindigkeit des Massenpunktes M zu derjenigen des Schnittpunktes m der Ebene P mit einer beliebigen Curve C bestimmt, ebenso das Verhältnis der Geschwindigkeit dieses Punktes m zu der Geschwindigkeit, welche in m ein freier Punkt μ haben würde, der die Curve C unter der Einwirkung einer in der erwähnten Ebene liegenden Kraft beschriebe.

Herr Cesaro behandelt in seiner Note dieselbe Aufgabe mit Hülfe geometrischer Methoden.

Herr Gebbia weist darauf hin, dass die von Hrn. Dainelli untersuchte Bewegung ein besonderer Fall einer allgemeineren Bewegung ist, bei welcher die Kraftlinien einem linearen Complexe angehören und welche behandelt ist von V. Cerruti in dem Aufsatze: „Intorno ad una generalizzazione di alcuni teoremi di Meccanica" (In memoriam Chelini, 1881, F. d. M. XIII. 1881. 693). Die bezüglichen allgemeinen Sätze, welche implicite in der älteren Arbeit von Cerruti enthalten sind, werden durch Hrn. Gebbia entwickelt, aus ihnen die des Hrn. Dainelli abgeleitet. Lp.

R. Borck. Bewegung eines materiellen Punktes auf einem um seinen verticalen Durchmesser rotirenden Kreise. Pr. Höhere Bürgersch. (Wilhelmsschule) Liegnitz. (No. 211). 22 S. u. 1 Taf. 4°.

Die Abhandlung hat auf S. 3 die Ueberschrift: „Ueber die Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einem Kreise, welcher um seinen verticalen Durchmesser mit gleichmässiger Geschwindigkeit rotirt." Zu der Schwere tritt also noch die horizontale Centrifugalbeschleunigung. Ist die z-Axe vertical, die x-Axe horizontal, r der Radius des Kreises, ω die Winkelgeschwindigkeit, 2λ der normale Widerstand des Kreises, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\lambda x + \omega^2 x, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 2\lambda z - g,$$

mit der Bedingung $x^2 + z^2 = r^2$. Führt man den variablen Aus-

schlag ψ des Pendels statt x und z durch die Gleichungen $x = r \sin\psi$, $z = -r\cos\psi$ ein, so leitet man aus (I) durch das Princip der lebendigen Kraft leicht die Gleichung ab:

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \omega^2 (\cos\psi - \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\psi),$$

wo $\cos\alpha$ (und $\cos\beta$) aus der Gleichung $\frac{d\psi}{dt} = 0$ für $\psi = \alpha$ oder:

$$0 = \frac{2g}{r}\cos\alpha - \omega^2\cos^2\alpha + C$$

zu bestimmen und $\cos\beta = \frac{2g}{r\omega^2} - \cos\alpha$ ist.

Die Discussion von (II) zeigt, dass die Geschwindigkeit ein Maximum hat 1) für $\psi = 0$, 2) für $\psi_0 = \arccos\frac{g}{r\omega^2}$, ein Minimum für 3) $\psi = \pi$. Ist $r\omega^2 < g$, so ist Fall 2) unmöglich und die Bewegung des Punktes hat einen ähnlichen Charakter wie die des mathematischen Pendels. Die beiden dort bekannten Bewegungsarten entstehen, je nachdem α reell oder imaginär ist (β ist in diesem Falle immer imaginär). Ist dagegen $r\omega^2 > g$ und ausserdem $\cos^2\frac{1}{2}\alpha > \frac{g}{r\omega^2}$, so werden α und β reell und die Bewegung findet um einen Punkt herum statt, der seitlich liegt und dem Winkel ψ_0 entspricht; α giebt den grössten, β den kleinsten Abstand vom untersten Punkt des Kreises.

Nachdem so die verschiedenen Bewegungsformen erhalten sind, wird die Zeit t aus (II) als elliptisches Integral erster Gattung dargestellt, wobei jeder der drei Hauptfälle eine besondere Behandlung erfordert, nämlich 1) der Punkt durchläuft den ganzen Kreis, 2) der Punkt pendelt zwischen zwei äussersten Lagen ($+\alpha$ und $-\alpha$) und durchläuft die unterste Stelle des Kreises, 3) der Punkt bewegt sich zwischen zwei Ausschlagswinkeln α und β ($\alpha > \beta$). In allen Fällen ermittelt der Verfasser die Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ und für z als elliptische Functionen von t in der Jacobi'schen Form und als

Quotienten von Thetafunctionen, Ausdrücke, die hier zu viel Raum beanspruchen würden. In einem kurzen Paragraphen wird zuletzt auch der Normalwiderstand des Kreises berechnet. Andere Bedingungen, welche auf hyperelliptische Integrale führen, haben den Verfasser nicht auf Resultate geführt, die er der Veröffentlichung wert erachtet. Lp.

J. B. Hünermann. Ein mechanisches Problem. Pr. Höhere Bürgersch. Hechingen (No. 460). 30 S. 4°.

Die bekannte Eigenschaft der Lemniskate in einer verticalen Ebene (von Saladini 1804 entdeckt), dass, wenn ihre Axe um 45° gegen die Horizontale geneigt ist, ein schwerer Punkt den im Mittelpunkte beginnenden Bogen innerhalb derselben Zeit durchläuft wie die zugehörige Sehne, wird benutzt, um die betreffende Bewegung nach allen Gesichtspunkten hin zum Gegenstande von Rechnungen zu machen. Zuletzt werden mehrere Zahlenbeispiele beigefügt, in denen ausser den Fallzeiten auch die durchlaufenen Wege (Lemniskatenbogen) berechnet und die zugehörigen Zeiten auf der Brachistochrone (Cykloide) durch den Anfangs- und Endpunkt der Bewegung ermittelt werden.

Lp.

G. Kobb. Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. Acta Math. X. 89-108.

Die Abhandlung knüpft an den Satz Jacobi's an (J. für Math. XXIV. 5-27, De motu puncti singularis), dass, wenn eine Kräftefunction vorhanden ist und die Bewegung nur von der Lage des Massenpunktes innerhalb eines Meridianschnittes der Umdrehungsoberfläche abhängt, die Integration der Bewegungsgleichungen stets auf Quadraturen zurückführbar ist. In den Fällen, wenn die Gleichung der Oberfläche algebraisch und die Kräftefunction eine rationale Function ist, ergeben diese Quadraturen Abel'sche Integrale; der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Bedingungen zu ermitteln, denen die Gleichung der Fläche ge-

nügen muss, damit die Abel'schen Integrale auf elliptische zurückkommen.

Die Masse des beweglichen Punktes sei gleich eins, die Umdrehungsaxe der Fläche werde als x-Axe gewählt, die Gleichung der Meridiancurve in rechtwinkligen Coordinaten x, r habe die Form $f(r^2, x) = 0$, die Kräftefunction $U = R(r^2, x)$, wo R eine rationale Function bedeutet; endlich sei ψ der Winkel, welcher der geographischen Länge des Punktes entspricht, H die Constante im Princip von der Erhaltung der Kraft, c die doppelte Sectorengeschwindigkeit der Projection des Punktes auf eine Ebene, die zur Rotationsaxe senkrecht ist, dann ist:

$$(1) \quad t = \int_{x_0}^{x} \xi\, dx, \qquad (2) \quad \psi - \psi_0 = c\int_0^t \frac{dt}{r^2} = c\int_{x_0}^{x} \frac{\xi\, dx}{r^2},$$

wo gesetzt ist:

$$\xi^2 = \frac{r^2\left\{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right\}}{r^2(2H + 2U) - c^2}.$$

Indem man nun $r^2 (= y^2 + z^2)$ zwischen der letzten Gleichung für ξ^2 und der Gleichung $f(r^2, x) = 0$ eliminirt, kommt man zu einer neuen Gleichung zwischen ξ^2 und x, $\varphi(\xi^2, x) = 0$, und es ergiebt sich zunächst, dass das Geschlecht der Curven f und φ dasselbe ist. Die Untersuchung erstreckt sich daher auf die Erforschung des Geschlechtes der Curven φ und wird mit den Hülfsmitteln der Algebra und der Functionentheorie durchgeführt, indem hauptsächlich von Weierstrass'schen Sätzen und Formeln Gebrauch gemacht wird. Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist: Es muss sein

$$r^2 = R_1(\zeta), \qquad x = R_2(\zeta),$$

wenn ζ einen variabeln Parameter, R_1 und R_2 rationale Functionen von ζ bedeuten. Ferner sind R_1 und R_2 so zu bestimmen, dass der Ausdruck für ξ nur eine Quadratwurzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades, $\sqrt{R_3(\zeta)}$, enthält. Als besondere Folgerungen für U gleich einer Constanten k und für den Fall der Schwerkraft $U = gx$ findet der Verfasser folgende Sätze:

„Alle Umdrehungsflächen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Coordinaten einer geodätischen Linie durch elliptische Functionen eines Parameters ausgedrückt werden können, haben notwendig die Form $r^2 = R_1(\zeta)$, $x = R_2(\zeta)$."

Ist die auf den Punkt einwirkende Kraft allein die Schwere in der Richtung der Umdrehungsaxe, so „kann die Integration des Systems (1), (2) durch elliptische Functionen ausgeführt werden, wenn die Umdrehungsfläche durch eine der fünf Gleichungen bestimmt wird: 1) $r = mx$, 2) $r^2+x^2 = a^2$, 3) $r^2 = 4ax$, 4) $9ar^2 = x(x-3a)^2$, 5) $2r^4+3a^2r^2-2xa^3 = 0$. Dies sind die einzigen möglichen Fälle. Die drei ersten waren schon bekannt, die beiden anderen scheinen neu." Lp.

G. Kobb. Om integrationen af differential-eqvationerna för en materiel punkts rörelse på en rotationsyta. Stock. Öfv. XLIV. No. 3. 159-165.

Darstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche im sogenannten Jacobi'schen Falle mittels elliptischer Functionen integrirt werden können. (S. das vorige Referat). K.

J. J. Rachmaninoff. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Oberfläche. Kiew Nachr. 79 S. (Russisch.)

Br. Decker. Ueber die sphärisch-elliptische Bewegung. Hoppe Arch. (2) V. 430-441.

Auf einer Kugel mit dem Radius ϱ befindet sich ein fester Punkt M und ein frei beweglicher Massenpunkt m. Zwischen beiden wirkt in Richtung der Verbindungslinie eine Kraft R. Wie muss dieselbe beschaffen sein, damit m um M eine sphärische Ellipse beschreibt, deren einer Brennpunkt in dem festen M gelegen ist? Die Analyse dieser Frage führt zu folgendem Ergebnis. Bedeutet

r den Abstand des Punktes m von M, so stellt sich jene Kraft R als Function von r in der Form dar

$$R = \frac{\text{const.}}{r^2\left(1 - \frac{r^2}{4\varrho^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

wird umgekehrt diese Kraftfunction der Beziehung von m zu M zu Grunde gelegt, so wird als Bahn für m eine sphärische Ellipse hergeleitet. Schn.

F. Roth. Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe. Exner Rep. XXIII. 1-22, 457-466, 553-558.

F. Roth. Berichtigung. ibid. 338.

III. Bestimmung der relativen Bahnen, wenn Kräfte vorhanden sind, welche der Scheibe entlang wirken. A. Die gegebene Kraft sei der Stärke nach unveränderlich und wirke in Beziehung zu der sich drehenden Scheibe immer nach derselben Richtung. Der Reibungswiderstand fehle. „Die gesuchte Bahn ist eine excentrische Kreisevolvente, bei welcher der Mittelpunkt der abzuwickelnden Rolle nicht im Drehungspole der Scheibe, sondern um $f:\omega^2$ gegen die Richtung der gegebenen Bahn davon entfernt liegt.“ „Die absolute Bahn ist eine Cykloide, welche durch eine Stelle in der Ebene eines Kreises erzeugt wird, der mit unveränderlicher Geschwindigkeit rollt“. Lp.

G. Pesci. Sulla deviazione meridionale dei gravi. Livorno. 13 S. 8°.

J. Mayenberg. Die Hauptsätze der Central- und Pendelbewegung in elementarer Behandlung. Pr. Königl. Studienanst. Hof. 15 S. 8° u. 1 Taf.

Lp.

Th. Bertram. Die Apparate, welche zur Demonstration der Gesetze der gleichmässig veränderlichen Bewegung dienen. Pr. Gymn. Bielefeld (No. 326). 3-18. 4°. Lp.

E. Vallier. Essai sur les principes de la balistique extérieure. Rev. d'Art. XXIX. 5-25.

Die vorliegende Abhandlung macht den Beschluss einer Reihe von Artikeln (vgl. F. d. M. XV. 1883. 829, XVII. 1885. 900) über den Widerstand, den die Luft Geschossen entgegenstellt, deren Geschwindigkeiten zwischen 0 und $600m$ liegen. Im ersten Abschnitte geht der Verf. näher auf den Luftwiderstand bei Geschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit ein. Während in dem letzten Aufsatze von 1885 noch auf weitere neu anzustellende Versuche verwiesen wurde, werden jetzt die in demselben Bande XXVI. 231 der Rev. d'Art. von Hrn. Hojel mitgeteilten Zahlenwerte benutzt und danach die Constanten der in den früheren Berichten gegebenen Formeln berechnet. Bei der dann im zweiten Abschnitte folgenden Integration der Differentialgleichungen ersetzt der Verfasser die Methode des Generals Didion durch eine andere. Die Ordinate der Bahnlinie wird durch den MacLaurin'schen Satz nach Potenzen von x entwickelt; aber nur die Glieder in x und x^2 werden berechnet, danach wird das Restglied in der Gestalt des bestimmten Integrales angesetzt. Die Auswertung dieses bestimmten Integrales erfolgt durch mechanische Quadratur zwischen den Grenzen 0 und x, oder genauer bloss durch Anwendung der Simpson'schen Regel, weshalb sich die Berechnung solcher Punkte bequem gestaltet, deren Abscissen in den Verhältnissen 1 : 2 : 4 : 8 : ... stehen. Die Formel des Verfassers lautet:

$$y = p_0 x - \frac{gx^2}{2u_0^2} - g\frac{x^3}{6}(\varrho_0 \cos^{-3}\varphi + \varrho_{\frac{1}{2}} \cos^{-3}\theta_{\frac{1}{2}})$$

[$\varrho = \frac{f(v)}{v^4}$, der Index 0 bezieht sich auf den Anfangspunkt, $\frac{1}{2}$ auf die Mitte des Intervalles $0 \dots x$, φ = Abgangswinkel, θ = Neigung der Bahntangente].

In einem Schlussworte fasst der Verfasser die Ergebnisse seiner Untersuchungen zusammen: „Wenn die oben entwickelten Betrachtungen sowohl unter dem Gesichtspunkte der Physik und des Experiments als auch der Analysis als zutreffend anerkannt

werden, so dürfen wir mit vollem Grund behaupten, dass wir die Principien einer äusseren theoretischen Ballistik skizzirt haben, welche man mit Vorteil an die Stelle der jetzt gebräuchlichen Ballistik mit rein experimenteller Basis und mit empirischen Formeln zu setzen hätte". Lp.

F. Siacci. Sugli angoli di massima gittata. Rom. Acc. L. Rend. (4) III_2. 211-216.

Um die schon früher angeregte Frage zu erledigen, ob bei gewissen Widerstandsgesetzen die grösste Wurfweite bei einem grösseren Abgangswinkel als $\frac{1}{4}\pi$ erreicht werde, unternimmt der Verf. eine analytische Untersuchung der Aufgabe und findet, dass die grössten Wurfweiten zu Winkeln über $\frac{1}{4}\pi$ gehören, wenn der Widerstand durch die Formel av^ν ($\nu > 2+\sqrt{2}$) ausgedrückt wird, oder auch durch die Formel $av^\nu + bv^\mu + cv^\pi + \dots$ ($\nu > 2+\sqrt{2}$, $\nu < \mu < \pi < \dots$). Wird dagegen das Widerstandsgesetz durch ein Polynom in v gegeben, bei welchem einige Exponenten kleiner, andere grösser als $2+\sqrt{2}$ sind, so können die Winkel grösster Wurfweite grösser, gleich oder kleiner als $\frac{1}{4}\pi$ sein, je nach den Werten der Projectionsgeschwindigkeit. Lp.

F. August. Ueber die günstigste Form der Geschossspitzen nach der Newton'schen Theorie. Arch. f. Art. XCIV. 1-29.

F. August. Ueber die Rotationsfläche kleinsten Widerstandes und über die günstigste Form der Geschossspitzen nach der Newton'schen Theorie. J. für Math. CIII. 1-24.

Der Untersuchung liegt die Newton'sche Annahme des Widerstandsgesetzes zu Grunde. Ist also df ein Oberflächenelement, τ der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung mit der Normale in df bildet, so ist der Widerstand gegen df ein Normaldruck von der Grösse $W_0\, df \cos^2\tau$. Die Oberfläche werde durch die

Rotation einer ebenen Meridiancurve um die x-Axe erzeugt, deren positive Richtung mit derjenigen der gegen den Körper sich bewegenden Luftteilchen zusammenfällt; dann ist zwischen den Ordinaten y_1 und y_2 der Widerstand der Fläche in der Bewegungsrichtung

$$W = 2\pi W_0 \int_{y_1}^{y_2} y\,dy \cos^2\tau = 2\pi W_0 \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\,dy}{1+q^2},$$

wenn $\operatorname{tg}\tau = \frac{dx}{dy} = q$ gesetzt wird. Damit das Problem, die Curve kleinsten Widerstandes zwischen zwei fest gegebenen Punkten A und B zu finden, bestimmt sei, muss die Bedingung hinzugefügt werden, dass die Fläche keine trichter- oder ringförmigen Einbiegungen enthalte; denn ohne diese von Hrn. August so formulirte Bedingung ist die Aufgabe unbestimmt und kann W der Null beliebig nahe gebracht werden. Hieraus folgt mit Notwendigkeit, dass $q \geqq 0$ sein muss; der Verf. setzt allgemeiner $q \geqq \alpha$ und $\alpha > \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, wenn (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Coordinaten von A und B sind. Die Aufsuchung des kleinsten Wertes von

$$w = \int_{y_1}^{y_2} \frac{y\,dy}{1+q^2}$$

erfolgt ohne Anwendung des Algorithmus der Variationsrechnung nach einer vom Verf. zu diesem Zwecke ersonnenen sich daran anlehnenden elementaren Methode mit Hülfe der Taylor'schen Reihe und ergiebt

$$(1) \qquad y = \frac{c(1+q^2)^2}{q}$$

mit der Nebenbedingung $q > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Durch Integration von $dx = q\,dy$ folgt weiter

$$(2) \qquad x = c(-\operatorname{lognat} q + q^2 + \tfrac{3}{4} q^4) + c_1.$$

Die Gleichungen (1) und (2) definiren eine Curvengattung, die schon von Newton angegeben ist, und von der einzelne Curven als krummlinige Bestandteile einer Minimalcurve angehören

können. Jede Curve besitzt für $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ eine Spitze, deren Coordinaten

$$(3) \qquad x_0 = c(\tfrac{1}{2}\log \text{nat} 3 + \tfrac{5}{12}) + c_1, \quad y_0 = \frac{16c}{3\sqrt{3}}$$

sind. Von der Spitze gehen zwei Aeste der Curve ohne Asymptote ins Unendliche; der Ast, welcher der x-Axe zunächst liegt und ihr die concave Seite zuwendet, kann als Bestandteil einer Minimalcurve auftreten. Die Curve schneidet die x-Axe nicht. Das Ergebnis der Untersuchung ist: „Möglich als Minimalcurve zwischen zwei gegebenen Endpunkten A und B ist nur ein Linienzug, zusammengesetzt aus einem von A ausgehenden geradlinigen Teile AC mit der Richtungszahl α und einem Bogen einer Newton'schen Minimalcurve CB, der sich an den geradlinigen Teil entweder ohne Richtungsunterschied ansetzt, nämlich wenn $\alpha \overline{\gtrless} 1/\sqrt{3}$, oder doch wenigstens, wenn jenes nicht möglich ist, weil $\alpha < 1/\sqrt{3}$ gegeben ist, mit der denkbar geringsten. Es kann sich aber auch in gewissen Fällen der geradlinige Teil, und in einem ganz singulären Falle, nämlich wenn $\alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ist, der krummlinige Teil auf Null reduciren." Nachdem für die somit folgenden drei Fälle die Formeln entwickelt sind, welche die ganze Begrenzung der Minimalcurve bestimmen, wird zur Anwendung auf die Geschosspitzen übergegangen. Bei ihnen setzt sich die Minimalcurve zusammen aus einer von der Axe ausgehenden, zu ihr senkrechten Geraden $AC (= y_0)$ und einem Bogen einer Newton'schen Curve CB, welcher unter einem Winkel von 30° gegen die Verlängerung dieser Senkrechten nach hinten zu abgeht. Zahlenbeispiele, die für angenommene Abmessungen durchgerechnet und graphisch dargestellt sind, sowie Vergleichungen mit anderen Spitzenformen zur Bestätigung der Theorie bilden den Beschluss des zweiten, mehr technischen Teiles der interessanten Arbeit.

Bei dem Abdrucke der Abhandlung im J. für Math. sind manche Zahlenrechnungen und Tabellen fortgelassen; dagegen ist der Verf. auf einige andere Widerstandsprobleme näher ein-

gegangen, welche schon früher behandelt sind und nach derselben Methode erledigt werden können, wobei nämlich die Bedingung, dass die Endpunkte der Meridiancurve gegeben sind, durch andere Bedingungen ersetzt wird. Die Bemerkungen von Hrn. August vervollständigen und berichtigen die von früheren Forschern gefundenen Lösungen und kritisiren besonders die neueren Arbeiten von Hrn. Starkoff, über welche F. d. M. XVI. 1884. 832 und XVII. 1885. 359 berichtet ist.

In einer Schlussbemerkung wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Arbeit keinen Anspruch darauf erhebt, das Problem endgültig gelöst zu haben, sondern nur gemäss den zu Anfang ausgesprochenen Annahmen. Lp.

M. Thiesen. Versuche über den Luftwiderstand. Berl. phys. Ges. Verh. VI. 2-4.

Die Versuche dienen zur Bestätigung der Formel, welche Hr. Th. in einer früheren Arbeit für das Moment des Luftwiderstandes gegen einen rotirenden cylindrischen Stab entwickelt hatte (s. F. d. M. XVII. 1885. 901). Die Bewegung ist durch eine Differentialgleichung von der folgenden Form darstellbar:

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_0 + a_1 \frac{d\varphi}{dt} + a_2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + a_3\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3.$$

Lp.

J. Freiburg. Ueber den Luftwiderstand bei kleinen Geschwindigkeiten. Bonn. 31 S. 8°.

E. Thiel. Photographische Aufnahme der Lufthülle, welche das fliegende Geschoss umgiebt. Arch. f. Art. XCIV. 485-500.

Darstellung der Resultate der Mach'schen Versuche in ihrer Bedeutung für die Ballistik; der Artikel ist von Hrn. Mach durchgesehen. Lp.

E. Vallier. Note sur le tir contre les ballons. Rev. d'Art. XXX. 106-110.

Um dem Schiessen auf einen gefesselten Ballon eine theoretische Grundlage zu geben, nimmt der Verf. an, die horizontale Entfernung des Ballons und sein Höhenwinkel seien gemessen. Hieraus berechnet er mit Hülfe der Formeln, welche er in der oben S. 953 besprochenen Arbeit entwickelt hat, den Abgangswinkel des Geschosses. Lp.

E. Rivals. Des effets du tir des pièces rayées sur le matériel. Toulouse Mém. (8) IX. 429-437.

Fortsetzung der Arbeit, über welche F. d. M. XVII. 1885. 978 berichtet ist. Das Thema dieses zweiten Teiles ist der Einfluss der Züge in den Geschützen auf die Grösse des Grenzwinkels für die Erhebung der Stirnschiene einer Laffettenwand und auf die Grösse der Stützdrucke rechts und links. Der Verf. giebt am Schlusse die Ergebnisse seiner Rechnungen in folgenden Worten: Beim Schusse unter dem Grenzwinkel der Erhebung bei den Laffetten des zweiten und des dritten Systemes, d. h. mit doppeltem Schwanzstück, darf man sicher sein, 1) dass der Winkel des Grenzschusses der Erhebung durch die Rotation des Geschosses nicht geändert wird, und dass er immer durch die Poisson'sche Formel $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{h'-nh}{a'-nh}$ gegeben wird; 2) dass die Differenz der Drucke nach hinten auf die rechte Seite und auf die linke Seite des Laffettenrahmens ein merklicher Bruchteil ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, ...) des ganzen Druckes ist, niemals aber die ungeheueren Werte erreicht, welche ihm manche theoretisch irrige Arbeiten zuerteilen. Lp.

J. F. Ueber die Ermittelung der in den einzelnen Zeitmomenten verbrannten Pulvermengen und der Brenngeschwindigkeit des Pulvers. Arch. f. Art. XCIV. 437-453.

Versuch, die in den einzelnen Momenten verbrannten Pulver-

mengen aus den Geschossgeschwindigkeiten und hieraus die Brenngeschwindigkeit des Pulvers zu berechnen, teils unter Anlehnung an die „Études des effets de la poudre“ von Sébert und Hugoniot, teils auf selbständigem Wege. Lp.

E. STRNAD. Ueber die Ausnutzung der Schusspräcision eines Geschützes. Mitt. üb. Art. u. Genie. XVIII$_1$. 375-392.

Da durch das Einschiessverfahren eine thatsächliche Verlegung des mittleren Treffpunktes in den beabsichtigten Treffpunkt nur zufällig erfolgen kann, so kann die grösstmögliche Treff-Fähigkeit eines Geschützes wohl angestrebt, aber mit Sicherheit niemals erreicht werden. Daher stellt sich der Verfasser die Aufgabe, vermöge der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung diejenige Grenze zu ermitteln, welche der mittlere Treffpunkt eines Geschützes nicht überschreiten darf, falls nicht die Möglichkeit vorliegen soll, dass dessen Treff-Fähigkeit durch die eines minder präcise schiessenden Geschützes übertroffen werden könne. Nachdem die grösste Entfernung des mittleren Treffpunktes vom beabsichtigten Treffpunkte unter bestimmten Annahmen berechnet ist, wird weiter die Frage gestellt, welche Treffwahrscheinlichkeit gegen verschieden dimensionirte Ziele sich ergiebt, wenn der mittlere Treffpunkt jener Bedingung entspricht, und es zeigt sich, dass dann die Treff-Fähigkeit nur noch wenig von der maximalen abweicht. Auf Grund der erreichten Ergebnisse wird dann zuletzt die Frage erörtert, wann man sich als eingeschossen gegen ein gegebenes Ziel betrachten könne. Lp.

N. B. DELAUNAY. Zur Theorie des Stosses starrer Körper. Mosk. Math. Samml. XIII. 500-510. (Russisch.)

Der Verfasser beweist, dass für Stösse, die einer bestimmten Stossebene und einer bestimmten reducirten Masse (Vgl. Mosk. Math. Samml. XII. 421-432) entsprechen, die Axen der durch den Stoss veranlassten Schraubenbewegung auf einem elliptischen Cylinder liegen, dass dabei die durch die Endpunkte der grossen

Halbaxen gehenden Geraden permanente Axen, und die durch die Endpunkte der kleinen Halbaxen gehenden Geraden Axen grössten Gleitens sind. Danach bestimmt der Autor den Ort der Stosspunkte auf der Oberfläche des Körpers, welche einer bestimmten reducirten Masse entsprechen, und zeigt, dass, wenn der Körper eine ebene Seite besitzt, dieser Ort eine Ellipse ist. Ms.

Sir R. S. Ball. Dynamics and modern geometry. A new chapter in the theory of screws. Royal Irish Ac.: „Cunningham Memoirs" No. IV. 1-44.

Die Untersuchungen in dieser Abhandlung beruhen auf der Abbildung des Cylindroids auf einem Kreise, so dass jeder Schraube des ersteren ein Punkt auf dem letzteren entspricht. Da eine Schraube auf dem Cylindroid durch die Gleichungen bestimmt wird: $y = x \operatorname{tang} \theta$, $z = m \sin 2\theta$ und der zu θ gehörige Windungsparameter (pitch) der Schraube durch $p = p_0 + m \cos 2\theta$, so giebt die Elimination von θ zwischen den Gleichungen für z und p:

$$(p - p_0)^2 + z^2 = m^2,$$

und diese Gleichung mit p und z als laufenden Coordinaten giebt den zu Grunde gelegten Kreis der Abbildung. Vermittelst dieses Kreises werden einfache Erörterungen gegeben über die Verteilung des Windungsparameters auf dem Cylindroid, über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drillungen und Dynamen (twists and wrenches), über die Eigenschaften des virtuellen Coefficienten; endlich werden die Theorien der Stosskräfte nebst denen der kleinen Schwingungen in eingehender Weise vorgeführt. Gbs. (Lp.)

R. S. Ball. A dynamical parable. Nature XXXVI. 424-429, Brit. Ass. Rep. (Manchester.)

R. S. Ball. Una parabola dinamica. Traduzione dall' Inglese di G. Vivanti. Il Politecnico. 12 S. 8°.

Als Vorsitzender der Section A (Mathematik und Physik)

der British Association zu Manchester giebt der Verfasser in der vorliegenden Eröffnungsrede unter der Form einer humoristisch gehaltenen erzählenden Parabel eine populäre allgemeine Uebersicht über seine Leistungen auf dem Gebiete der Theorie der Schrauben und Dynamen (screws and wrenches). Hr. Vivanti begleitet seine italienische Uebersetzung mit dem Ausdrucke des Wunsches, sie möchte zum Studium einer der schönsten Theorien anregen, deren sich die neuere Mechanik rühme. Lp.

G. Emery. Sulla posizione dell'asse centrale dei momenti delle quantità di moto in un sistema materiale rigido animato di moto sferico. Ann. d. R. Ist. Tecn. e Naut. di Napoli, 2ª S., Napoli Rend. (2) I. 97-100.

Bei einem in Bewegung befindlichen starren Körper werde die Bewegungsgrösse jedes Massenpunktes als eine Kraft betrachtet; das so entstandene Kräftesystem reducire man auf eine Dyname. Die Axe dieser Dyname (oder Centralaxe der Bewegungsgrössen) liegt im Körper fest, wenn die Bewegung eine Drehung um eine feste Axe ist. Geschieht dagegen die Bewegung als Drehung um einen festen Punkt, so steht die Centralaxe der Momente der Bewegungsgrössen in ihren veränderlichen Lagen stets senkrecht auf der Verbindungslinie des festen Punktes mit dem Schwerpunkte und erzeugt in dem starren Körper ein Cylindroid, dessen Gestalt von der näheren Bewegung des Körpers, insbesondere von der Gestalt des Axenkegels des bewegten Körpers abhängt. Wenn dieser Axenkegel in eine Ebene ausartet, wird auch das Cylindroid zu einer Ebene, und die veränderliche Schnittgerade beider beschreibt ein Konoid dritten Grades. Die gegenseitige Beziehung der Momentanaxen und der Centralaxe wird noch näher bestimmt. Lp.

D. Edwardes, Sircom, A. M. Nash. Solution of question 8545. Ed. Times XLVI. 123-124.

Ein homogener Stab bewegt sich in einer Verticalebene unter der Einwirkung der Schwere, mit seinem unteren Ende auf einer

glatten horizontalen Ebene, mit seinem oberen auf einer glatten Curve. Falls der Stab am Anfange der Bewegung in Ruhe ist, so erreicht er die horizontale Lage in der kürzesten Zeit, wenn die Curve ein Bogen einer Ellipse mit der Excentricität $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und dem Parameter gleich der halben Stablänge ist. Nimmt man an, dass der Stab in der Anfangslage die Curve nicht schneide, so giebt es zwei Ellipsen, welche der Bedingung genügen, falls die Neigung des Stabes gegen die Horizontale in der Anfangslage kleiner als $\sqrt{2}$ ist; für beide Curven ist die Zeit des Falles dieselbe. Der Beweis wird durch die Bemerkung elementar, dass nach Fortnahme der Curve die Bewegung am schnellsten wird, dann der Schwerpunkt aber eine Gerade beschreibt. Lp.

A. Mayer. Ueber ein Bewegungsproblem. Leipz. Ber. 123-132.

„Ein schwerer Körper gleitet mit seiner ebenen Basis reibungslos auf einer festen schiefen Ebene. Der Körper besitzt überdies eine Höhlung von gegebener geometrischer Gestalt, an deren Wandfläche ein schwerer Punkt ebenfalls ohne Reibung herabfällt. Es handelt sich darum, die gleichzeitige Bewegung des Körpers und des Punktes zu bestimmen". Dabei ist vorausgesetzt, dass der Körper nicht umkippen darf, und dass der Punkt auf der Höhlenwand zu bleiben genötigt ist. Der Verfasser führt die Aufgabe auf die Integration dreier partiellen Differentialgleichungen zurück, von denen er, dem Flächensatze und dem Satze der lebendigen Kraft entsprechend, zwei Integrale aufstellt. Hieraus folgt, dass die Aufgabe auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen zurückkommt, zu deren vollständiger Lösung die Kenntnis einer von ihr unabhängigen Lösung einer gewissen anderen, linearen partiellen Differentialgleichung genügt, d. h. in diesem Falle lässt sich die Aufgabe mit Hülfe von algebraischen Operationen und blossen Quadraturen vollständig lösen.

Wird z. B. die Wand der Körperhöhlung von einer Rotationsfläche gebildet, deren Axe senkrecht zur ebenen Basis des Körpers

ist und durch seinen Schwerpunkt geht, so ist dieses Problem vollständig lösbar; dagegen vermag man die Bewegung eines schweren Punktes ohne Reibung und bei beliebiger Richtung der Anfangsgeschwindigkeit auf der Wand des nicht mehr beweglichen, sondern auf der schiefen Ebene festgeschraubten Körpers noch nicht genau zu bestimmen. Ferner wird die allgemeine Aufgabe immer lösbar, wenn sich die Körperhöhlung auf eine blosse Rinne oder auf einen Kanal reducirt. Lp.

KIRCHER. Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Systeme, dargestellt nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Pr. Realgymn. Meiningen (No. 652). S. 2-36 in 4° mit 1 Taf.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile entwickelt der Verfasser nach Grassmann die Gesetze der geometrischen Addition und Subtraction, die Definition des Massenmittelpunktes, die geometrische Differentiation, die äussere Multiplication der Strecken und ihre Anwendung zur Momentenbildung und leitet danach die Bewegungsgleichungen eines starren ebenen Systems her. Dieser erste Abschnitt ist also für solche Leser bestimmt, welche mit den Grassmann'schen Principien nicht bekannt sind. Nach der Einleitung ist der Verf. hierzu durch eine Vorlesung des Hrn. Abbe im Wintersemester 1876/77 angeregt worden; doch ist ihm wohl nicht bekannt geworden, dass Hr. J. Lüroth in seinem „Grundriss der Mechanik" (München, 1881) sich der Streckenrechnung bedient und ausdrücklich dabei auf Grassmann hingewiesen hat; in dieser letzteren Schrift ist daher der ganze Stoff der Mechanik unter ähnlichem Gesichtspunkte behandelt.

Der zweite Teil löst einzelne Aufgaben sowohl nach der im ersten Teile dargelegten Methode, als auch auf dem gewöhnlichen Wege mittels der Euler'schen Differentialgleichungen für die Bewegung eines starren Körpers. Weder sind jedoch die Beispiele neu, noch beweisen sie die Ueberlegenheit der vom Verfasser an die Spitze gestellten Methode. Die behandelten Aufgaben sind: 1) Das Rollen eines homogenen, schweren Kreiscylinders inner-

halb eines anderen mit horizontaler Axe (allgemeiner bei Hoppe, F. d. M. XV. 1883. 825). 2) Das Rollen eines homogenen schweren Kreiscylinders auf schiefer Ebene (Vgl. u. a. Ritter, Technische Mechanik). 3) Ein Kreiscylinder mit excentrischem Schwerpunkte rollt a) innerhalb eines Hohlcylinders, b) auf schiefer Ebene. (In anderer Fassung u. a. bei Jullien, „Problèmes de Mécanique rationnelle"). 4) Das Rollen eines homogenen schweren Kreiscylinders innerhalb eines hohlen Cykloidencylinders. (Besonders in englischen Aufgabensammlungen für manche andere Cylinder noch untersucht.) Lp.

E. J. Borchert. Eine Aufgabe aus der analytischen Mechanik. Pr. Gymn. Hohenstein in Ostpr. (No. 5). 12 S. 4°.

„Ein homogener geradliniger Stab liegt auf einer Horizontalebene und ist gezwungen, mit einem Endpunkte längs eines in der Horizontalebene liegenden straff gespannten Fadens ohne Reibung zu gleiten. Der Stab soll anfänglich einen rechten Winkel mit dem Faden bilden und auf das freie Ende ein Stoss parallel dem Faden geführt werden. Welche Bewegung nimmt der Stab an?"

Die Componente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes parallel zur Fadenrichtung ist constant. Zwischen der Zeit t und dem Winkel ϑ, welchen der Stab mit der Fadenrichtung zur Zeit t bildet, findet die Gleichung statt

$$t = \tfrac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\vartheta} d\varphi \sqrt{1-\tfrac{3}{4}\sin^2\varphi},$$

oder auch nach der Legendre'schen Bezeichnung:

$$t = \tfrac{4}{3}\{E(\vartheta, k) - E(\tfrac{1}{2}\pi, k)\},$$

wenn $k = \sqrt{0{,}75}$ gesetzt wird.

Der Verfasser berechnet ein Zahlenbeispiel mit Hülfe der Landen'schen Transformation aus den Jacobi'schen Formeln und macht zum Schlusse auf mehrere ähnliche Aufgaben aufmerksam. Lp.

PFANNSTIEL. Ueber eine Stelle in Poisson's Mechanik. Schlömilch Z. XXXII. 244-246.

W. HESS. Ueber eine Stelle in Poisson's Traité de Mécanique. Schlömilch Z. XXXII. 382-384.

An der kinematischen Behandlung der Bewegung eines starren Körper's in Poisson's Traité de Mécanique (No. 408 der 2ten Aufl.) glaubte Hr. Pfannstiel einen Fehler bemerkt zu haben. Hr. W. Hess dagegen zeigt, dass bei richtiger Auffassung des offenbaren Sinnes der Stelle nichts Fehlerhaftes in ihr enthalten sei. Uebrigens ist dieselbe Stelle auch schon in der ersten Auflage des Traité de Mécanique von 1811 enthalten (No. 377); jedoch ist die Begründung der älteren Fassung ein wenig ausführlicher. Lp.

W. HESS. Ueber das Gyroskop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystems. Math. Ann. XXIX. 500-580.

Der Verf. spricht sich in der Einleitung der umfangreichen Abhandlung über das Ziel derselben in folgenden Worten aus:

„Das Problem der Bewegung eines schweren Umdrehungskörpers, welcher um einen festen Punkt seiner Axe rotirt, ist analytisch durch die bekannte Arbeit Lottner's (Reduction eines schweren, um einen festen Punkt rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten, J. für Math. L. 111-125) und die im wesentlichen damit übereinstimmenden eigenartigen Untersuchungen Jacobi's (Fragments sur la rotation d'un corps. B. C. Ges. Werke II. 477-514) insoferne als gelöst zu betrachten, als man im Stande ist, auf Grund derselben die Lage des Systems der drei Hauptträgheitsaxen, welches den Körper zu ersetzen geeignet ist, gegen ein festes Coordinatensystem des Raumes in Function der Zeit und der Constanten des Problems zu reduciren. Eine geometrische Discussion scheint jedoch bislang nur der Fall des „gewöhnlichen Gyroskops" erfahren zu haben (W. Hess. Ueber das Gyroskop. Math. Ann. XIX. 121-154, F. d. M. XIII. 1881. 711), d. i. eines Umdrehungskörpers, welcher durch eine

blosse Rotation um seine Axe in Bewegung gesetzt wurde, während für die Annahme eines ganz allgemein gewählten Momentankräftesystems weder die Bewegung dieser Axe noch die Gestalt der Poinsot'schen Kegel verfolgt sein dürften, noch auch weiterhin unseres Wissens die Aufstellung der Elemente der Euler'schen Rotationen.

Diese dreifache Lücke auszufüllen ist Zweck der vorliegenden Arbeit. Es werden diesem Ziel entsprechend untersucht:

I. Die Bewegung der Axe des Gyroskops im Raume.

II. Die Formen des beweglichen Kegels der „Polodie" und des festen Kegels der „Herpolodie", durch deren Abrollen nach Poinsot die successive Ueberführung des rotirenden Körpers von einer ersten in eine zweite, endlich davon verschiedene Lage versinnlicht werden kann.

III. Die Lage jener ausgezeichneten Axe des Raumes, längs welcher nach Euler eine einzige Drehung von endlicher Amplitude genügt, um sofort den Körper aus der ersten obigen Lage in die zweite zu transferiren, sowie die Grösse jener Amplitude."

Die zugrunde gelegte Rechnung schliesst sich in I zunächst an die citirte Arbeit Lottner's, dann auch an die von Jacobi an. Die geometrische Erörterung erheischt jedoch die Unterscheidung so vieler einzelnen Fälle, dass es unmöglich ist, diese hier vorzuführen. Die einzelnen Paragraphen dieses Teiles sind betitelt: Der Winkel zwischen der Figuraxe und der Verticalen, die Normalanfangslage der Figuraxe, gegenseitiges Verhalten von Anfangs- und Endlage, Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten, der Poinsot'sche Fall der nutationsfreien Bewegung, die Präcessionsbewegung der Figuraxe, Untersuchung auf Wendekanten, graphische Darstellung der verschiedenen Typen. Um den von der Figuraxe im Raume beschriebenen Kegel zu veranschaulichen, stellt der Verf. in § 8 die verschiedenen Typen derjenigen sphärischen Curven zusammen, welche der Schwerpunkt des Gyroskops im Raume beschreibt, und führt sie in Horizontalprojection graphisch vor. Es sind 16 Typen von Figuren, unter

denen einige, um den Einfluss der Grösse der Constanten zu versinnlichen, für mehrere Werte derselben abgebildet sind.

Die Betrachtung des Kegels der Polodie in II stützt sich auf neue analytische Entwickelungen, deren geometrische Discussion abermals die Unterscheidung vieler Einzelfälle erfordert. Der Radiusvector der Polodie, die Winkelgeschwindigkeit des instantanen Drehpols, die Untersuchung der Polodie auf Wendepunkte (identisch mit der Frage nach den Wendepunkten der Herpolodie Poinsot's), der Polarwinkel der Polodie sind die Themata der ersten Paragraphen dieses Abschnittes; ihnen folgt eine Klassification der Formen der Polodie in 12 Typen, deren Cyklus wieder abgebildet ist. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um zwei Hauptaxen der Aequators wird zuletzt analytisch dargestellt.

Bei der Besprechung des Kegels der Herpolodie werden untersucht die Kugelzone, welche die Herpolodie umschliesst, und die Horizontalprojection der Herpolodie.

Im Abschnitte III wird zunächst von den neun Neigungscosinus in Functionen der Zeit gehandelt und aus den Lottner'schen Formeln der Satz abgeleitet: „Die constante Winkelgeschwindigkeit Φ, mit welcher das System der gleichen Hauptträgheitsaxen des rotirenden Körpers in der Aequatorebene rotirend gedacht wird, sowie der Winkel φ einer der Hauptaxen, x', mit der Linie der Knoten kann durch einen Ausdruck dargestellt werden, in welchen elliptische Functionen mit nur einem constanten Parameter eingehen, zum Unterschiede von den Darstellungen Lottner's und Jacobi's, welche deren zwei zur Verwendung brachten". Die letzten Paragraphen erörtern endlich die Elemente der Euler'schen Rotation in Functionen der Richtungscosinus des beweglichen Axensystems, die symmetrischen Euler'schen Winkel und die Elemente der Euler'schen Rotation in Functionen der Zeit. Von den verschiedenen Sätzen, zu welchen der Verfasser hier gelangt, setzen wir nur den letzten her, den er als Seitenstück zu dem Jacobi'schen Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrange'schen Rotation durch zwei Poinsot'sche Rotationen bezeichnet:

„Die periodischen Elemente der Euler'schen Rotation, durch welche ein unter dem Einfluss beliebiger Momentankräfte sich drehendes Gyroskop aus einer ersten Lage in eine zweite übergeführt werden kann, besitzen denselben Charakter wie die periodischen Elemente, welche die Lage der Hauptträgheitsaxen eines ohne Einfluss äusserer Kräfte rotirenden Körpers im Raume bestimmen. Wie bei dem Jacobi'schen Theorem entsprechen sich die invariable Horizontalebene des Gyroskops und die invariable Ebene des den rotirenden Körper afficirenden Momentankräftepaars, die invariable Richtung der Schwere und die invariable Axe dieses Paares, endlich die gleichförmige Eigenbewegung der Coordinatenaxen in den invariablen Ebenen". Lp.

DE SAINT-GERMAIN. Résumé de la théorie du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, à l'usage des candidats à la Licence ès Sciences. Paris. Gauthier-Villars.

A. CORNU. Sur la condition de stabilité d'un système oscillant soumis à une liaison synchronique pendulaire. C. R. CIV. 1463-1470.

A. CORNU. Sur la synchronisation d'une oscillation faiblement amortie. Indicatrice de synchronisation représentant le régime variable. C. R. CIV. 1656-1666.

Bei manchen Experimenten stösst man auf die Aufgabe: „Die Oscillationen eines gegebenen beweglichen Systems (Balancier, schwingende Platte, Galvanometer u. s. w.) mit einer ebenfalls gegebenen periodischen Bewegung (Schlag einer Uhr, eines Relai, u. dgl. m.) genau synchronisch zu machen". Hierbei ist das schwingende zu synchronisirende System im allgemeinen ein unveränderlicher Körper, auf welchen einwirken: 1) eine der Entfernung proportionale Hauptkraft, 2) eine der Geschwindigkeit proportionale störende Kraft, 3) eine hinzutretende Kraft, welche die synchronische Verbindung herstellt, deren Intensität perio-

disch ist, und die der Einfachheit wegen als unabhängig von der Lage des Systems vorausgesetzt ist. Dann ist die Differentialgleichung des Systems

$$(1) \qquad \mu \frac{d^2\theta}{dt^2} + q \frac{d\theta}{dt} + r\theta = F,$$

wenn θ den Winkelausschlag des Systems, μ das Trägheitsmoment, q und r die Momente der beiden ersten Kräfte, welche der Einheit der Geschwindigkeit und Entfernung entsprechen, F das Moment der synchronischen Verbindung als Function der Zeit allein bezeichnen. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$(2) \qquad \theta = Ae^{-\alpha t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) + \mathfrak{F} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= -\frac{q}{2\mu} \\ \frac{2\pi}{T} &= \sqrt{\frac{r}{\mu} - \left(\frac{q}{2\mu}\right)^2}, \end{aligned} \right.$$

wenn A und φ die Integrationsconstanten bezeichnen. Das erste Glied rechts (die Lösung von (1), wenn $F = 0$) stellt eine Schwingung dar, deren Amplitude mit der Zeit erlischt; das zweite, $\mathfrak{F}$, ist eine particuläre Lösung der vollständigen Gleichung (1). Die vom Verfasser gestellte und sowohl theoretisch wie experimentell behandelte Aufgabe besteht in der Untersuchung, ob es möglich ist, die resultirende Bewegung mit einer periodischen Function $\mathfrak{F}$ zusammenfallen zu lassen, deren Periode Θ von der eigenen Schwingungsperiode T des Systems verschieden ist.

In dem ersten Artikel wird $\mathfrak{F}$ zunächst in der Form $\sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} - \psi\right)$, dann in der Form einer trigonometrischen nach den Vielfachen von t/Θ fortschreitenden Reihe angenommen; im zweiten Artikel wird $\mathfrak{F}$ nicht mehr als continuirlich, sondern als momentan wirkende Kraft vorausgesetzt. Die Darstellung der Resultate, besonders der experimentell sehr hübsch ersonnenen und dargestellten Indicatrices der Synchronisation ist im Auszuge nicht möglich. Lp.

G. Lorenzoni. Sulla equazione differenziale del moto di un pendolo fisico il cui asse di suspensione muovesi rimanendo parallelo a sè stesso. Ven. Ist. Atti (6) V. 331-375.

Eine erste Bewegung der Aufhängeaxe eines physischen Pendels rührt davon her, dass die Stütze der Schneide nicht absolut starr und ihr Widerstand gegen das Gleiten der Schneide nicht ausreichend ist. Eine zweite Bewegung wird dadurch hervorgerufen, dass die Schneide keine geometrische Gerade ist, sondern als Cylinderfläche betrachtet werden kann. In Bezug auf den Einfluss der ersten Bewegung citirt der Verf. aus den Abhandlungen der K. bayer. Ak. der Wissenschaften XIV (1883) die Abhandlung des Hrn. Orff.: „Bestimmung der Länge des einfachen Secundenpendels auf der Sternwarte zu Bogenhausen". Von Bessel bereits in Betracht gezogen, ist diese erste Bewegung theoretisch berücksichtigt durch Cellérier (Archives des sciences phys. et. nat. 1875) und durch Peirce und Plantamour (Gradmessungsbericht für 1877. Berlin 1878). Die cylindrische Beschaffenheit der Schneide ist in Betracht gezogen worden durch Laplace (1816 in einem Vortrage der Akademie, veröffentlicht in der Connaissance des temps für 1820: „Sur la longueur du pendule à secondes) durch Bessel (1826) in den „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels" und durch Poisson in der Abhandlung „Sur le pendule de-Borda" (Additions à la Connaissance des temps pour l'an 1833. Paris, 1830). Zu diesen vom Verf. citirten Autoren ist hinzuzufügen Euler in Nova Acta Acad. Petrop. 1788 (vgl. Jullien, Probl. de Méc. rat. II). Von der italienischen geodätischen Commission beauftragt, die Fragen bezüglich der Bestimmung der Schwere mittels des Repsold'schen Reversionspendels zu studiren, hat sich Hr. Lorenzoni zunächst die Aufgabe gestellt, die bisher getrennt behandelten beiden Seiten des Problems in einer Differentialgleichung zu vereinigen. Er gewinnt dieselbe in der Form:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\{i^2+s^2+2s\varrho\cos(\theta-\beta)+\varrho^2\} \\ \quad = \dfrac{d^2y}{dt^2}(s\cos\theta+\varrho\cos\beta)-\dfrac{d^2x}{dt^2}(s\sin\theta+\varrho\sin\beta). \end{cases}$$

Die x-Axe ist vertical nach unten, die y-Axe horizontal und

senkrecht gegen die Aufhängeaxe; ferner bedeuten θ den veränderlichen Ausschlag des Pendels, verglichen mit der Ruhelage, i den Trägheitsradius für eine Axe durch den Schwerpunkt, parallel zur Aufhängeaxe, s den Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängeaxe, β den (negativ gerechneten) Winkel, welchen die Ebene durch die Aufhängeaxe und die Momentanaxe der Rotation mit der Verticale bildet, ϱ den Abstand beider Axen.

Aus der Gleichung (2) folgt unter der Annahme einer Kraft, die auf die Aufhängeaxe einwirkt, in der Schwingungsebene liegt und mit der Horizontale den Winkel β bildet:

$$(2^a)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}(l+\varrho\cos(\theta-\beta)) = -g\sin\theta,$$

wo l die Grösse $(i^2+s^2)/s$ bezeichnet; die Pendellänge l ist also um $\varrho\cos(\theta-\beta)$ in jedem Augenblicke vermehrt zu denken. Aus (2) leitet der Verf. leicht die Gleichung Cellérier's ab; eine etwas längere Umrechnung führt auf die Ergebnisse Bessel's. Danach ermittelt Hr. L. die horizontale und verticale Componente des Druckes des Pendels gegen die Stützfläche, ferner die Bewegung der Schneide, welche von der Elasticität der Stützfläche und ihrem unzulänglichen Widerstande gegen das Gleiten der Schneide herrührt, nebst dem Einflusse dieser Bewegung auf die (ein wenig vergrösserte) Schwingungsdauer; das Resultat wird als übereinstimmend mit dem Bessel'schen nachgewiesen. Es folgen dann noch mehrere Rechnungen, welche teils neue Ableitungen von Gl. (2) aus den Principien der Dynamik liefern, teils dem Vergleiche mit den Formeln der im Eingange erwähnten Forscher gewidmet sind. Lp.

E. DE JONQUIÈRES. Sur les mouvements d'oscillation simultanés de deux pendules suspendus bout à bout. C. R. CV. 23-27.

E. DE JONQUIÈRES. Sur les mouvements oscillatoires subordonnés. C. R. CV. 253-255.

Die Theorie eines Pendels, welches aus zwei durch ein Ge-

lenk verbundenen starren Körpern besteht, kann nur unter solchen einschränkenden Bedingungen gegeben werden, welche in der Praxis nicht inne zu halten sind. Daher hat Hr. de Jonquières die Experimentaluntersuchung eines solchen Pendels vorgenommen, bei der er sich auf Schwingungen beschränkt hat, die in einer Ebene stattfinden, und bei der er besonders das Massenverhältnis des oberen Pendels zum unteren vielfach abgeändert hat. Die erzielten Ergebnisse werden beschrieben und mit den Formeln verglichen, welche die Herren Resal und Menabrea berechnet hatten. (Die Zusendung der Arbeit des Letzteren aus den Turiner Abhandlungen von 1854 hat die zweite Note veranlasst). Die Versuche erstreckten sich besonders auf die Ermittelung der Schwingungszahlen und der Bedingungen, unter denen beide Pendel gleichzeitig Schwingungen nach derselben (mouvement d'ensemble) oder nach entgegengesetzter Seite (mouvement à-contre) ausführen.

Lp.

C. H. C. Grinwis. Over den invloed der massaverdeeling op de slingerlengte. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 328-359.

In dieser Abhandlung wird untersucht, welchen Einfluss die Verteilung der Masse auf die Pendellänge hat. Von der Bestimmung des Schwingungsmittelpunktes durch Chr. Huygens ausgehend, wendet der Verf. eine Methode an, durch die das Auffinden dieses Punktes bei zusammengesetzten und ausgehöhlten ebenen Figuren sich vereinfacht. Dabei untersucht er den Einfluss, welchen sowohl Grösse als Form solcher Figuren auf die Pendellänge haben. Die weitere Ausführung der Theorie geschieht durch Anwendung auf zwei complementare Kreissegmente und auf einen durch ein gleichseitiges Dreieck oder durch ein Viereck ausgehöhlten Kreis. Darauf wird der Schwingungsmittelpunkt eines Dreiecks und eines Vierecks aufgesucht, welche um eine auf ihrer Ebene senkrecht stehende, durch eine der Ecken gehende Axe schwingen, ebenso der eines Kreissectors, wenn die Schwingungsaxe durch den Mittelpunkt des Kreises senkrecht zu seiner Ebene

genommen wird. Die Resultate jedes Falles werden ausführlich besprochen und erläutert. G.

G. A. Hirn. Théorie et application du pendule à deux branches. C. R. CV. 40-45.

Unter dem zweiarmigen Pendel versteht Hr. Hirn ein (in der Länge 0,5 *m* ausgeführtes) Pendel, so wie es an dem Metronom von Mälzl gebraucht wird. In der Theorie, welche er giebt, betrachtet er das Laufgewicht und das untere feste Gewicht als Massenpunkte und vernachlässigt die Dicke des Lineals, welche das Pendel bildet. Die von Hrn. Hirn vermisste Behandlung der Aufgabe, ein solches Pendel zu graduiren, d. h. für eine gewünschte Anzahl *n* von Schlägen in der Minute die Stelle des Laufgewichtes zu bestimmen, beansprucht im zweiten Bande der Problèmes de Mécanique rationnelle von Jullien etwa zwei Drittel einer Seite mit Figur und Aufgabe. Lp.

E. Ronkar. Note sur les oscillations d'un pendule produites par le déplacement de l'axe de suspension. Belg. Bull. (3) XIV. 296-311.

F. Folie. Rapport sur ce Mémoire. Belg. Bull. (3) XIV. 195-196.

Der bemerkenswerteste Fall ist derjenige, bei welchem das Pendel und die Axe dieselbe Schwingungsdauer haben; in diesem Falle kann das ruhende Pendel eine Bewegung annehmen und behalten, deren Amplitude der von der Axe erhaltenen Anzahl der Impulse proportional ist. Mn. (Lp.)

M. Koppe. Der Foucault'sche Pendelversuch. Poske Z. I. 14-22.

M. Koppe. Das Foucault'sche Pendel. Poske Z. I. 70-71.

Ausser einer experimentellen Methode zur Nachahmung des Versuches in rein kinematischer Auffassung durch Apparate, die

hierzu ersonnen sind, werden auch elementare theoretische Betrachtungen angestellt, um die Gesetze der Bewegung, besonders auch die Form der Curve zu ermitteln, welche der Endpunkt des Pendels beschreibt. Lp.

A. Kurz. Das bifilare Pendel. Exner Rep. XXIII. 406-410.

E. Sang. On the minute oscillations of a uniform flexible chain hung by one end: and on the functions arising in the course of the inquiry (with a plate). Edinb. Proc. XIV. 283-286.

Die betrachteten Schwingungen sind einfache Oscillationen, welche durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dz}\left(x\frac{dx}{dz}\right) = -ax$$

definirt werden, in der man auch $a = 1$ setzen darf. Thut man dies, so ist das Integral derselben:

$$x = 1 - \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{1^2 2^2} - \frac{z^3}{1^2 2^2 3^2} + \cdots,$$

also eine Bessel'sche Function. Der Verf. untersucht die Zahlenwerte für die aufeinander folgenden Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_6$ der Gleichung $x = 0$ und noch andere Eigenschaften.

Cly. (Lp.)

H. Hennessy. Problems in mechanism regarding trains of pullies and drums of least weight for a given velocity ratio. Lond. R. S. Proc. XLII. 134-138.

Franke, W. Hess, G. Hauck. Bemerkungen zur elementaren Behandlung des Kreiselproblems. Hoffmann Z. XVIII. 182-188.

Die Bemerkungen beziehen sich auf die Arbeit von Hauck, welche im vorigen Jahrgang besprochen ist. Lg.

L. Fernbach. Die Bewegung einer homogen mit Masse belegten starren Geraden auf einer geradlinigen Fläche. Diss. Halle. 25 S. 8°.

M. Richter. Ueber die Bewegung eines Körpers auf einer Horizontal-Ebene. Diss. Leipzig. 56 S. 8°.

B. Hydrodynamik.

G. von Wex. Hydrodynamik: Entwickelung neuer genauer Formeln zur Berechnung der Wasserabflussmengen bei Ueberfallwehren, Grundschleusen, Schützenöffnungen und der Wasserausleitungen in Canäle, ferner Mitteilungen über die neuesten diesbezüglichen in Amerika, Oesterreich und in Italien im grossen Massstabe durchgeführten Versuche. Leipzig. W. Engelmann. 168 S. 6 Tabellen, 5 Lithogr. Tafeln.

Das vorliegende Werk ist nicht eine Hydrodynamik in dem Sinne, wie der Mathematiker oder Physiker das Wort gebraucht; auch werden die im Titel genannten Probleme der Hydraulik nicht unter Benutzung der Grundlagen der wissenschaftlichen Hydrodynamik, sondern wesentlich durch Betrachtungen gelöst, wie sie schon vorher von Praktikern in Ermangelung besserer Methoden angewandt wurden. Allerdings muss zugegeben werden, dass der Herr Verfasser einige bisher unberücksichtigt gebliebene Umstände in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, und dass so vielleicht seinen Formeln in praktischer Beziehung eine grössere Brauchbarkeit zukommt als älteren Formeln. Ohne den Wert des vorliegenden Werkes für die Praxis irgendwie in Frage zu stellen, können wir demselben für die Entwickelung der wissenschaftlichen Hydrodynamik keinerlei Bedeutung beimessen. Schon die Grundlage des ganzen Werkes, die Ableitung der Ausfluss-

formel für seitliche Ausflussöffnungen, ist völlig unzutreffend. Der Herr Verfasser geht davon aus, dass die Flüssigkeit durch eine unendlich kleine Oeffnung mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ senkrecht zur Wand fliesst. Unter Benutzung eines häufig gebrauchten, nichts destoweniger aber falschen Gedankens überträgt der Herr Verfasser dies auf die Elemente einer endlichen Ausflussöffnung und leitet daraus eine Formel für die sekundliche Ausflussmenge der letzteren ab, indem er über die ganze Oeffnung integrirt; dem so gewonnenen Resultat wird dann noch ein Coefficient hinzugefügt, der seinerseits wieder als das Product eines Contractions- und eines Geschwindigkeitscoefficienten aufzufassen ist. Dass die freie Oberfläche des Strahles eine Parabel sei, glaubt der Verfasser folgendermassen beweisen zu können. Der Abstand y irgend eines Punktes der Oberfläche von der Wandebene sei gleich der zu der betreffenden Tiefe x gehörenden Geschwindigkeit $\sqrt{2gx}$, so dass also die Gleichung der freien Oberfläche $y^2 = 2gx$ lautet. Ganz abgesehen von allem anderen, spricht schon der Umstand gegen die Entwickelungen des Verfassers, dass die Gravitationsconstante g und damit die vorliegende Gleichung von der Wahl der Zeiteinheit abhängt, während doch die Gestalt des Strahles von den letzteren unabhängig sein muss.

In den weiteren Entwickelungen spielt ein Begriff eine Hauptrolle, den die wissenschaftliche Hydrodynamik meines Wissens nicht kennt, der sogenannte hydraulische Druck. Dieser soll sich dann bemerkbar machen, wenn das Wasser in dem Gefäss nicht ruht, sondern mit einer gewissen Geschwindigkeit c zufliesst. Referent hat zunächst geglaubt, dass entsprechend der Formel

$$p = \mu g h + \tfrac{1}{2}\mu(c^2 - v^2)$$

unter hydraulischem Druck das Glied $\frac{1}{2}\mu c^2$ zu verstehen sei; das ist auch an einer Stelle der Fall. Dann aber versteht der Herr Verfasser wieder darunter die „Stosskraft des Wassers gegen eine ruhende Fläche“, welche doppelt so gross sein soll als der hydraulische Druck für eine eben so grosse Oeffnung.

Im wesentlichen handelt es sich bei den Untersuchungen um die Aufgabe der Wasserbewegung in einem Gerinne, in

welches man eine Wand stellt, die in einer Oeffnung durchbrochen ist. Wenn wir nun den Verfasser richtig verstanden haben, so argumentirt derselbe in der folgenden, nach unserer Meinung wenig zutreffenden Weise. Auf die Oeffnung wirkt erstlich der hydrostatische Druck, dessen Grösse für das Flächenelement df gleich $\mu ghdf$ ist, zweitens der hydraulische Druck, welcher eintreten würde, wenn der Rinnenquerschnitt gerade gleich der Oeffnung wäre, also $\frac{1}{2}\mu c^2 df$, endlich ein hydraulischer Druck derjenigen Wasserfäden, welche gegen die festen Teile des Einbaus strömen. Die Berechnung dieses Teiles hat Referent nicht verstanden; er muss sich also darauf beschränken, hier anzugeben, dass dieser Druck ebenfalls eine ganze lineare Function der Tiefe ist. Der Herr Verfasser setzt demgemäss die Druckhöhe y als Function der Tiefe x:

$$y = as_1 \frac{z+x}{z+H},$$

dann weiter die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gy}$$

und das Ausflussquantum

$$Q \doteq \mu \int df \sqrt{2gy}.$$

Wir glauben hiermit den Charakter der vorliegenden Entwickelungen hinreichend gekennzeichnet zu haben und sehen daher keine Veranlassung, auf die einzelnen Fragen — die ja meist rein technischer Natur sind — weiter einzugehen. Ein Hinweis auf Figur 7 Taf. I mag hier Platz finden, weil dieselbe uns von vornherein die Unhaltbarkeit der Vorstellungen des Verfassers darzulegen scheint.

Noch eine Bemerkung sei uns gestattet. Der Herr Verfasser hebt hervor, die Mangelhaftigkeit der früher gemachten Versuche zur Lösung der vorliegenden Aufgaben könne nicht auffallen, „wenn man beachte, auf welchen Grundlagen die wissenschaftliche Hydrodynamik beruhe“; an einer andern Stelle bekennt er, dass er seine „Berichtigungen“ in dem Bestreben unternahm, „die Wissenschaft der Hydrodynamik, welche nach dem Ausspruch der Fachmänner noch auf schwankenden Grundlagen aufgebaut

ist, nach Kräften zu fördern". Dem gegenüber müssen wir bemerken, dass die Nichterfolge in der Behandlung hydrodynamischer Fragen meist nicht in der Mangelhaftigkeit der Grundlagen, sondern in den analytischen Schwierigkeiten ihren Grund haben. Ueberall da, wo es gelungen ist, die letzteren zu überwinden, hat sich, vorausgesetzt dass die Bedingungen und Voraussetzungen der Rechnung hinreichend genau verwirklicht wurden, auch eine hinreichende Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ergeben. Ich verweise z. B. auf die Lehre von den Wellen (z. B. Kirchhoff's Untersuchungen über stehende Schwingungen) und auf Poiseuille's Formel. Ferner erinnere ich an Lord Rayleigh's Ableitung der Contractio venae aus der Helmholtz-Kirchhoff'schen Theorie der Flüssigkeitsstrahlen, sowie an desselben Autors Bestimmung eines Gesetzes für den Druck der Flüssigkeitsstrahlen gegen feste Wände. Die Probleme, welche der Herr Verfasser hier behandelt, haben sich bisher einer strengen Behandlung unzugänglich erwiesen. Andererseits fordert die Praxis der Bautechnik unbedingt ihre Lösung. Niemand wird es einem Techniker verübeln, wenn er in dieser Zwangslage durch vereinfachende Voraussetzungen und Vorstellungen wenigstens eine angenäherte Lösung zu erzielen sucht. Aber es muss zurückgewiesen werden, dass die Differenz derartig gewonnener Resultate und der Ergebnisse von Beobachtungen den Grundlagen der wissenschaftlichen Hydrodynamik zur Last gelegt wird.

F. K.

M. Brillouin. Questions d'hydrodynamique. Toul. Ann. I. 1-72.

Der Herr Verfasser beabsichtigt in der vorliegenden Abhandlung, einen Ueberblick über diejenigen Fortschritte zu geben, welche die mathematische Untersuchung und experimentelle Behandlung der Hydrodynamik in den letzten zwanzig Jahren gemacht hat. Das Programm des Herrn Verfassers zählt vier Abschnitte auf, von denen die beiden ersten vorliegen. Der erste Abschnitt behandelt die Theorie und experimentelle Bestimmung der Wirbel, der zweite Abschnitt die Ausflusserscheinungen und

Flüssigkeitsstrahlen; mit Sachkenntnis und Geschick werden die Entdeckungen der grossen Physiker wiedergegeben, welche die Entwickelung der Hydrodynamik in den letzten Jahrzehnten so beträchtlich gefördert haben. Dass in der Ueberschrift des ersten Abschnittes neben der französischen Bezeichnung „Tourbillon" die deutschen und englischen Bezeichnungen „Wirbelbewegungen" und „Rotational motion", „Vortex motion" angeführt sind, lässt schon erkennen, dass der Herr Verfasser mit Sorgfalt und frei von nationaler Eifersüchtelei vorgeht. Durch die Lectüre der Abhandlung wird dieser Eindruck noch verstärkt. Bei dem referirenden Charakter der vorliegenden Abhandlung selbst ist es nicht möglich, auf die Einzelheiten des Gebotenen einzugehen. Wir beschränken uns darauf mitzuteilen, dass auch die experimentelle Seite der in Frage stehenden Probleme eine eingehende, durch Abbildungen unterstützte Darstellung findet, z. B. jene interessanten Versuche, welche J. J. Thomson und Newall mitteilen (Proc. of the Royal Soc. XXXIX. 417-436).

Ebenso sorgfältig ist der zweite Abschnitt bearbeitet. Alle jene interessanten Fälle discontinuirlicher Flüssigkeitsbewegung kommen zur Sprache, welche im Anschluss an Helmholtz' berühmte Abhandlung von Kirchhoff, Lord Rayleigh und anderen entwickelt sind, samt deren Anwendung auf praktische Fragen (Contractio venae, Druck von Flüssigkeitsstrahlen u. s. w.)

Mit einem Wort, wir haben es mit einer eingehenden tüchtigen Arbeit zu thun, die durch gleichzeitige Berücksichtigung der theoretischen und der experimentellen Seite der Aufgabe noch einen besonderen Wert erhält. F. K.

C. Razzaboni. Sul modo di dedurre le equazioni generali del moto del fluidi e le particolari relative al moto dei liquidi. Bologna Mem. (4) VIII. 17-40.

Der Herr Verfasser entwickelt zunächst zwischen dem Druck, den äusseren Kräften X, Y, Z und den Componenten der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{dp}{\varrho} = Xdx + Ydy + Zdz - (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z),$$

in welcher die Differentiale die Veränderungen bezeichnen, welche die betreffenden Grössen für ein und dasselbe Flüssigkeitsteilchen erfahren. Danach wird auf bekanntem Wege noch die Gleichung der Continuität entwickelt. Für die lineare Bewegung wird dann die Gleichung abgeleitet, welche ausdrückt, dass die Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Querschnitte verhalten:

$$(10) \qquad S'v' = Sv.$$

Ist die wirkende Kraft die Schwere, die Dichtigkeit gleich 1, so vereinfacht sich Gleichung (1) zu der bekannten Gleichung:

$$(11) \qquad dp = gdz - vdv,$$

welche Gleichung, um es noch einmal hervorzuheben, sich auf die Veränderungen bezieht, welche die Grössen p, z, v im Laufe der Zeit für dasselbe Flüssigkeitsteilchen erfahren. Bezeichnet man nun durch die Indices l und o zwei verschiedene Wertsysteme, welche denselben Flüssigkeitsteilchen in zwei verschiedenen Lagen zukommen, von denen die zweite um a tiefer ist, so würde man erhalten:

$$p_l - p_o + ga = \tfrac{1}{2}(v_o^2 - v_l^2) = \tfrac{1}{2}v_o^2\left(1 - \frac{S_o^2}{S_l^2}\right)$$

oder

$$(17) \qquad v_o = \sqrt{\frac{2(p_l - p_o + ga)}{\left(1 - \frac{S_o^2}{S_l^2}\right)}}$$

oder, wenn p_l und p_o statt des Druckes selbst die Druckhöhen bezeichnen,

$$v_o = \sqrt{\frac{2g(p_l - p_o + a)}{\left(1 - \frac{S_o^2}{S_l^2}\right)}}.$$

Man sieht, wesentlich Neues enthält die Abhandlung weder in ihren Resultaten noch in deren Herleitung. F. K.

H. Hugoniot. Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie). J. de math. (4) III. 477-494.

Der Verfasser verfolgt in dieser nachgelassenen, von Herrn

Léauté mitgeteilten Abhandlung wie in früher besprochenen Noten der C. R. das Ziel, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung zu finden, ohne die Integrale der Bewegungsgleichung wirklich aufzustellen. Er verfährt dabei in dem vorliegenden ersten Teil der Abhandlung folgendermassen:

Für eine Flüssigkeit sei eine Abhängigkeit zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit ϱ gegeben durch die Gleichung $\varrho = F(p)$. Dann hat man zur Bestimmung der Geschwindigkeitscomponenten u, v, w und des Druckes p die Euler'schen Gleichungen. Es seien u_1, v_1, w_1, p_1 und u_2, v_2, w_2, p_2 zwei Integrale dieser Gleichungen. Wenn nun in verschiedenen Teilen des von der Flüssigkeit erfüllten Gebietes eine diesen Integralen entsprechende Flüssigkeitsbewegung stattfinden soll, so muss für die jeweilige Grenzfläche der beiden Gebiete $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, $w_1 = w_2$, $p_1 = p_2$ werden, oder es muss in jedem Augenblick eine Fläche geben, für welche die Ausdrücke

$$U = u_1 - u_2, \quad V = v_1 - v_2, \quad W = w_1 - w_2, \quad P = p_1 - p_2$$

den Werth Null haben (ohne dass jedoch die partiellen Ableitungen nach x, y und z sämtlich verschwinden müssten). Für die Punkte der augenblicklichen Grenzfläche werden die Euler'schen Gleichungen sowohl durch die Functionen u_1, v_1, w_1, p_1 als auch durch u_2, v_2, w_2, p_2 befriedigt. Subtrahirt man nun zwei entsprechende derartige Gleichungen, und bezeichnet den gemeinschaftlichen Wert von u_1 und u_2 mit u, von v_1 und v_2 mit v und so fort, so erhält man folgende Gleichungen für die Ableitungen von P, U, V, W:

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - u\frac{\partial U}{\partial x} - v\frac{\partial U}{\partial y} - w\frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial t} - u\frac{\partial V}{\partial x} - v\frac{\partial V}{\partial y} - w\frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial t} - u\frac{\partial W}{\partial x} - v\frac{\partial W}{\partial y} - w\frac{\partial W}{\partial z}, \\ \frac{F'(p)}{F(p)}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Es seien nun ferner λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normale der Grenzfläche, deren Gleichung sowohl durch $U=0$, als auch durch $V=0$ oder $W=0$ oder $P=0$ dargestellt werden kann; dann gelten auch die Gleichungen

$$(10)\qquad \lambda:\mu:\nu=\frac{\partial U}{\partial x}:\frac{\partial U}{\partial y}:\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial x}:\frac{\partial V}{\partial y}:\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial W}{\partial x}:\frac{\partial W}{\partial y}:\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x}:\frac{\partial P}{\partial y}:\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Während des Zeitelementes dt ändert die Grenzfläche ihre Lage; es sei dn die Länge, um welche man von einem Punkte x, y, z der ursprünglichen Lage der Grenzfläche in der Richtung der Normale fortschreiten muss, um zu einem Punkte der neuen Grenzfläche zu gelangen, so ist eben so wie $U(t, x, y, z)$ auch

$$U(t+dt,\ x+\lambda dn,\ y+\mu dn,\ z+\nu dn)=0$$

oder

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{dn}{dt}\left(\lambda\dfrac{\partial U}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial U}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{dn}{dt}\left(\lambda\dfrac{\partial V}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial V}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{dn}{dt}\left(\lambda\dfrac{\partial W}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial W}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial t}+\dfrac{dn}{dt}\left(\lambda\dfrac{\partial P}{\partial x}+\mu\dfrac{\partial P}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)=0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen sechzehn in den Ableitungen der Grössen U, V, W, P linearen homogenen Gleichungen die letzteren, so erhält man die Gleichung:

$$F'(p)\left[\frac{dn}{dt}-(\lambda u+\mu v+\nu w)\right]^2=1$$

oder

$$\frac{dn}{dt}=\lambda u+\mu v+\nu w\pm\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}.$$

Statt dieser absoluten Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zweiten Bewegung gegen die erste betrachte man nun die relative gegen die Bewegung der betreffenden Flüssigkeitsteilchen $\frac{dn}{dt}-(\lambda u+\mu v+\nu w)$; diese ist demnach $\sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$. Der Verfasser

wendet diesen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf verschiedene Beispiele an. F. K.

G. Robin. Sur les explosions au sein des liquides.
C. R. CV. 61-64.

In einer Flüssigkeit von der Dichtigkeit μ sei eingetaucht oder schwimme ein fester Körper, dessen eingetauchte Oberfläche S sein möge. Eine Kugel σ von unendlich kleinem Radius R möge explodiren (éclater) mit einer Percussionsintensität (intensité de percussion) $\frac{\mu m}{R}$ für jeden Punkt von σ. Man verlangt die Bestimmung 1) der Geschwindigkeitscomponenten u, v, w, p, q, r, welche der Körper hierdurch erhält, und 2) des Geschwindigkeitspotentials Φ der Flüssigkeit. Φ kann in zwei Bestandteile zerlegt werden

$$\Phi = \varphi + \psi,$$

von denen ψ den Wert des Potentials bezeichnen soll, wenn der starre Körper in Ruhe bleibt, während

$$\varphi = \varphi_1 u + \varphi_2 v + \varphi_3 w + \varphi_4 p + \varphi_5 q + \varphi_6 r$$

ist. Die Grössen φ und ψ genügen der bekannten Potentialgleichung und leicht zu erkennenden Grenzbedingungen. Namentlich ist für die Grenzen des festen Körpers $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. Die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist dann:

$$T = -\frac{\mu}{2}\Big(\int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial N} dS + \int_\sigma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma\Big);$$

die lebendige Kraft des festen Körpers ist eine homogene quadratische Function T_1 von u, v, w, p, q, r. Setzt man zunächst u, v, w, p, q, r als bekannt voraus, so kann man Φ bestimmen. Die Grössen u, v, w, p, q, r sind dann durch die Bedingung bestimmt, dass

$$T + T_1 + \frac{\mu m}{R} \int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma$$

ein Minimum werde. Nun enthält auch T_1 einen in Bezug auf

die Grössen u, v, w, p, q, r quadratischen Bestandteil

$$-\frac{\mu}{2}\int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N} dS.$$

Zieht man diesen mit T zu dem Ausdruck $\mathfrak{T}$ zusammen, so kann man die lebendige Kraft schreiben

$$\mathfrak{T}-\frac{\mu}{2}\left(\frac{4\pi m^2}{R}-4\pi m Y_0-4\pi m\varphi+\int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} dS\right).$$

Hierin bedeutet Y_0 eine Grösse, welche durch Entwickelung von ψ in die Reihe

$$\frac{m}{R}+Y_0+Y_1 R+Y_2 R^2+\cdots$$

gewonnen wird. Ferner beziehe sich φ auf das Explosionscentrum. Endlich kann noch

$$-\int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N} dS=4\pi m\varphi$$

gesetzt werden, so dass man für den vorstehenden Ausdruck erhält

$$\mathfrak{T}-\frac{\mu}{2}\left(\frac{4\pi m^2}{R}-4\pi m Y_0-8\pi m\varphi\right).$$

Der zweite Bestandteil ist linear in Bezug auf die Grössen u, v, w, p, q, r. Man erhält demnach zur Bestimmung der sechs gesuchten Grössen die linearen Gleichungen:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}=-4\pi m\varphi_1,\quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v}=-4\pi m\varphi_2,\quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w}=-4\pi m\varphi_3,$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p}=-4\pi m\varphi_4,\quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q}=-4\pi m\varphi_5,\quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial r}=-4\pi m\varphi_6,$$

wo die rechts stehenden Ausdrücke diejenigen Werte bezeichnen, welche die betreffenden Functionen der Coordinaten im Explosionscentrum annehmen. F. K.

G. H. Darwin. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII (A). 379-429. (Plates 22, 23).

Der Verf. kommt auf einen seiner früheren Aufsätze zurück: „On the tidal friction of a planet“ etc. (Lond. Phil. Trans. 1881. 234), wo er die Bemerkung gemacht hat, es könnte ein Grund zur Annahme vorhanden sein, dass die früheste Form eines Trabanten nicht ringförmig gewesen sein dürfte. Die dort berührte Vorstellung war das Vorhandensein einer Gleichgewichtsfigur in der Gestalt von Hantelkugeln, wie in den Figuren am Ende der Schrift abgebildet ist. Diese Figuren waren bereits abgezogen, als Hrn. Poincaré's Abhandlung erschien: „Sur l'équilibre d'une masse fluide“ etc. (Acta Math. VII. 259-380, F. d. M. XVII. 1885. 864), worin unter anderem ein ähnlicher Schluss gezogen ist, und der Verf. hielt die vorliegende Arbeit zurück, um einen Nachtrag zuzufügen. Allein er äussert sich nun dahin, der Gegenstand der Gleichgewichtsgestalten rotirender Flüssigkeitsmassen sei in seiner Schrift aus einem Gesichtspunkte behandelt, der von dem Poincaré'schen so verschieden sei, dass trotz der Priorität des letzteren und der grösseren Vollständigkeit seiner Arbeit es sich der Mühe zu verlohnen scheine, die Abhandlung zu veröffentlichen. Obschon einfach in der Anlage, verlangt die Methode der Behandlung einen beträchtlichen Aufwand von Rechnung. Ein Auszug der hauptsächlichsten Schlüsse wird mit Ausschluss von Rechnungen in dem letzten Abschnitt gegeben. Cly. (Lp.)

O. Knoblauch. Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen, homogenen Ellipsoides, in welchem die Elementaranziehung der Entfernung direct proportional ist. Diss. Bonn. 62 S. 8°.

Ph. Lenard. Ueber die Schwingungen fallender Tropfen. Wiedemann Ann. XXX. 209-250.

Die Untersuchungen über die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten werden besonders schwierig durch zwei Umstände, nämlich erstens durch die Unbeständigkeit des Randwinkels und zweitens durch die Abnahme der Oberflächenspannung mit der Zeit.

Beide Umstände sind in der vom Verfasser befolgten Methode der Tropfenbeobachtung vermieden. Bringt man die Gleichung der Oberfläche des Tropfens auf die Form

$$r = \Sigma\, a_n P_n(\cos\theta),$$

so wird die potentielle Energie

$$P = 2\pi\alpha\, \Sigma\, \frac{(n-1)(n+2)}{2n+1}\, a_n^2$$

und die kinetische Energie

$$T = 2\pi\sigma a^3\, \Sigma\, \frac{1}{(2n+1)n}\left(\frac{da_n}{dt}\right)^2;$$

es bedeutet α die Oberflächenspannung, $\frac{4}{3}\pi a^3$ das Volumen des Tropfens, σ seine Dichte. Da in diesem Ausdruck nur die Quadrate, nicht aber die Producte zu zweien der Grössen a_n und $\frac{da_n}{dt}$ auftreten, so sind die einzelnen Schwingungen unabhängig von einander, und für jede einzelne gilt die Gleichung:

$$\frac{dP}{dt} + \frac{dT}{dt} = 0.$$

Die Schwingungsdauer für die n^{te} Schwingung ist dann

$$T_n = \sqrt{\frac{3\pi}{n(n-1)(n+2)}\,\frac{p}{g\alpha}},$$

wo p das Gewicht des Tropfens bedeutet.

Eingehender betrachtet werden die Schwingungen niedrigster Ordnung (2, 3, 4).

Im übrigen ist die Arbeit von rein physikalischem Interesse.

F. K.

L. Matthiessen. Ueber die Wanderung der Interferenzcurven zweier mikroskopischer Kreiswellensysteme auf der Oberflächenhaut von Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. XXXII. 626-642.

Werden durch zwei dissonirende Stimmgabeln auf der Oberfläche einer Flüssigkeit zwei Kreiswellensysteme mit den Wellenlängen λ und λ_1 und den Schwingungszeiten T und T_1 erzeugt,

so sind die partiellen Deviationen für ein Molekel mit den Abständen e und e_1 von den Erregungspunkten

$$y = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad y_1 = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{e_1}{\lambda_1}\right).$$

Die Gesamtdeviation ist also:

$$Y = y + y_1 = 2a\cos\pi\left(t\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1}\right) - \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1}\right)\right)$$
$$\times \cos\pi\left(t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right) - \left(\frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1}\right)\right).$$

Bezeichnen nun p und q ganze Zahlen, so sind die Interferenzcurven gegeben durch die Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad \frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} = \frac{2p+1}{2} + t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{2p+1}{2} + t(n-n_1),$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = \frac{2q+1}{2} + t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right) = \frac{2q+1}{2} + t(n+n_1).$$

Da die rechten Seiten dieser Gleichungen die Zeit enthalten, so sind diese Curven nicht fest, sondern sie wandern. Setzen wir $n > n_1$ voraus, so ist nach Verlauf der Zeit

$$t_1 = \frac{1}{n-n_1} \quad \text{resp.} \quad t_2 = \frac{1}{n+n_1}$$

die zu p resp. q gehörige Curve in diejenige übergegangen, welche vorher zu $p+1$ resp. $q+1$ gehörte. Die zweite Curvenart wandert also schneller als die erste.

Die Wellenberge und Wellenthäler sind die Schnittpunkte der beiden Curven

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(J)} & \frac{e}{\lambda} - \frac{e_1}{\lambda_1} = l + t(n-n_1) \\ \text{(K)} & \frac{e}{\lambda} + \frac{e_1}{\lambda_1} = m + t(n+n_1) \end{array}\right\} \quad (l \text{ und } m \text{ ganze Zahlen}).$$

Eliminiren wir die Zeit t, so erhalten wir die Bahn eines einzelnen Wellenberges oder -Thales:

$$\text{(D)} \qquad \frac{e}{c} - \frac{e_1}{c_1} = \frac{1}{2nn_1}\{l(n+n_1) - m(n-n_1)\},$$
$$(c = n\lambda, \quad c_1 = n\lambda_1).$$

Die Untersuchung wird nun fortgeführt unter der als Ergebnis des Experimentes anzusehenden Voraussetzung

$$n\lambda^2 = \text{const.} \quad (\text{also } n\lambda^2 = n_1 \lambda_1^2).$$

Es werden die Eigenschaften der einzelnen Curven, ihre gegenseitige Lage und die Fortschreitungsgeschwindigkeit einer Besprechung unterzogen. F. K.

E. Riecke. Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer incompressiblen Flüssigkeit in Ruhe sich befinden. Gött. Nachr. 505-515.

Im J. für Math. Bd. LXXI hatte Kirchhoff den bekannten Satz über die scheinbare Wechselwirkung unendlich dünner Ringe in einer Flüssigkeit abgeleitet. In der vorliegenden Abhandlung verallgemeinert der Verfasser die entwickelten Sätze, indem er sich von der Voraussetzung über die Dimension der Ringquerschnitte frei macht, wobei jedoch zu beachten ist, dass die Entwickelungen auf Querschnittsformen von gewissem Charakter beschränkt bleiben.

Der Herr Verfasser denkt sich ein System galvanischer Ströme i_1, i_2, ..., welche in den geschlossenen Curven s_1, s_2, ... circuliren. Dann sind die Flächen constanten elektromagnetischen Potentials solche Flächen, die sich von den Curven s_1, s_2, ... fächerförmig ausbreiten, und man hat eben so viele derartige Flächensysteme, als man Stromcurven hat. Sie werden gegen einander abgegrenzt durch bestimmte Flächen (Grenzflächen), welche sich selbst wieder aus Flächenstücken constanten Potentiales zusammensetzen.

Die Potentialflächen besitzen zwei Scharen von Krümmungslinien; die Linien der einen Schar sind geschlossen, die äussersten von ihnen verlaufen parallel den Stromlinien s_1, s_2, ..., und jede folgende umschliesst die vorhergehende vollständig. Diese Curven heissen Parallelcurven p. Zieht man jetzt durch alle Punkte einer Parallelcurve die Kraftlinien m, so gelangt man zu einem Ringe R, welcher eine Stromlinie umgiebt; zu demselben Ringe gelangt man auch, wenn man durch alle Punkte einer Kraftlinie die Parallelcurven zieht. Ist nun φ das elektromagnetische

Potential der oben erwähnten Ströme i_1, i_2, ..., so kann man sich die Ringe R_1, R_2, ... mit Strömen bedeckt denken, die in den Parallelcurven p mit der Intensität $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial m}$ circuliren. Dadurch erscheint der in der Axe s des Ringes circulirende Strom i ausgebreitet über die Oberfläche desselben; es ist nämlich:

1) die elektromagnetische Wirkung auf alle Punkte im Innern der Ringe gleich Null;

2) die elektromagnetische Wirkung auf alle Punkte ausserhalb der Ringe dieselbe, wie die der Ströme i_1, i_2, ..., welche in den Ringaxen s_1, s_2, ... circuliren.

Es wird dann weiter die elektrodynamische Wirkung berechnet, welche auf ein dem Oberflächenelement $dp\,dm$ entsprechendes Stück des Ringes ausgeübt wird; für dieselbe ergiebt sich der Wert:

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial m}\right)^2 dp\,dm;$$

man kann sie also betrachten als einen Druck von der Intensität

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial m}\right)^2.$$

Befindet sich nun eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit μ in der stationären Strömung vom Geschwindigkeitspotential φ, so ist der Druck an der Oberfläche eines Ringes gleich

$$-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial m}\right)^2.$$

Man erhält demnach den Satz:

Wenn eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}$ in der angegebenen Weise durch die Ringe hindurch in Circulation versetzt wird, so üben die letzteren eine scheinbare Wirkung auf einander aus, welche der elektrodynamischen Wechselwirkung der entsprechenden auf den Ringoberflächen ausgebreiteten galvanischen Strömen entgegengesetzt gleich ist. F. K.

Sir W. THOMSON. On the vortex theory of the luminiferous Aether. (On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid). Brit. Ass. Rep. 486-495.

Sir W. THOMSON. On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid. Phil. Mag. (5) XXIV. 342-353.

Die in dieser Abhandlung angenommene Bezeichnung erschwert die Anfertigung eines kurzen Berichts über ihren Inhalt, und der Referent begnügt sich mit der Anführung eines Teiles aus dem ersten Paragraphen, der den Zielpunkt des Verfassers anzeigen mag. „In dem Versuche, die ungestüme (turbulent) Wasserbewegung zwischen zwei festen Ebenen zu untersuchen, ... habe ich etwas gefunden, was dem Anscheine nach auf dem Wege zu einer innerhalb der letzten zwanzig Jahre oft versuchten Lösung der Aufgabe liegt, durch Mitteilung von Bewegung an eine nicht zusammendrückbare, nicht zähe Flüssigkeit ein Medium zu construiren, welches Wellen von schichtenförmiger Bewegung weiter befördert, wie der Lichtäther die Lichtwellen weiter befördert.“ Im Laufe der Untersuchung der Flüssigkeitsbewegung wird das Resultat erzielt, dass schichtenförmige Störung nach Art der Torsionswellen in einem homogenen elastischen Körper fortgepflanzt wird, und dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ungefähr 0,47 von der mittleren Geschwindigkeit der ungestümen Bewegung der Flüssigkeit ist. Gbs. (Lp).

C. CHREE. Vortices in a compressible fluid. Mess. (2) XVII. 105-118.

Der Aufsatz enthält verschiedene Anwendungen von den Gleichungen der Wirbelbewegung in zwei Dimensionen auf eine zusammendrückbare Flüssigkeit. Die Stabilität der Kreisgestalt in einem und in zwei geraden Wirbeln ist unter dem Titel „Linked vortice“ von Hrn. J. J. Thomson in seinem Werke „Motion of vortex rings“ betrachtet worden. Der Hauptzweck des Ver-

fassers ist die Ausdehnung der Thomson'schen Behandlungsweise auf eine zusammendrückbare Flüssigkeit. Glr. (Lp.)

C. CHREE. On vortices. Edinb. M. S. Proc. V. 52-59.

Betrachtet einige einfache Fälle von Wirbeln in einer zusammendrückbaren Flüssigkeit. Die Bewegung findet in zwei Dimensionen statt. Gbs. (Lp.)

Sir W. THOMSON. On the formation of coreless vortices by the motion of a solid thro' an inviscid incompressible fluid. Lond. R. S. Proc. XLII. 83-85.

Sir W. THOMSON. Ueber die Bildung kernloser Wirbel durch die Bewegung eines festen Körpers in einer reibungslosen, incompressibeln Flüssigkeit. Exner Rep. XXIII. 559-561.

Sir W. THOMSON. On the stability of steady and of periodic fluid motion. Phil. Mag. (5) XXIII. 459-464, 529-539; XXIV. 188-196, 272-278; Edinb. Proc. XIV. 359-368.

Die Flüssigkeit ist als unzusammendrückbar angenommen; doch wird festgestellt, dass die Ergebnisse allgemein auf die Bewegung natürlicher Flüssigkeiten und Gase anwendbar sind, falls die Geschwindigkeit im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit in der betrachteten Flüssigkeit überall klein ist. Die Flüssigkeit wird zuerst ohne Zähigkeit vorausgesetzt, da die mit dieser Annahme erhaltenen Ergebnisse bei einer folgenden Untersuc[illegible] der Wirkungen der Zähigkeit nützlich sind. Die Flüssigkei[illegible] nach Annahme vollständig von dem sie enthaltenden Gefäs[illegible] geschlossen; dasselbe kann entweder starr oder plastisc[illegible] so dass es zu jeder Gestalt geformt werden kann, oder [illegible] türlichem festem Material und daher zäh-elastisch. Der [illegible] der ersten Mitteilung, so weit dieselbe eine nicht zähe Fl[illegible] keit betrifft, ist der Beweis und die Erläuterung des Bewe[illegible] der drei folgenden Sätze bezüglich ein[illegible] [illegible]masse, [illegible]

mit irgend einer Rotation in jedem beliebigen ihrer Teile gegeben ist: 1) Die Energie der ganzen Bewegung kann ohne Ende vergrössert werden, indem man in einer gewissen systematischen Weise an dem enthaltenden Gefässe Arbeit leistet und es endlich zur Ruhe bringt. 2) Wenn das enthaltende Gefäss einfach zusammenhängend und aus natürlichem zäh-elastischem Stoffe ist, so kommt die gegebene in ihm sich bewegende Flüssigkeit von selbst zur Ruhe. 3) Wenn das enthaltende Gefäss mehrfach zusammenhängend und aus natürlichem zäh-elastischem Stoffe ist, so verliert die Flüssigkeit Energie, jedoch nicht etwa bis zu Null hin, sondern bis zu einem bestimmten Zustande rotationsloser Circulation mit einer bestimmten cyklischen Constanten für jeden vorhandenen Kreislauf. Die Bedingung für stetige Bewegung einer nicht zusammendrückbaren, nicht zähen Flüssigkeit, die einen endlichen gegebenen Teil des Raumes anfüllt, ist die, dass die Energie bei gegebener Wirbelbewegung ein absolutes Maximum oder ein absolutes Minimum oder ein „Minimaximum“ ist; und es wird bemerkt, dass die fernere Bedingung der Stabilität durch die Betrachtung der Energie allein gesichert ist für jeden Fall stetiger Bewegung, für welchen die Energie ein absolutes Maximum oder ein absolutes Minimum ist, aber nicht für jeden Fall stetiger Bewegung, bei welchem die Energie ein Minimaximum ist. Die Erörterung der grössten und kleinsten Energie in einer Wirbelbewegung bildet den Gegenstand der zweiten Mitteilung aus der Reihe und ist ein mit Verbesserungen und Nachträgen versehener Abdruck einer vor der Brit. Ass. 1880 (Brit. Ass. Rep. 1880. 743) gelesenen Abhandlung. Dieser Artikel schliesst mit der vollständigen Lösung oder der „praktischen Verwirklichung der Lösung“ folgender Aufgabe: „Bei gegebenem Momente des Moments und gegebener Wirbelbewegung in einer cylindrischen Büchse von gegebener Gestalt die Energie bei zweidimensionaler Bewegung zu einem absoluten Maximum zu machen“.

Der dritte Artikel aus der Reihe nimmt die „geradlinige Bewegung zäher Flüssigkeiten zwischen zwei parallelen Ebenen“ in Angriff. Wählt man OX in einer der begrenzenden Ebenen, OY senkrecht zu ihr, bezeichnet ferner die x-, y-, z-Componenten

der Geschwindigkeiten und den Druck in (x, y, z, t) bezw. mit $U+u$, v, w, p (wo U eine Function von y und t ist), setzt die Dichte gleich der Einheit und die Zähigkeit gleich μ, nimmt endlich die Schwere als einwirkende Kraft und den Neigungswinkel der Ebenen gegen den Horizont gleich I an, so sind die Gleichungen der Bewegung:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{D}{Dt}(U+u)=\mu\nabla^2(U+u)-\dfrac{\partial p}{\partial x}+g\sin I, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

wo

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

und

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ist $u=0$, $v=0$, $w=0$, $p=C-g\cos I.\, y$, so sind die vier Gleichungen identisch befriedigt, mit Ausnahme der ersten, welche auf

$$(3) \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

zurückkommt, wobei $U=v+\frac{1}{2}c(b^2-y^2)$, $c=g\sin I/\mu$, $b=$ Entfernung zwischen beiden Ebenen. Die Grenzbedingungen sind:

$$(4) \qquad v=F(t) \text{ für } y=0; \quad v=\mathfrak{F}(t) \text{ für } y=b.$$

Die Gleichungen (4) und (6) zeigen, dass die Verbreitung der Geschwindigkeit in parallelen Schichten, falls sie genau in parallelen Schichten stattfindet, dem Fourier'schen Gesetze „linearer" Wärmeleitung durch einen festen Körper folgt. Zur Ermittelung, ob die Schichtenbewegung in manchen Fällen inst[illegible] [illegible]erden u, v, w in (1) und (2) unendlich klein genomm[illegible] werden die Gleichungen (2):

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+[v+\frac{1}{2}c(b^2-y^2)]\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}-cy\right) \text{[illegible]} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+[v+\frac{1}{2}c(b^2-y^2)]\dfrac{\partial v}{\partial x} = \text{[illegible]} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+[v+\frac{1}{2}c(b^2-y^2)]\dfrac{\partial w}{\partial x} = \mu \text{[illegible]} \end{cases}$$

wo $p' = p + g \cos I . y$. Eliminirt man u und v durch Differentiation, so geben die Gleichungen (5)

$$2\left(\frac{\partial v}{\partial y} - cy\right)\frac{\partial v}{\partial x} = -\nabla^2 p',$$

und diese Gleichung liefert mit der zweiten von (5) zusammen eine Gleichung, welche unter Berücksichtigung geeigneter Anfangs- und Endbedingungen v und damit p, u, w bestimmt. Die einfacheren Gleichungsformen für $c = 0$, $F = a \cos \omega t$, $\mathfrak{F} = 0$ werden niedergeschrieben und befriedigt durch Annahme von $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $p = 0$. Die Frage der Stabilität ist: „Kommt jede mögliche Lösung dieser (einfacheren) Gleichungen in endlicher Zeit so weit?“ Der Verfasser hält dies für wahrscheinlich, geht aber nicht auf die Untersuchung ein. Der Fall wird noch in Erwägung gezogen, bei welchem die beiden begrenzenden Ebenen mit constanter relativer Geschwindigkeit in Bewegung erhalten werden, mit Einschluss des Unterfalles, bei welchem die beiden Ebenen in Ruhe gehalten werden und die Bewegung der Flüssigkeit zwischen ihnen durch die Schwere veranlasst wird. Es wird gezeigt, dass in dem Unterfalle die stetige Bewegung gänzlich stabil ist, wie klein oder gross auch die Zähigkeit sei, und zwar ohne Beschränkung auf die zweidimensionale Bewegung der zulässigen Störungen.

Der vierte Artikel der Reihe ist dem Thema der Wasserströmung auf einem geneigten ebenen Grunde unter einer festen parallelen ebenen Decke (z. B. Eis) gewidmet, wobei beide Ebenen als nach allen Richtungen unendlich und die Schwere als constant angenommen sind. Gbs. (Lp.)

Sir W. Thomson. On stationary waves in flowing water.

Phil. Mag. (5) XXII. 353, 445, 517; XXIII. 52-58.

Die Klasse der behandelten Themata schliesst die Wellengruppe ein, welche ein Schiff erzeugt, das durch ein ruhiges Wasser gleichförmig vorwärts getrieben wird. Man stelle sich Wasser vor, welches gleichförmig längs eines geraden Kanals mit senkrechten Seitenwänden fliesst, und nehme an, dass zwischen zwei Lagen

A und B kleine Unebenheiten sind, dass aber jenseit derselben der Boden eben ist. Ist a die Tiefe jenseit A, b die mittlere Tiefe jenseit B, f der Unterschied des Grundes bei A und B, so wird der An- oder Abstieg des Wasserspiegels durch die Gleichung gegeben:

$$y(=b-a-f)=\frac{fV^2/gD-(w+w')/gb}{1-V^2/gD},$$

wo $D^3=2a^2b^2/(a+b)$, $V=M/D$ (M ist das Wasservolumen, das in der Zeiteinheit hindurchläuft) und w, w' Grössen sind, die von der Wellenstörung abhängen. In grossen Entfernungen jenseit B ist unter der Voraussetzung, dass keine Kräuselung der Oberfläche dort stattfindet, $y=\frac{fV^2/gD}{1-V^2/gD}$. Ist daher $V^2<gD$, so steigt die obere Fläche des Wassers an, wenn der Boden fällt, und fällt, wenn der Boden steigt, und das Umgekehrte findet statt, wenn $V^2>gD$. Die ganze Horizontal-Componente des Flüssigkeitsdrucks gegen Unebenheiten im Boden wird danach aus der Betrachtung der bei der Erzeugung stationärer Wellen geleisteten Arbeit gefunden. Ist F die Summe der horizontalen Druckkräfte von den Unebenheiten auf die Flüssigkeit, U die mittlere horizontale Geschwindigkeit in einem Querschnitte von der Tiefe D, sind $\mathfrak{v}$, v die verticalen Componenten an der Oberfläche und an einem Punkte in der Tiefe y am Querschnitte, so ist:

$$F=\frac{\mathfrak{v}^4}{8}\,\frac{g-U^2D/D_0^2}{\{g-U^2(D+D_0)/2D_0^2\}^2}+\tfrac{1}{2}\int_0^D v^2dy.$$

Nimmt man $y=h\sin mx$ als die Gleichung der freien Oberfläche an Stellen, die fern von den Unebenheiten liegen, und setzt:

$$U^2=\frac{g}{m}\,\frac{e^{mD}-e^{-mD}}{e^{mD}+e^{-mD}},$$

so wird der Ausdruck für F:

$$F=\tfrac{1}{4}gh^2\left(1-\frac{4mD}{e^{2mD}-e^{-2mD}}\right),$$

vorausgesetzt, dass U^2 erheblich kleiner als $2gD_0^2/(D+D_0)$ ist.

Der soeben hingesetzte Wert von F liefert das Mittel zur Berechnung des Widerstandes gegen ein Boot von beliebigen

Abmessungen und Formen, wenn die Höhe der regelmässigen Wellen, welche ihm bei seinem Laufe im Kanal stetig folgen, bekannt ist. Die Berechnung von h in dem Werte für F bildet den Hauptteil des Restes der Abhandlung, der manche interessanten Reihen und Integrale enthält. Gbs. (Lp.)

Sir W. THOMSON. Stability of fluid motion. Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes. Edinb. Proc. XIV. 359-368.

Bericht oben S. 991 ff.

Sir W. THOMSON. On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium. Lond. R. S. Proc. XLII. 80-83.

Sir W. THOMSON. On the front and rear of a free procession of waves in deep water. Edinb. Proc. XIV. 38-46.

R. A. HERMANN. On the motion of two spheres in fluid and allied problems. Quart. J. XXII. 204-262.

R. A. HERMANN. On a problem in fluid motion. Quart. J. XXII. 370-384.

In den vorliegenden Abhandlungen bespricht der Herr Verfasser mehrere Aufgaben, welche mit der Bestimmung des Potentials zusammenhängen, wenn an den Oberflächen zweier Kugeln Grenzbedingungen zu erfüllen sind.

Es werden nach einander folgende Probleme der Hydrodynamik und Elektricitätslehre behandelt:

1) Bewegung einer Flüssigkeit, in der sich zwei Kugeln befinden, die in Richtung ihrer Centrale sich bewegen.

2) Bewegung der Flüssigkeit für den Fall, dass die Kugeln sich parallel und senkrecht zu der Centrale bewegen.

3) Das Geschwindigkeitspotential für Vibrationen der Oberfläche, sowohl für den Fall, dass die Mittelpunkte sich in Ruhe befinden, als auch für den Fall, dass sie sich bewegen.

4) Das Potential für zwei mit Elektricität geladene Kugeln.

5) Das magnetische Potential in einem Mittel, in welchem eine gleichmässige magnetisirende Kraft wirkt, und zwei kugelförmige Teile sich bezüglich der inductiven Capacität von dem Rest unterscheiden.

Die Methode ist für alle Aufgaben diejenige, dass die Lösung aus zwei Bestandteilen zusammengesetzt wird. Bei den hydrodynamischen Problemen wird z. B. das Potential so zerlegt, dass der eine Bestandteil dem Fall entspricht, dass nur eine Kugel beweglich, die andere in Ruhe ist, während dem zweiten Teile die Annahme zugehört, dass nur die zweite Kugel in Bewegung, die erste in Ruhe ist. Jeder einzelne Bestandteil wird durch successive Correctur, indem abwechselnd die eine oder die andere Kugel berücksichtigt wird, in eine Reihe verwandelt, ein Verfahren, das schon früher von anderen, wenn auch nur zur approximativen Berechnung angewendet wurde. Indem der Herr Verfasser ein Operationssymbol einführt, gelingt es ihm, das allgemeine Glied der gesuchten unendlichen Reihe wenigstens in symbolischer Form darzustellen. Nun lässt sich zwar dieser symbolische Ausdruck nicht für alle Probleme zu einer wirklichen Berechnung der einzelnen Glieder verwenden; beim ersten Problem erweist sich die Methode jedoch als brauchbar, und zwar wegen der nahen Beziehung der analytischen Operation zu derjenigen Abbildung durch Inversion bezüglich der beiden Kugeln, welche entsteht, indem erst das Bild J_1 des einen Kugelmittelpunktes A bezüglich der zweiten Kugel B, dann das Bild J_2 von J_1 bezüglich A, dann wieder das Bild J_3 von J_2 bezüglich B u. s. w. bestimmt wird. Nennt man α und β die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2-(c^2-a^2-b^2)x+ab,$$

(a, b die Kugelradien, c die Centrale), so erhält man für die kinetische Energie die Formel:

$$P = \pi\varrho a^3 u_1^2\left[\tfrac{1}{3}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{(\alpha-\beta)(ab)^n}{a^3(\alpha^n-\beta^n)+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right\}^2\right]$$
$$+\pi\varrho b^3 u_2^2\left[\tfrac{1}{3}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{(\alpha-\beta)(ab)^n}{b^3(\alpha^n-\beta^n)+\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}\right\}^2\right]$$
$$+2\pi\varrho u_1 u_2\left(\frac{ab}{c}\right)^3\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{(\alpha-\beta)(ab)^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n}\right\}^2.$$

Die zweite Aufgabe lässt sich nicht völlig durchführen; daher berechnet der Herr Verfasser die kinetische Energie nur bis auf Glieder von der Ordnung $\left(\frac{a}{c}\right)^{15}$.

Die Aufgaben aus der Elektricitätslehre unterscheiden sich bezüglich der Methode nicht von den besprochenen hydrodynamischen Aufgaben.

Schneiden sich die beiden fraglichen Kugeln unter einem Winkel, der ein rationaler Bruchteil von $2R$ ist, so ist die Anzahl der Bilder eine endliche, und die unendlichen Reihen, welche beim ersten Problem auftreten, verwandeln sich in endliche Reihen. Es lässt sich also für die Bewegung eines der getroffenen Voraussetzung entsprechenden Körpers in Richtung seiner Axe ein geschlossener Ausdruck des Geschwindigkeitspotentiales finden. F. K.

A. B. Basset. On the motion of two spheres in a liquid and allied problems. Lond. M. S. Proc. XVIII. 369-377.

Der Herr Verfasser entwickelt für den Fall, dass sich zwei Kugeln in einer Flüssigkeit parallel und senkrecht zu ihrer Centrale mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bewegen, das Geschwindigkeitspotential durch Reihenentwicklungen. Dies führt ihn zu Werten für die Coefficienten der Energie

$$2T = A'v_1^2+2B'v_1v_2+C'v_2^2,$$
$$A' = m_1+\tfrac{1}{2}M_1\left[1+\frac{3a^3b^3}{c^6}\left\{\tfrac{1}{4}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{9b^4}{4c^4}+\frac{b^2(a^2+64b^2)}{16c^6}\right\}\right],$$
$$C' = m_2+\tfrac{1}{2}M_2\left[1+\frac{3a^3b^3}{c^6}\left\{\tfrac{1}{4}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{9a^4}{4c^4}+\frac{a^2(b^2+64a^2)}{16c^6}\right\}\right],$$
$$B' = \frac{\pi\varrho a^3b^3}{c^3}\left\{1+\frac{a^3b^3}{4c^6}+\frac{a^3b^3(a^2+b^2)}{c^8}\right\}.$$

Hierin bedeuten m_1, m_2 die Massen, a, b die Radien der Kugeln, c ihre Centrale, ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, M_1, M_2 die verdrängten Massen.

Für die Bewegung in der Centrale hatte Hr. Hicks früher gefunden

$$2T = Au_1^2 - 2Bu_1u_2 + Cu_2^2,$$

$$A = m_1 + \tfrac{1}{2}M_1\left\{1 + \frac{3a^3b^3}{c^6}\left(1 + \frac{3b^2}{c^2} + \frac{6b^4}{c^4} + \frac{11b^6}{c^6}\right)\right\},$$

$$B = \frac{2\pi\varrho a^3b^3}{c^3}\left(1 + \frac{a^3b^3}{c^6} + \frac{3a^2b^2(a^2+b^2)}{c^8}\right).$$

Wird jetzt

$$a = b, \quad u_1 = -u_2, \quad v_1 = v_2,$$

so ist an der Mittelebene offenbar die Flüssigkeit in Ruhe, und die lebendige Kraft ist bestimmt durch

$$2T = (A+B)u_1^2 + (A'+B')v_1^2.$$

Es ist klar, dass für den Fall einer festen Wand und einer bewegten Kugel die lebendige Kraft halb so gross ist. Im Anschluss an diesen Ausdruck erörtert Hr. Basset die abstossende oder anziehende Wirkung der Wand auf die Bewegung der Kugel.

Den Schluss bildet die Bestimmung des Potentials zweier elektrischen Kugeln im elektrischen Felde. F. K.

A. B. BASSET. On the motion of a sphere in a viscous liquid. Lond. R. S. Proc. XLIII. 174-175.

Auszug aus einer Arbeit, die in den Lond. Phil. Trans. 1888 erschienen ist. Cly.

E. SUNDBERG. Rotationskroppars Hydrodynamik. Diss. Upsala.

Im ersten Teil der Abhandlung giebt der Verfasser eine einfache Darstellung der Bewegungsgleichungen eines festen mehrfach zusammenhängenden Körpers in einer unbegrenzten Flüssig-

keit ohne Anwendung des Hamilton'schen Princips. Im zweiten Teil untersucht er die Bedingungen, damit die Gleichung, die das Geschwindigkeitspotential eines Rotationskörpers erfüllen muss, nach Einführung der orthogonalen Coordinaten u, v, θ (θ ist der Winkel zwischen zwei Meridianschnitten), wo $u = u_0$ die Gleichung der Rotationsfläche ist, ein Integral von der Form

$$\frac{1}{\varrho} \cdot P(u) \cdot Q(v) \cdot R(\theta)$$

haben muss. (ϱ ist der Abstand des Punktes (x, y, z) von der Rotationsaxe.) Es ergiebt sich, dass der Meridianschnitt eine besondere Form haben muss, und dass dann die Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \{k^2(n-\tfrac{1}{4})\mathrm{sn}^2x + h\} y$$

zurückgeführt werden kann. Particuläre Integrale werden für

$$n = 0, \quad k < 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{sn}^2x \leqq 1$$

dargestellt. Als Beispiel wird zuletzt das eindeutige Geschwindigkeitspotential eines kreisförmigen Ringes ausgewertet. K.

F. Kötter. Ueber eine Verallgemeinerung eines hydrodynamischen Theorems von Lejeune Dirichlet. Berl. phys. Ges. Verh. VI. 93-97.

Die Oberfläche eines festen Körpers, der sich in einer Flüssigkeit bewegt, habe in Bezug auf zwei sich rechtwinklig schneidende Axen den hydrodynamischen Charakter einer Rotationsfläche, d. h. durch jede dieser Axen sollen sich mindestens zwei Paare senkrecht auf einander stehender Symmetrie-Ebenen legen lassen. Von einem derartig begrenzten Körper wird gesagt, „seine Gestalt habe den hydrodynamischen Charakter der Kugel“. Ueber einen solchen Körper wird ausser einem anderen Theoreme zuletzt das folgende bewiesen: „In einer schweren und incompressibeln, reibungslosen Flüssigkeit bewegt sich der Schwerpunkt einer gegebenen festen Masse M, deren Begrenzung den hydrodynamischen Charakter der Kugel hat, und der von ihr mitgeführten Masse M' in einer Parabel mit einer vertical ab-

wärts gerichteten Beschleunigung $g(M-M'')/(M+M')$, wenn M'' die Masse der von dem Körper verdrängten Flüssigkeit bezeichnet; um diesen Punkt rotirt der feste Körper so, wie im leeren Raume ein gewisser schwerer Körper um einen von seinem Schwerpunkte verschiedenen befestigten Punkt". Lp.

G. H. Halphen. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. C. R. CIV. 807-811.

Drückt man nach Clebsch die lebendige Kraft eines von einem festen Körper und einer umgebenden Flüssigkeit gebildeten Systems, statt durch die Geschwindigkeitscomponenten U, V, W, P, Q, R des festen Körpers, durch die Grössen

$$x_1=\frac{\partial T}{\partial U},\quad x_2=\frac{\partial T}{\partial V},\quad x_3=\frac{\partial T}{\partial W},$$
$$y_1=\frac{\partial T}{\partial P},\quad y_2=\frac{\partial T}{\partial Q},\quad y_3=\frac{\partial T}{\partial R}$$

aus, so wird T eine quadratische Function dieser sechs Grössen. In der vorliegenden Note handelt es sich um einen integrablen Fall des Problems, in welchem die lebendige Kraft durch passende Wahl der Axen auf

$$T=\tfrac{1}{2}p(x_1^2+x_2^2)+\tfrac{1}{2}p'x_3^2+q(x_1y_1+x_2y_2)+q'x_3y_3$$
$$+\tfrac{1}{2}r(y_1^2+y_2^2)+\tfrac{1}{2}r'y_3^2$$

gebracht werden kann. Der Verfasser teilt ohne Beweis das Theorem mit, dass man die Bewegung des Körpers zerlegen kann in eine gleichmässige Schraubenbewegung um eine feste Axe im Raum, eine gleichmässige Drehung um eine in dem Körper feste Axe und in eine periodische Bewegung.

Ferner teilt der Verfasser ebenfalls ohne Beweis ein Gesetz mit, nach welchem die Rotation des Körpers in einer Flüssigkeit, ähnlich wie die eines schweren Körpers im leeren Raum, zerlegt werden kann, nämlich in zwei sogenannte Poinsot'sche Bewegungen und in eine Rotation um eine in dem Körper feste Axe. Bezüglich der genaueren Fassung des Gesetzes muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. F. K.

Couette. Oscillations tournantes d'un solide de révolution en contact avec un fluide visqueux. C. R. CV. 1064-1067.

In einer reibenden Flüssigkeit werde ein fester Körper durch ein Drehungsmoment $A\lambda$ bewegt, welches proportional seiner Elongation λ ist. Der Einfluss der Flüssigkeit zeigt sich in einer scheinbaren Vermehrung des Trägheitsmomentes J um die Grösse C und in einem Widerstande proportional der Winkelgeschwindigkeit gleich $B\frac{d\lambda}{dt}$. Die Elongation des festen Körpers ist als Function der Zeit gegeben durch die Gleichung:

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\mu t}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T}+\frac{\mu T}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right).$$

Sind x, y Functionen der Coordinaten r, z eines Flüssigkeitsteilchens, welche zwei partiellen Differentialgleichungen genügen, an der Oberfläche des festen Körpers den Wert Null haben und im Unendlichen unendlich klein werden, so wird die Elongation des fraglichen Flüssigkeitsteilchens durch die Gleichung

$$\psi = \lambda_0 e^{-x}\, e^{-\mu(t-y)}\left(\cos\frac{2\pi}{T}(t-y)+\frac{\mu T}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{T}(t-y)\right)$$

bestimmt. Zwischen A, B, C, μ und T bestehen zunächst die Gleichungen:

$$(2)\qquad B = 2(J+C)\mu,.$$

$$(3)\qquad A = (J+C)\left(\frac{4\pi^2}{T^2}+\mu^2\right).$$

Ferner hat man für B und C die über den halben Meridian zu erstreckenden Integrale

$$B = 2\pi\varepsilon\int r_0^2\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_0 ds,\quad C = 2\pi\varepsilon\int r_0^2\left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)_0 ds,$$

(ε Coefficient der innern Reibung.)

Bezeichnet man mit m' und n' Constanten aus den Gleichungen

$$(13) \qquad m'^2 - m' = \left(\frac{4\pi^2}{T^2} + \mu^2\right)n'^2,$$

$$(14) \qquad 2m'n' - n' - \frac{\varrho}{\varepsilon} = 2\mu n'^2,$$

mit R den Krümmungsradius des Meridians und mit S das Integral

$$S = \int \left(\frac{1}{R} + \frac{3\cos(nr)}{r_0}\right) r_0^2 \, ds,$$

so kann man auch schreiben

$$(15) \qquad B = 2\pi S \varepsilon m',$$

$$(16) \qquad C = 2\pi S \varepsilon n'.$$

Zwischen den neun Grössen J, A, B, C, μ, T, m', n', ε bestehen also sechs Gleichungen; kennt man drei von diesen Grössen, so kann man die sechs übrigen berechnen. F. K.

H. J. Sharpe. Motion of compound bodies through liquids. Quart. J. XXII. 262-268.

Der Aufsatz bezieht sich auf Flüssigkeitsbewegung in einem Gebiet von zwei Dimensionen, in welchem die festen Grenzen durch eine Linie gebildet werden, die aus verschiedenen Bestandteilen zusammengesetzt ist, z. B. einem Halbkreise und einer anderen Linie, und ähnliche Aufgaben für ein Gebiet von drei Dimensionen. Um einen Begriff von der Art der hier behandelten Aufgaben zu geben, wollen wir das schon angeführte Beispiel in Kürze wiederholen. Für eine Bewegung in einem Gebiet von zwei Dimensionen ist das Geschwindigkeitspotential der reelle Teil einer Function von $z = x + iy = re^{i\theta}$, deren imaginärer Teil, constant gesetzt, die Gleichung der Stromlinien liefert. Bei passender Wahl dieser Function des complexen Argumentes geht ihr imaginärer Bestandteil über in:

$$\theta - \frac{\pi}{2}\frac{r}{a}\sin\theta + \frac{2}{1.2.3}\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta - \frac{2}{3.4.5}\frac{a^4}{r^4}\sin 4\theta + \frac{2}{5.6.7}\frac{a^6}{r^6}\sin 6\theta \mp \ldots$$

Setzen wir hierin $r = a$, so verschwindet dieser Ausdruck für jeden Wert θ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$; und also kann bei der bezeichneten Wahl der durch diese Grenzen bestimmte Halbkreis als Strömungslinie betrachtet und durch eine feste Grenze ersetzt werden. Zu derselben Strömungslinie gehören dann andere Bestandteile, gegeben durch die Gleichung

$$\theta - \frac{\pi}{2}\frac{r}{a}\sin\theta + \frac{2}{1.2.3}\frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta - \frac{2}{3.4.5}\frac{a^4}{r^4}\sin 4\theta \pm \cdots = 0.$$

Im Punkte $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ berührt die Linie den vorerwähnten Halbkreis und hat dort a zum Krümmungsradius. Für $\theta = \pm\pi$ wird r unendlich, und zwar derart, dass $r\sin\theta = \pm 2a$ wird. Die Parallelen zur Halbirungslinie des Halbkreises, welche von letzterer die Abstände $\pm 2a$ haben, berühren also die fragliche Linie asymptotisch. Damit ist für den besprochenen Fall gewonnen, was der Herr Verfasser einen „compound body“ nennt. Im Unendlichen strömt dabei die Flüssigkeit senkrecht zum Durchmesser des Halbkreises gegen die convexe Seite des letzteren. Statt dessen kann natürlich auch angenommen werden, dass die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, und der construirte Körper sich bewegt. Aehnlich behandelt wird der Fall, dass an Stelle des Halbkreises eine halbe Ellipse tritt. Endlich wird noch der entsprechende Fall in einem Gebiet von drei Dimensionen erörtert, wo an Stelle des Halbkreises natürlich eine Halbkugel tritt. F. K.

F. Kötter. Ueber die contractio venae bei spaltförmigen und kreisförmigen Oeffnungen. Hoppe Arch. (2) V. 392-417.

Der Verfasser kritisirt zunächst die früheren Versuche, den sogenannten Ausflusscoefficienten theoretisch zu ermitteln. Er bespricht nach einander die Arbeiten von Bidone (Mem. di Torino XXXIV. 1830), Bayer (Crelle, Journal der Baukunst XXV. 1847), Navier (Leçons lithographiées de l'École des ponts et chaussées, 1829), sowie von Boussinesq (C. R. LXX., cf. F. d. M. II. 1869–1870. 738) und erörtert, weshalb die Resultate der zuerst genannten drei Arbeiten, die sich sämtlich auf specielle

Hypothesen über die Natur der Flüssigkeitsbewegung in der Nähe der Oeffnung stützen, unhaltbar sind, während das Urteil über die Arbeit von Boussinesq dahin ausfällt, dass ihr Ergebnis die Herstellung mehr oder minder brauchbarer Interpolationsformeln für die locale Ausflussgeschwindigkeit sei, dass damit aber nicht der Ausflusscoefficient theoretisch bestimmt werde.

Während diese Versuche als misslungen zu betrachten sind, ergiebt sich eine befriedigende Ableitung des in Rede stehenden Coefficienten für einen speciellen Fall aus der Helmholtz-Kirchhoff'schen Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die Bedingungen, von welchen das Geschwindigkeitspotential einer schweren, durch eine sehr schmale spaltförmige Oeffnung im Boden eines Gefässes ausfliessende Flüssigkeit abhängt, in der Nähe der Oeffnung identisch sind mit den Bedingungen, welche in einem von Kirchhoff (Mechanik, Vorl. 22, § 3) behandelten Beispiele die stationäre Bewegung einer Flüssigkeit, auf die keine Kräfte wirken, in einem Raum von zwei Dimensionen bestimmen. Herr Kötter reproducirt das erwähnte Kirchhoff'sche Problem in modificirter Darstellung und findet daraus für den Ausflusscoefficienten einer spaltförmigen Oeffnung den Wert

$$\frac{\pi}{2+\pi} = 0,\ 611\ \ldots,$$

ein Resultat, das, wie auch erwähnt wird, zuerst Lord Rayleigh (Philosoph. Mag. (5) II. 1876) aus den Kirchhoff'schen Formeln abgeleitet hat.

Zum Schluss ermittelt Herr Kötter für sehr kleine kreisförmige Oeffnungen eine obere und untere Grenze, zwischen denen der Ausflusscoefficient liegt. Zu dem Zwecke stellt er die Gleichung auf, welche ausdrückt, dass die Resultante der äusseren Kräfte, die auf einen gewissen an der Oeffnung liegenden Teil der Flüssigkeit während der Zeit dt wirken, gleich ist dem während derselben Zeit erfolgenden Zuwachs des Bewegungsmomentes. Er vereinfacht ferner die Gleichung durch Vernachlässigung von Gliedern, die sehr klein gegen die Grösse der Oeffnung sind. Auf der rechten Seite der so vereinfachten Gleichung steht

das Glied (a) $\frac{1}{2}s\int d\omega \,.\, V^2$,

worin s die Dichtigkeit, $d\omega$ ein Element der die Oeffnung umgebenden festen Wand, V die Geschwindigkeit an der Stelle $d\omega$ bedeutet. Lässt man dies Glied fort, so ergiebt die in Rede stehende Gleichung unmittelbar, dass der Ausflusscoefficient α grösser als $\frac{1}{2}$ ist. Behält man das Integral (a) bei und ersetzt darin V durch einen kleineren Wert, der sich aus dem Boussinesq'schen Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential einer durch eine kreisförmige Oeffnung ausfliessenden Flüssigkeit ergiebt, so folgt:

$$\alpha > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\alpha^2, \quad \text{d. h.} \quad \alpha > 0,536.$$

Durch Entwickelung von V nach fallenden Potenzen des Abstands vom Mittelpunkte der Oeffnung ergiebt sich andrerseits eine obere Grenze

$$\alpha < 0,71.$$

Die dabei benutzte Entwickelung von V folgt ebenfalls aus der Formel von Boussinesq. Wn.

F. Kötter. Ueber die theoretische Bestimmung des Ausflusscoefficienten für spaltförmige Oeffnungen. Berl. phys Ges. Verh VI. 40-43.

Lord Rayleigh hat den Coefficienten für die contractio venae $\frac{\pi}{\pi+2}$ ohne Beweis von dem Falle spaltförmiger Oeffnungen bei einer ohne Einwirkung äusserer Kräfte zu Stande kommenden Flüssigkeitsbewegung auf den durch die Schwere hervorgerufenen Ausfluss der Flüssigkeit aus Gefässen übertragen. Der in Lord Rayleigh's Abhandlung (Phil. Mag. (5) II. 444—447, 1876) fehlende Beweis wird hier geführt und auf solche Oeffnungen ausgedehnt, welche von zwei parallelen krummen Linien begrenzt sind. (Vgl. d. Ref. S. 1004.) Lp.

J. Boussinesq. Sur la théorie de l'écoulement par un déversoir en mince paroi, quand il n'y a pas de contraction et que la nappe déversante est libre en dessous. C. R. CV. 17-22.

J. Boussinesq. Sur la théorie des déversoirs en mince paroi et à nappe soit déprimée, soit soulevée, c'est-à-dire soumise inférieurement à une pression constante plus petite ou plus grande que celle de l'atmosphère exercée au-dessus. C. R. CV. 585-590.

J. Boussinesq. Sur la théorie des déversoirs épais, ayant leur seuil horizontal et évasé ou non à son entrée. C. R. CV. 632-638.

J. Boussinesq. Sur une forme de déversoir en mince paroi, analogue à l'ajutage rentrant de Borda, pour laquelle le relèvement de la face inférieure de la nappe liquide, à la sortie du déversoir, peut être déterminé théoriquement. C. R. CV. 697-702.

In den vorliegenden Noten behandelt der rühmlichst bekannte französische Gelehrte die durch den Titel vorläufig genügend gekennzeichneten Probleme der hydraulischen Praxis in einer äusserst interessanten Weise, welche gewiss in praktischer Hinsicht befriedigend genug ist, wenn sie auch für denjenigen, der die Hydrodynamik vom rein wissenschaftlichen Standpunkt betrachtet, nicht unbedenklich erscheint. Denn der Herr Verfasser bedient sich bei seiner Untersuchung gewisser, zwar recht plausibler, aber doch nicht streng erwiesener Voraussetzungen, was bei der Dringlichkeit der praktischen Anforderungen und der Ohnmacht der strengen wissenschaftlichen Hydrodynamik gegenüber diesen Forderungen zulässig erscheint, aber doch andererseits den wissenschaftlichen Wert der gewonnenen Resultate herabdrückt.

Es wird zunächst für das Problem (den Abfluss des Wassers durch eine Oeffnung in dünner Wand) die Bernoulli'sche Gleichung

$$(1) \quad \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varrho \cdot g} + z = h$$

[in] welcher ϱ die Dichtigkeit bezeichnet, g die Gravita[tion, z] den Abstand eines Flüssigkeitsteilchen von dem [...] V die Geschwindigkeit dieses Teilchens, p den

zugehörigen Druck und endlich h die Tiefe des Wassers in solcher hinreichenden Entfernung, dass man die Geschwindigkeit an dieser Stelle vernachlässigen kann.

Den weiteren Voraussetzungen wird jetzt die Annahme zu Grunde gelegt, dass in dem contrahirten Querschnitt, welcher vertical angenommen wird, die einzelnen Stromlinien einen gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt haben. Es wird dies gerechtfertigt durch den Hinweis auf die von oben nach unten zunehmende Krümmung der einzelnen Stromlinien. Ist die Erhebung der untersten Stromlinie über den Boden gleich ε, ihr Krümmungsradius gleich R_0, so ist der Krümmungsradius eine beliebige Stromlinie

$$R = R_0 + z - \varepsilon.$$

Für die Beschleunigung in Richtung der z-Axe erhält man den Wert

$$-\frac{V^2}{R},$$

und es gilt also die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g + \frac{V^2}{R_0 + z - \varepsilon},$$

woraus in Combination mit (1) folgt

$$V(R_0 + z - \varepsilon) = \text{const.}$$

Für die untere Grenzfläche sowohl, als für die obere, für welche $z = \varepsilon + \eta$ ist (η Dicke des contrahirten Strahles), ist nun der Druck gleich Null und also die Geschwindigkeit gleich

$$\sqrt{2g(h-\varepsilon)} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{2g(h-\varepsilon-\eta)},$$

sodass man erhält

$$\frac{\sqrt{h-\varepsilon-\eta}}{\sqrt{h-\varepsilon}} = \frac{R_0}{R_0+\eta} \quad \text{oder} \quad R_0 = \frac{\eta\sqrt{h-\varepsilon-\eta}}{\sqrt{h-\varepsilon}-\sqrt{h-\varepsilon-\eta}},$$

oder, wenn

$$(6) \qquad \eta = (1-k^2)(h-\varepsilon)$$

gesetzt wird,

$$\ldots = (k+k^2)(h-\varepsilon).$$

Für einen beliebigen Wert z ergiebt sich die Geschwindigkeit

$$(4)\quad \dot{V} = \sqrt{2g(h-\varepsilon)}\frac{R_0}{R_0+z-\varepsilon}.$$

Setzt man diesen Wert in (2) ein, so kann man leicht die Stelle bestimmen, für welche p ein Maximum wird. Für diese ist nämlich

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0;$$

man erhält demnach für das z dieser Stelle die Gleichung

$$(8^a)\quad z-\varepsilon = 2\left[\left(\frac{k+k^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{k+k^2}{2}\right](h-\varepsilon)$$

und für den Maximalwert von p selbst:

$$(8^b)\quad p = \left[1-3\left(\frac{k+k^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}+2\left(\frac{k+k^2}{2}\right)\right](h-\varepsilon)\varrho g.$$

Um nun den unbekannten Wert k zu bestimmen, bedient sich Herr Boussinesq eines Princips, welches Belanger zuerst ausgesprochen und angewandt hat, nämlich der Annahme, dass die Ausflussmenge so gross als möglich sein müsse. Diese Ausflussmenge ergiebt sich pro Längeneinheit der Oeffnung durch

$$q = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} V dz = \sqrt{2g(h-\varepsilon)}R_0\log\left(\frac{R_0+\eta}{R_0}\right),$$

$$q = \sqrt{2g(h-\varepsilon)^3}(k+k^2)\log\frac{1}{k}.$$

Demgemäss wird für k die Wurzel der Gleichung

$$\frac{\partial q}{\partial k} = 0$$

oder, was dasselbe besagt, die Wurzel der Gleichung

$$\log\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1+k}{1+2k}$$

gesetzt, deren numerischer Wert 0,46854 ist. Unter Benutzung dieses Wertes erhält man

$$\eta = 0{,}7805(h-\varepsilon),$$
$$R_0 = 0{,}6881(h-\varepsilon),$$
$$q = 0{,}5216\sqrt{2g}(h-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

Will man die Ausflussmenge in Dubuat'scher Form darstellen, d. h. durch die Gleichung

$$q = mh\sqrt{2gh},$$

so erhält man für den Druckcoefficienten den Wert

$$m = 0{,}5216\left(1 - \frac{\varepsilon}{h}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{h}$ ist experimentell zu bestimmen.

In der letzten Note entwickelt der Verfasser einen theoretischen Wert für $\frac{\varepsilon}{h}$ und zwar auf folgendem Wege. Die Bewegungsgrösse der Flüssigkeitsmenge, welche in dem Zeitelement dt durch den contrahirten Querschnitt geht, ist

$$\varrho dt \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} V^2 dz.$$

In horizontaler Richtung wirken auf diese flüssige Masse der Druck in dem contrahirten Querschnitt

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} p dz$$

und der Druck in dem Querschnitt von der Höhe h, d. h. der Druck $\frac{1}{2} g\varrho h^2$, so dass man eigentlich die Gleichung hätte

$$\varrho \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} V^2 dz = \tfrac{1}{2}\varrho g h^2 - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} p dz.$$

Um dem Einfluss der äusseren Reibung Rechnung zu tragen, welche in unserem Falle günstig auf die Bewegungsgrösse wirken soll, fügt der Herr Verfasser rechts ein Correctionsglied in der Form $\varrho g h^2 f$ hinzu, wo f ein sehr kleiner echter Bruch ist, so dass die Gleichung lautet:

$$\varrho \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} V^2 dz = \tfrac{1}{2}\varrho g h^2 (1+2f) - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\eta} p dz.$$

Unter Benutzung der verschiedenen Gleichungen der ersten Abhandlung erhält der Herr Verfasser hieraus die Gleichung

$$h^2(1+2f) = (h-\varepsilon)^2(1-k)(1+k)^3,$$

woraus dann mit Benutzung des ermittelten Wertes von k folgt

$$\frac{\varepsilon}{h} = 0{,}2292 - 0{,}77 f.$$

Der zweite Teil, meint der Herr Verfasser, könne kaum bis zum Werte 0,01 anwachsen, und er glaubt daher setzen zu dürfen

$$\frac{\varepsilon}{h} = 0{,}22.$$

Diese Angaben werden genügen, um ein Bild des von dem Herrn Verfasser eingeschlagenen Weges zu liefern; es wird daher zur Kennzeichnung des Inhalts der zweiten und dritten Abhandlung hinreichen, wenn wir angeben, dass dort der Fall behandelt wird, in welchem die obere und die untere Seite des Strahles ungleichen Druck erleiden. In einer Anmerkung zur vierten Abhandlung wird dann auch für diese Fälle $\frac{\varepsilon}{h}$ berechnet.

F. K.

E. Kobald. Ueber ein neues Ausflussproblem. Wien. Ber. XCVI. 592-603.

Der Herr Verfasser betrachtet den Ausfluss einer zähen Flüssigkeit durch eine seitliche Mündung, welche begrenzt wird von zwei parallelen verticalen Glaswänden, die eben so hoch sind als das Gefäss selbst. Unten seien die beiden Platten wasserdicht verkittet. Die Bewegung der Flüssigkeit durch diesen Ausflussapparat wird unter Zugrundelegung der Kirchhoff'schen Formeln und Entwickelungen behandelt und zwar unter der Voraussetzung, dass der Boden des Gefässes eben ist, dass ferner die Flüssigkeit in die Mündung parallel den Schnittlinien der begrenzenden Glaswände und des Gefässbodens eintritt. Bedient man sich eines Coordinatensystems, dessen (yz)-Ebene mit der einen der begrenzenden Glaswände, dessen (xz)-Ebene mit der Eintrittsebene der Mündung zusammenfällt, so wird von den drei Geschwindigkeitscomponenten die eine $u = 0$; die beiden anderen lassen sich setzen

$$v = X\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = X\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

wo φ von y und z derart abhängt, dass

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

ist, wo ferner X eine Function von x ist, derart dass

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \text{Const.}$$

ist. Bezeichnet man mit λ den oberflächlichen Gleitungsmodul, so erhält man als Grenzbedingungen für die beiden Glaswände

$$k\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda v, \qquad k\frac{\partial w}{\partial x} = \lambda w,$$

welche sich auf die eine Bedingung $k\frac{dX}{dx} = \lambda X$ reduciren, und schliesslich ergiebt sich, wenn b der Abstand der beiden Glasplatten ist, der folgende Ausdruck:

$$X = c\left\{x^2 + \left(\frac{2k}{\lambda} - b\right)x + \frac{k}{\lambda}\left(\frac{2k}{\lambda} - b\right)\right\}.$$

Für die Einflussstelle, d. h. für $y = 0$, muss sein $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$, und für den Boden der Oeffnung, d. h. für $z = h$, muss sein

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad v = \frac{2k}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial z},$$

d. h. auch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Der Herr Verfasser setzt nun für φ eine Reihe

$$\varphi = \Sigma A_n\left(e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2h}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2h}}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2h} + By,$$

welche alle Bedingungen befriedigt mit Ausnahme der einen, dass $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ für $z = h$ sein soll. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, setzt der Herr Verfasser

$$v = fX\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = fX\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

wo f ein discontinuirlicher Factor, z. B.

$$f = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin u \cos\left(\frac{uz}{h-\varepsilon}\right)\frac{du}{u}$$

ist; dann ist f, so lange $0 \leqq z \leqq h - \varepsilon$ ist, gleich 1, für grössere Werte hingegen $f = 0$. Und ist dann also thatsächlich $v = 0$ für $z = h$. Dafür werden aber v, w für $z = h - \varepsilon$ unstetig, und es entsteht die Frage, welche vom Herrn Verfasser völlig ignorirt wird, ob die Druckcomponenten an der Unstetigkeitsstelle die Bedingungen erfüllen, welche erfüllt werden müssen. Ferner muss man doch, wenn die Lösung eine bestimmte sein soll, fragen, wie gross ε ist; die von dem Verfasser angegebene Bestimmung, ε solle unendlich klein sein, ist nach Meinung des Referenten völlig unzureichend. Im übrigen wird hiervon gar kein weiterer Gebrauch gemacht, sondern einfach die obige Lösung beibehalten. In derselben werden die Coefficienten durch die Bedingung bestimmt, dass in der Austrittsebene, für welche $y = l$ sein möge, der Druck gleich dem Atmosphärendruck sein soll. Zum Schluss wird die Gleichung der freien Oberfläche aufgestellt, d. h. die Gleichung derjenigen Strömungslinie, welche durch den Punkt $z = 0$, $y = 0$ geht. Setzt man in dieselbe für y den Wert l ein, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung des zugehörigen z, d. h. der Depression δ. Dass an der freien Oberfläche auch Bedingungen zu erfüllen sind, kommt nirgends zur Sprache.

F. K.

H. Bazin. Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. C. R. CV. 212-215.

Der Herr Verfasser setzt die abfliessende Wassermenge Q bei einem Wehr von der Höhe p und der Breite l und bei einer Druckhöhe h in der Form an

$$Q = Mhl(\sqrt{2gh})\left(1 + \frac{kh^2}{(h+p)^2}\right),$$

in welcher m und k Coefficienten sind. Seine Experimente lieferten für k den Wert 0,55 und für M, abgesehen von zu kleinen Werten h, den Wert 0,42.

F. K.

J. Hopkinson, D. Edwardes. Solution of question 6317. Ed. Times XLVI. 72-73.

Eine zähe Flüssigkeit befindet sich in dem Raume zwischen zwei unendlichen parallelen Ebenen, von denen die eine fest steht, die andere parallel zur Anfangslage eine einfache harmonische Bewegung $A \cos nt$ besitzt. Die an der festen Ebene entstehende Tangentialkraft hat einen grössten Wert $2A\lambda\mu n(\cos h 2\lambda l - \cos 2\lambda l)^{-\frac{1}{2}}$ auf der Flächeneinheit, wenn l der Abstand der beiden Ebenen, $\lambda^2 = \varrho n/2\mu$ ist, und wenn man annimmt, dass die mit einer Ebene in Berührung befindliche Flüssigkeit sich mit der Ebene bewegt.

Lp.

W. König. Ueber die Bestimmung von Reibungscoefficienten tropfbarer Flüssigkeiten mittels drehender Schwingungen. Wiedemann Ann. XXXII. 193-223.

Der beträchtliche Unterschied zwischen den Werten des Reibungscoefficienten, welche sich aus Coulomb'schen Schwingungsversuchen und den Ausflussversuchen nach Poiseuille ergeben, veranlasste den Herrn Verfasser, Schwingungsversuche mit drehenden Kugeln vorzunehmen.

Es wird zunächst die Dämpfungstheorie schwingender Kugeln behandelt. Es bedeute η den Reibungscoefficienten, μ die Dichtigkeit des Mittels, R den Kugelradius, ϱ die Dichtigkeit der Kugel, λ das logarithmische Decrement, T die Schwingungsdauer in der Flüssigkeit, T_0 die vom Reibungseinfluss befreite Schwingungsdauer, endlich K das Trägheitsmoment der Kugel ($= \frac{8}{15}\pi\varrho R^5$). Ferner werde gesetzt

$$B = \frac{2\pi R^4 \sqrt{\eta\mu}}{3K}, \quad m_0 = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{2\eta T_0}{\pi\mu}}; \quad p_0 = \frac{1+2m_0+2m_0^3+12m_0^5}{1+4m_0^4},$$

$$q_0 = \frac{2m_0+2m_0^2-2m_0^3+12m_0^5}{1+4m_0^4};$$

dann kann für λ je nach dem Grade der gewünschten Genauigkeit gesetzt werden

$$\lambda = B\sqrt{2\pi T_0}\,(\text{Kirchhoff}), \quad \lambda = B\sqrt{2\pi T_0}(1+4m_0) - 2T_0 B^2 (\text{Lampe}),$$

$$\lambda = B\sqrt{2\pi T_0}(p_0+q_0)(\text{Klemencic-Boltzmann}).$$

Für den Vergleich mit der Beobachtung ist es erforderlich, statt

T_0 die beobachtete Schwingungsdauer T einzuführen; zwischen beiden besteht die Beziehung:

$$T = \frac{T_0}{1 + B\sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}(q_0 - p_0)}.$$

Die Rechnung des Verfassers ergiebt

$$\lambda = B\sqrt{2\pi T}\,\frac{1 + 4m + 2m^2 + 24m^5}{1 + 4m^4} - 3B^2T(1 + 4m + \tfrac{4}{3}m^2)$$

$$\left(m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{2\eta T}{\pi\mu}}\right)$$

oder, wenn man sich mit der Genauigkeit der Lampe'schen Formel begnügt:

$$\lambda = B\sqrt{2\pi T}(1 + 4m) - 3B^2T.$$

Auf die experimentelle Prüfung kann hier nicht näher eingegangen werden. Es mag jedoch bemerkt werden, dass, während der aus früheren Schwingungsversuchen berechnete Wert des Reibungscoefficienten den aus Durchflussversuchen berechneten um etwa $\frac{1}{3}$ des letzteren überstieg, der Wert des Verfassers recht genau übereinstimmt. Es ist nämlich für eine Temperatur von 17° η nach den

Schwingungsversuchen	Ausflussversuchen		
	Poiseuille,	Grotrian,	König
0,01112	0,01089	0,01106	0,01105.

Im Anschluss hieran vervollkommnet Herr König auch die Theorie der Dämpfung schwingender Scheiben. Für die Scheiben besteht nach Herrn Meyer die Beziehung

$$T = T_0(1 + k); \quad k = \frac{R^4 + 2R^3\delta}{4K}\sqrt{2\pi\eta\mu T_0}$$

(δ die Dicke der Scheibe).

Es ist der Einfluss der Reibung zurückgeführt auf eine Vermeh-
…es Trägheitsmomentes um

$$K(1 + k)^2 - K = 2kK$$

(k^2K wird als unendlich klein gegen $2kK$ unterdrückt).
…druck stellt gewissermassen den Teil des Trägheits-

momentes der schwingenden Flüssigkeit dar, welcher durch die Reibung auf die Scheibe übertragen wird. Dieser Flüssigkeitscylinder erfährt nun aber seinerseits wieder durch die Reibung an der ruhenden Flüssigkeit eine Vermehrung seines Trägheitsmomentes

$$2Kk(1+l)^2 - 2kK = 2Kk(1+2l).$$

Geht man nun in der Formel für das Decrement bis zu Gliedern zweiter Ordnung, so ergiebt sich:

$$\lambda = \pi k(1+2l-k).$$

Die Grösse l berechnet der Verfasser so, als ob der Cylinder starr wäre, und erhält demgemäss

$$l = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\eta T}{\pi\mu}}.$$

Wird jetzt

$$B_1 = \frac{\pi(R^4+2R^3\delta)}{4K}\sqrt{\eta\mu} \quad \text{und} \quad m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{2\eta T}{\pi\mu}}$$

gesetzt, so erhält man

$$\lambda = B_1\sqrt{2\pi T_0}(1+4m) - 2B_1^2 T_0$$

oder, nachdem T_0 durch T ausgedrückt ist,

$$\lambda = B_1\sqrt{2\pi T}(1+4m) - 3B_1^2 T.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit neueren und älteren Versuchen des Verfassers führt ebenfalls zu Werten des Reibungscoefficienten, welche mit den aus Durchflussversuchen bestimmten in guter Uebereinstimmung stehen. F. K.

O. E. Meyer. Ueber die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulomb's Verfahren. München. Ber. 343-364, Wiedemann Ann. XXXII. 642-659.

Der Herr Verfasser giebt zunächst eine allgemeine Erklärung des Umstandes, dass die von ihm und Stokes aufgestellten Formeln für die Bestimmung des Coefficienten der inneren Reibung aus Coulomb'schen Versuchen mit schwingenden Scheiben zu grosse Werte für den genannten Coefficienten lieferten. Es beruht das darauf, dass man noch nicht den vollen Einfluss der Reibung hat mathematisch in Rechnung ziehen können.

Herr W. König hat nun einen glücklichen Versuch gemacht (vergl. das vorangehende Referat), diesen Uebelstand zu beseitigen. Herr O. E. Meyer giebt in der vorliegenden Abhandlung eine mathematische Rechtfertigung der von Herrn W. König eingeführten Correction. Der Berechnung werden die folgenden vereinfachenden Voraussetzungen zu Grunde gelegt. Durch einen zu der schwingenden Scheibe senkrecht stehenden Cylinder denkt sich der Herr Verfasser die Flüssigkeit in verschiedene Zonen geteilt. Im Innern dieses Cylinders soll die Winkelgeschwindigkeit nur durch den Abstand von der festen Scheibe bedingt sein, so dass die einzelnen Schichten der Flüssigkeit wie feste Scheiben sich bewegen. Ausserhalb des genannten Cylinders hingegen soll die Winkelgeschwindigkeit von den beiden Variabeln, dem Abstand von der Ebene der Scheibenmitte und demjenigen von der Cylinderaxe, abhängen. Hingegen soll hier vernachlässigt werden die Reibung, welche längs einer zur Scheibe parallelen Ebene zwei Flüssigkeitsschichten auf einander ausüben. Die Differentialgleichung für die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit würde streng genommen lauten:

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \frac{\partial r^2 \psi}{r \partial r} \right),$$

vereinfacht sich dann für $r > R$ (Radius der Scheibe) zu

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{\partial r^2 \psi}{r \partial r} \right),$$

wobei zu beachten, dass ψ auch von x abhängen kann. Für $r < R$ hingegen erhält man die Differentialgleichung

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{4}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} \right).$$

Diese Gleichungen sucht der Herr Verfasser durch eine Lösung von der Form

$$\psi = \Omega(x) P(r) e^{-m^2 t} \quad (r > R),$$
$$\psi = \Omega(x) P(R) e^{-m^2 t} \quad (r < R)$$

zu befriedigen. Für die Grösse m ergiebt sich dann eine Gleichung vierten Grades, welche sich von der früher aufgestellten

(J. für Math. LIX, 256) in doppelter Hinsicht unterscheidet. Einmal ist an die Stelle von R^4 die Grösse $(R+c)^4$ getreten, d. h. der Radius ist um die halbe Dicke der Scheibe vermehrt. Das andere hinzugekommene Glied enthält die Correction des Herrn König. Vernachlässigt man in der fraglichen Gleichung alle Potenzen von η, welche höher als die erste sind, so erkennt man, dass die Werte von m^2, welche aus der neuen Gleichung folgen, sich von den früher berechneten um den reellen Betrag

$$\pi\eta\frac{R^3}{M}$$

(M Trägheitsmoment der Scheibe in Bezug auf ihre Axe) unterscheiden, d. h. also nur in Bezug auf das logarithmische Decrement der Schwingungen, nicht aber in Bezug auf die Schwingungsdauer. Berechnet man nun aus dem logarithmischen Decrement die Grösse η nach der neueren Formel, so erhält man kleinere Werte als unter Benutzung der älteren Formel. Der Herr Verfasser wendet nun seine Entwickelungen auf die von ihm früher mitgeteilten Versuche (Pogg. Ann. CXIII.) an und findet, dass die neuere Formel für destillirtes Wasser Werte liefert, welche den aus der Formel

$$\eta = \frac{0{,}01775}{(1+0{,}01104\vartheta)(1+2.0{,}01104\vartheta)}$$

berechneten erheblich näher kommen, als die aus der alten Formel berechneten. Noch besser wird die Uebereinstimmung, wenn statt der eben angegebenen Formel die hyperbolische benutzt wird

$$\eta = \frac{0{,}0183}{1+0{,}0369\vartheta}.$$

Auf die Anwendungen auf Versuche mit anderen Flüssigkeiten, namentlich Salzlösungen, kann hier nicht näher eingegangen werden. Nur soviel mag bemerkt werden, dass nach Anwendung der Correction von König auf die Luft die Berechtigung der Forderung von Maxwell's Theorie erheblich besser hervortritt, dass der Reibungscoefficient von der Dichtigkeit unabhängig ist. F. K.

N. Joukowsky. Ueber die Bewegung einer reibenden, von zwei excentrischen rotirenden Cylinderoberflächen begrenzten Flüssigkeit. Chark. Ges. 31-46. (Russisch.)

Der Verfasser nimmt an, die Dichtigkeit der Flüssigkeit sei gering und die Reibung beträchtlich, und erhält, nach Vernachlässigung der Trägheitskräfte gegen die Kräfte der Reibung, die bekannten Differentialgleichungen der Bewegung der Flüssigkeit in einer zu den Axen der Cylinder senkrechten Ebene; aus diesen Gleichungen findet er, nach Einführung der Neumann'schen Coordinaten, Ausdrücke für die Projectionen der Geschwindigkeit auf die Tangenten der Coordinatenlinien; diese Ausdrücke enthalten nur eine willkürliche Constante. Danach werden die Wirkungen der Flüssigkeit auf den inneren Cylinder bestimmt, indem sie durch eine gegen den Mittelpunkt des Querschnitts des Cylinders gerichtete Kraft P und ein Paar ersetzt werden, die beide für eine Längeneinheit des Cylinders berechnet sind; die so gefundenen Ausdrücke finden nur statt, wenn ein bestimmtes Verhältnis zwischen den Geschwindigkeiten der Cylinder existirt. Die Formeln werden angewandt: 1) auf die Bewegung eines Zapfens in seinem Lager in dem Falle, wenn beide sich nach entgegengesetzten Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit drehen; die Kraft P hält hier dem Drucke des Zapfens auf das Lager das Gleichgewicht; 2) auf den Fall, wenn vor einer verticalen sich von oben nach unten bewegenden Platte in einer reibenden Flüssigkeit ein schwerer horizontaler sich entgegengesetzt dem Uhrzeiger drehender Cylinder aufgestellt ist.

Ms.

J. Mestschersky. Zur Frage über den Widerstand der Flüssigkeiten. Ueber den Druck, den ein Keil von einem Strome von unendlicher Breite und von zwei Dimensionen erleidet. Phys. Ges. St. Pet. XVIII. 327-365 u. 1 Taf. (Russisch.)

Nach einer kurzen geschichtlichen Uebersicht über die Frage [...] Verfasser die Aufgabe über den Druck eines Stromes [...]l bei beliebigem Winkel desselben und beliebiger

Richtung des Stromes. Indem er dann die Helmholtz-Kirchhoff'sche Methode anwendet, erhält er Ausdrücke für die Längen der Seiten des Keiles und für den Druck auf diese Seiten; dabei erweist sich, dass das Verhältnis zwischen den Längen der Seiten eine Function des Winkels des Keiles und der Richtung des Stromes ist. Der Autor führt in den erhaltenen Formeln alle Integrationen aus und betrachtet u. a. den Fall, wenn die Richtung des Stromes parallel einer der Seiten des Keiles ist. Der Abhandlung sind Tafeln beigefügt, in denen die Werte der mittleren Drucke auf die Seiten von Keilen angeführt sind, deren Winkel 180° (ebene Wand), 45°, 90°, 135° betragen, für verschiedene Richtungen des Stromes sowohl von der convexen, als von der concaven Seite des Keiles; ausserdem enthält eine Tafel die Werte der mittleren Drucke bei verschiedenen Winkeln des Keiles, wenn die Richtung des Stromes parallel einer seiner Seiten ist. Die erhaltenen Resultate werden angewandt auf die Lösung der Frage, wie der Druck eines Stromes auf eine Wand durch Ansetzung einer zweiten Wand unter einem gewissen Winkel modificirt wird. Ms.

H. Vallot. Du mouvement de l'eau dans les tuyaux circulaires. Théorie de M. Maurice Lévy. Tables pour le calcul des conduites. Ing. Civ. II. 526.

Im wesentlichen Wiedergabe einer älteren Arbeit von Hrn. Maurice Lévy aus den Ann. d. ponts et chaussées 1867. Die Grundlage der Theorie von Maurice Lévy ist die Voraussetzung, dass die innere Reibung nicht allein von der relativen Geschwindigkeit der an einander vorübergleitenden Flüssigkeitsteilchen, sondern auch von der absoluten Geschwindigkeit abhänge. Die tangentiale Componente des Druckes wird also

$$T = f(v)\frac{\partial v}{\partial n}$$

gesetzt. Ferner wird $f(v)$ proportional zu v genommen und der Coefficient als Function des Abstandes von der Röhrenaxe betrachtet. Die weiteren Betrachtungen [illegible] dann ähnlich den von anderen [illegible] aufg[illegible]men noch die Untersuchungen

von Boussinesq und Boileau, sowie die empirische Formel von Gauckler zur Besprechung. Den Schluss bilden Tabellen für die nach M. Lévy's Theorie berechneten Quotienten $\mu = U:\sqrt{J}$ und $f = Q:\sqrt{J}$ (U mittlere Geschwindigkeit, Q die secundliche Durchflussmenge, J das Gefälle). F. K.

L. Hajnis. Der Reibungswiderstand in Röhren von veränderlichem Querschnitt. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XXXIX. 117-125.

Der Herr Verfasser legt seinen Untersuchungen die Hypothese zu Grunde, dass das Wasser sich senkrecht zu Kugeln bewege, welche auf der Röhre selbst senkrecht stehen. Bezeichnet x die Entfernung eines Querschnitts von einem festen Querschnitt, y seinen Durchmesser, φ den Winkel der Tangente zur Axe, d und α die Werte von y und φ für die Ausflussöffnung, V die Geschwindigkeit in der zur Ausflussöffnung gehörenden Kugel, ξ den Reibungscoefficienten, so ist nach dem Verfasser der Druckhöhenverlust:

$$h = \frac{d^4}{(1+\cos\alpha)^2}\,\frac{V^2}{2g}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\xi(1+\cos\varphi)^2}{\cos\varphi}\,\frac{dx}{y^5}.$$

Der Quotient $\frac{(1+\cos\varphi)^2}{\cos\varphi}$ steigt sehr langsam von 4 bis 4,1213 für 0 resp. 45°, und deshalb glaubt sich der Herr Verfasser berechtigt, für denselben einen mittleren constanten Wert setzen zu dürfen. Führt man dies aus, bringt ferner statt V die Durchflussmenge Q in die Formel und wählt für ξ Darcy's Wert $m+\frac{n}{y}$, so ergiebt sich

$$h = 0{,}08263\,Q^2\int_{l_1}^{l_2}\frac{m+\frac{n}{y}}{y^5}\,dx.$$

F. K.

M. Grävell. Der Widerstand im begrenzten Fahrwasser und sein Einfluss auf die Grössenverhältnisse der Schiffahrtkanäle. Civiling. XXXIII. 97-110.

Der Herr Verfasser legt seinen Betrachtungen folgende Ausdrücke für den Widerstand und die zu dessen Ueberwindung erforderliche Arbeit zu Grunde:

$$W = \frac{k_1}{k} \sqrt[3]{D^2}\, v^2 \frac{n^2 + k_2 k_3}{(n-1)^2}, \quad A = \frac{k_1}{k} \sqrt[3]{D^2}\, v^3 \frac{n^2 + k_2 k_3}{(n-1)^2},$$

in welchen v die Geschwindigkeit, D das Deplacement des Schiffes, n das Verhältnis des Kanalquerschnittes zu demjenigen des eingetauchten Schiffes, k, k_1, k_2, k_3 Erfahrungscoefficienten bedeuten. Die aus den Formeln gezogenen Folgerungen sind wesentlich technischer Natur. F. K.

E. Sonne. Ueber den Schiffswiderstand bei Fluss- und Kanalkähnen. Hannov. Zeitsch. XXXIII. 298-302.

Ist A die eingetauchte Fläche des Querschnittes, D das Deplacement, T die Tauchung, v die Geschwindigkeit eines Schiffes, so glaubt der Herr Verfasser den Widerstand

$$W = \left(k_n A + \frac{D}{T} m\right) v^r$$

setzen zu dürfen, wo k_n eine nur von dem Querschnittsverhältnis n von Schiff und Kanal abhängende Constante, m und r andere Constanten sind. Durch Vergleich mit Erfahrungsthatsachen findet man

$$m = 0{,}08, \quad r = \tfrac{7}{4}, \quad 20 < k_n < 25.$$ F. K.

E. Dietze. Ueber den Schiffswiderstand bei beschränkter Wassertiefe. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 609-612.

Es ist bekannt, dass einen Dampfer mit der Geschwindigkeit V eine Welle begleitet, welche um so kürzer ist, je geringer die Wassertiefe ist. Es wird nun angenommen, dass für eine indicirte Maschinenleistung N_i die Periode der Welle unabhängig von der Tiefe ist, und dass ferner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Schiffsgeschwindigkeit ist. Jeder Wassertiefe $\mathfrak{T}$ entspricht nun bei gegebenem V eine Wellenlänge λ, und umgekehrt jedem λ [illegible]haltenem $\mathfrak{T}$ ein bestimmtes V. Der

Herr Verfasser construirt ein Diagramm, indem er V und λ als Abscisse und Ordinate eines Punktes benutzt und diejenigen Punkte durch Curven verbindet, welche zu demselben Werte $\tau = \lambda : \mathfrak{T}$ gehören. Die Periode der Welle ist durch das Verhältnis $\lambda : V$ ausgedrückt. Die Linien constanter Periode sind also gerade Linien durch den Coordinatenanfangspunkt. Nach der Anfangs angeführten Hypothese sind diese Linien auch zugleich solche constanter Maschinenleistung. Um nun die für eine Geschwindigkeit V bei gegebener Tiefe $\mathfrak{T}$ erforderliche Arbeitsleistung N_i zu bestimmen, verfährt der Herr Verfasser folgendermassen. Zunächst wird aus V und $\mathfrak{T}$ das zugehörige λ ermittelt. Ist das geschehen, so verbindet man den betreffenden Punkt des Diagramms mit dem Coordinatenanfangspunkt durch eine gerade Linie. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Linie $\tau = 0$, $\mathfrak{T}$, ∞ liefert die Geschwindigkeit, welche das Schiff bei derselben Arbeitsleistung im unendlich tiefen Ocean annehmen würde. Kennt man also den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Widerstand bei unendlicher Tiefe, so kann man ihn auch für beschränkte Tiefe ermitteln. F. K.

W. Riehn. Einige Bemerkungen über das sogenannte Gesetz der correspondirenden Geschwindigkeiten und die Anwendung des Schiffswiderstandes durch Modelle. Z. Dtsch. Ing. XXXI.

Der Herr Verfasser macht einige Bedenken gegen die praktische Anwendung des Satzes geltend:

Wenn die Geschwindigkeiten zweier ähnlichen Körper sich verhalten wie die Quadratwurzeln aus ihren linearen Dimensionen, so verhalten sich die Widerstände wie die Volumina.

F. K.

Ruttmann. Warum bewegt sich ein in einem Flusse frei zu Thal treibendes Schiff schneller als das Wasser und um so schneller, je schwerer es beladen ist? Deutsche Bauztg. XXI. 243.

Elementarer Versuch, die im Titel genannte Frage zu beantworten. F. K.

N. JOUKOWSKY. Ueber die hydrodynamische Reibungstheorie gut geschmierter starrer Körper. Phys. Ges. St. Pet. XVIII. 209-215. (Russisch.)

Es wird die Bewegung einer Schicht reibender Flüssigkeit betrachtet, welche zwischen einem sich drehenden Cylinder und einem an ihn mittels einer Last angedrückten, concentrischen Lager von besonderer Form eingeschlossen ist. Der Verfasser bestimmt den hydrodynamischen Druck und die Reibung auf der Oberfläche des Zapfens. Ms.

A. W. GRETSCHANINOFF. Hydrodynamische Reibungstheorie gut geschmierter Zapfen in ihren Lagern. Chark. Ges. 11-30. (Russisch.)

Der Verfasser nimmt an, dass die Teilchen der Flüssigkeitsschicht sich in kreisförmigen Bahnen bewegen, deren Ebenen senkrecht zu den Axen des Zapfens und des Lagers sind, und deren Mittelpunkte in der Ebene dieser Axen liegen. Indem er ferner annimmt, dass die hydraulischen Widerstände sich als dieselben Functionen der relativen Geschwindigkeiten darstellen lassen, durch welche die Tensionen in isotrop elastischen Körpern als Functionen der Verrückungen ausgedrückt werden, bestimmt er den zur Oberfläche des Zapfens normalen hydrodynamischen Druck durch Integration der Gleichung:

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial r}=0,$$

wo r und φ die Polarcoordinaten eines Punktes sind, deren Pol sich im Centrum des Zapfenquerschnitts befindet. Indem ferner angenommen wird, dass die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen auf den Oberflächen des Zapfens und des Lagers gleich Null sind, findet der Verfasser, indem er einige kleine Grössen vernachlässigt, einen Ausdruck für die Reibung gegen die Oberfläche des Zapfens. Ms.

N. Petroff. Die Reibung in den Maschinen. Einige Bemerkungen betreffs der Abhandlungen von N. Joukowsky und A. Gretschaninoff. Ber. d. Techn. Inst. zu St. Petersb. 45 S. (Russisch.)

Herr Petroff, der die hydrodynamische Reibungstheorie gut geschmierter starrer Körper vorgeschlagen hat, untersucht die Abhandlungen N. Joukowsky's und A. Gretschaninoff's (s. die vorangehenden Berichte) und vergleicht die Resultate der theoretischen Untersuchungen dieser Autoren mit den Ergebnissen des Experiments. Ms.

F. Grashof. Theoretische Maschinenlehre. III. 3. Hamburg u. Leipzig. C. Voss.

Die dritte Lieferung (S. 321—480) der „Theorie der Kraftmaschinen" enthält als Abschluss der Behandlung der Wassermotoren die Untersuchung der Wassersäulenmaschinen, ferner die Theorie der Windmotoren und den Anfang der Behandlung der Wärmemotoren; nach den einleitenden Betrachtungen über Wesen und Arten derselben, über ihren absoluten Effect, Nutzeffect und Wirkungsgrad werden die Dampfkessel behandelt. Sbt.

M. Ebel. Zur Theorie der Centrifugalpumpen. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 456-457.

Der Herr Verfasser berechnet zunächst die Arbeit, welche beim Durchgang des Wassers geleistet wird, und untersucht dann, unter welchen Umständen der gefundene Ausdruck ein Minimum wird. Da eine kurze Wiedergabe der Rechnung nicht gut möglich ist, so müssen wir uns hier mit einem Hinweis auf die Arbeit begnügen.

Es muss bemerkt werden, dass das Resultat nach des Verfassers eigenen Worten in Widerspruch zu anderen Theorien steht. F. K.

K. E. Ueber Centrifugalpumpen. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 1071-1073.

Im Anschluss an die Thatsache, dass die freie Oberfläche einer um eine Axe rotirenden, unter Einfluss der Schwere stehenden Flüssigkeit ein Rotationsparaboloid ist, erläutert der Herr Verfasser die Wirksamkeit der Centrifugalpumpen. F. K.

J. Benetti. Teoria generale delle pompe centrifughe. Bologna Mem. (4) VII. 655-699.

Technisch. F. K.

R. R. Werner. Theorie der Druckturbinen mit freiem Strahl. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 997-1004, 1019-1024. F. K.

M. Kohn. Graphische Berechnung der Turbinen. Z. Dtsch. Ing. XXXI. 647-651. F. K.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

A. Harnack. Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunction in der Ebene. Leipzig. Teubner. 158 S.

Die Untersuchungen, welche der Verfasser im vorigen Jahre über die Existenz der Green'schen Function in der Ebene und im Raume [cf. F. d. M. XVIII. 1886. 919f.] angestellt hatte, haben ihn veranlasst, die Theorie des Potentials in der Ebene systematisch zu bearbeiten. Dabei bezweckte er vor allem, neben den von ihm selbst gefundenen Resultaten die früheren Arbeiten von

H. A. Schwarz, Christoffel und C. Neumann, die der Form nach von einander abweichen, während sie dem Inhalt nach völlig verwandt sind, und deren Verständnis teils durch ihre kurze Ausdrucksweise, teils durch das Hereinziehen andersartiger Untersuchungen nicht leicht ist, unter einheitlichem Gesichtspunkt und in einheitlicher Form darzustellen. Diese Darstellung bildet den Inhalt des vorliegenden Buches, welches von dem dermaligen Stande der Theorie, soweit dieselbe eindeutige Functionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten betrifft, in klarer und erschöpfender Weise Rechenschaft giebt, sowie einzelne Lücken der Theorie ergänzt.

Das Buch zerfällt in fünf Capitel, deren erstes und umfangreichstes den allgemeinen Sätzen über das logarithmische Potential und die Potentialfunctionen gewidmet ist. Beide Begriffe sind dadurch unterschieden, dass das Potential ein bestimmtes Verhalten im Unendlichen besitzt, die Potentialfunction oder, wie sie auch genannt wird, harmonische Function aber nicht, während im übrigen die Potentialfunction die Eigenschaften des Potentials besitzt. Der Verfasser beginnt mit der Definition des logarithmischen Potentials, bestimmt dasselbe für Kreis, Kreissector und Rechteck, stellt die partiellen Differentialgleichungen, denen das Potential für Punkte ausserhalb resp. innerhalb der Masse genügt, auf, untersucht dann die Eigenschaften des Potentials einer einfachen Curvenbelegung sowie einer Doppelbelegung, leitet die Green'schen Sätze ab und behandelt die Niveaulinien und Knotenpunkte des Potentials, extreme Werte und Schwankungen der Potentialfunction, endlich unendliche Reihen von Potentialfunctionen. Von Einzelheiten heben wir aus diesem Capitel folgende Sätze hervor. „Jede Potentialfunction u, welche längs einer Geraden Werte besitzt, die auf der Geraden eine reguläre analytische Function bilden, muss über dieselbe hinaus fortsetzbar sein." Ferner: „Ist die Dichtigkeit $f(x, y)$ einer Flächenbelegung in der Umgebung einer Stelle eine eindeutige und reguläre Function, so ist auch das logarithmische Potential dieser Belegung in der Umgebung der betrachteten Stelle eindeutig und regulär." Ein Gleiches gilt für die zugehörige Potentialfunction. — In das erste

Capitel hat der Verfasser die Resultate zweier seiner früheren Untersuchungen aufgenommen; die eine derselben betrifft das Cauchy'sche Integral (cf. F. d. M. XVII. 1885. 261), auf welches hier die Betrachtung der zu einer Potentialfunction conjugirten Function führt, die andere einen Satz über eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Functionen. [cf. F. d. M. XVIII. 1886. 921. Nr. 4].

Im zweiten Capitel werden die zur Bestimmung einer Potentialfunction ausreichenden Bedingungen erörtert; insbesondere werden die wesentlichsten Eigenschaften der Green'schen Function und die Green'sche Darstellung einer harmonischen Function im Innern einer Curve mittels ihrer Randwerte abgeleitet; die Green'sche Function selbst wird für Kreis und Rechteck bestimmt, und zum Schluss folgen die allgemeinen Sätze zur Darstellung eines Potentials für das äussere Gebiet einer Curve.

Im dritten Capitel wird die C. Neumann'sche Methode zur Construction einer Potentialfunction aus ihren Randwerten (Combinationsmethode) auseinander gesetzt. Durch diese Methode wird festgestellt, dass für jedes geradlinige oder aus Kreisbogen zusammengesetzte Polygon ohne einspringende Ecken eine und nur eine harmonische Function existirt, welche stetig nach gegebenen Randwerten U convergirt, falls U selbst eine stetige Function längs des Randes ist; und welche im allgemeinen stetig nach diesen Randwerten convergirt, aber überall endlich bleibt, wenn U eine überall endliche und im allgemeinen stetige Function auf dem Rande ist, die nur an einzelnen Stellen Unstetigkeitssprünge erleidet.

Das vierte Capitel dehnt sodann die Untersuchungen zunächst auf beliebige Polygone, weiter auf beliebig berandete, einfach oder mehrfach zusammenhängende Flächen aus. Hier werden die Resultate, welche der Verfasser in der oben citirten Arbeit aus dem Jahre 1886 abgeleitet hatte, in modificirter Darstellung reproducirt. Es wird also zunächst die Existenz der Green'schen Function für beliebige Flächen nachgewiesen und daraus die Potentialfunction mittels eines Grenzwertes des Green'schen Integrals definirt, falls die Randwerte der Potentialfunction stetig

sind. Dann wird gezeigt, dass eine harmonische Function auch dann eindeutig bestimmt ist, wenn in einzelnen Punkten des Randes das Verhalten der Function unbestimmt gelassen, jedoch gefordert wird, dass sie endlich bleibt. Weiter wird noch die analytische Fortsetzung der Potentialfunctionen und Potentiale, das Verhalten der Green'schen Function, wenn ihr Pol in einen Randpunkt rückt, schliesslich die Construction von Functionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten besprochen. Von einer Mitteilung der hier abgeleiteten Sätze müssen wir, um das Referat nicht zu umfangreich zu gestalten, absehen.

Das Schlusscapitel endlich enthält als Anwendungen der allgemeinen Theorie Bemerkungen zur Theorie der conformen Abbildung und der Transformation durch reciproke Radien. Dabei macht der Verfasser auf einige Lücken aufmerksam, die bei den bisherigen Beweisen von gewissen allgemeinen Aussagen vorhanden sind. Dass z. B. bei der Abbildung einer einfach zusammenhängenden Fläche F auf den Kreis jedem Punkte des Randes von F ein Punkt der Kreisperipherie eindeutig und mit conformer Umgebung zugeordnet ist, wurde bisher nur für den Fall bewiesen, dass die Randcurve von F aus Stücken analytischer Curven besteht, die nur einzelne singuläre Punkte enthalten. Wn.

C. Neumann. Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. Erste Abhandlung. Leips. Abh. XIII. 707-820.

In der Ebene sei eine geschlossene Curve σ gegeben, die sich selber nirgends durchschneidet, übrigens aber beliebig viele Eckpunkte besitzen mag. Ebenso wie bei einem Polygon, ebenso kann man auch bei der Curve von den Innenwinkeln sprechen. Ist s ein beliebiger Punkt der Curve σ und τ_s ihr Innenwinkel beim Punkte s, so wird offenbar τ_s stets gleich π sein, ausser wenn s ein Eckpunkt der Curve ist. Setzt man also

$$(\alpha) \qquad \tau_s = \pi(1-\vartheta_s),$$

so wird ϑ_s stets gleich 0 sein, ausser wenn s ein Eckpunkt ist.

Es sei nun auf der Curve σ irgend eine Function f in bestimmter Weise vorgeschrieben, welche längs σ stetig ist. Ferner

bezeichne p einen beliebigen Punkt in eben derselben Ebene, in welcher σ liegt. Man zerlege σ in unendlich kleine Elemente $d\sigma$ und bezeichne die scheinbare Grösse eines solchen Elementes $d\sigma$ für einen in p befindlichen Beobachter mit $\pm(d\sigma)_p$, und zwar mit $+(d\sigma)_p$ oder $-(d\sigma)_p$, jenachdem jener Beobachter die innere oder äussere Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat. Das so definirte $(d\sigma)_p$ multiplicire man mit dem in $d\sigma$ vorhandenen Functionswert f und bilde das über die ganze Curve σ sich ausdehnende Integral

$$(\beta) \qquad \int f(d\sigma)_p$$

sowie auch das aus diesem für $f = 1$ hervorgehende einfachere Integral

$$(\gamma) \qquad \int (d\sigma)_p.$$

Für den speciellen Fall, dass p unmittelbar auf σ liegt, sollen übrigens unter den Ausdrücken (β), (γ) die Grenzwerte der betreffenden Integrale verstanden werden. Denkt man sich nämlich, was diesen speciellen Fall betrifft, die Integrale zunächst gebildet mit Ausschluss eines sehr kleinen den Punkt p enthaltenden Curvenstücks, so sollen unter den Ausdrücken (β) und (γ) diejenigen Werte verstanden werden, gegen welche diese Integrale convergiren, sobald man das genannte Curvenstück ins Unendliche sich verkleinern lässt. — Solches festgesetzt, überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit folgender drei Elementarsätze:

I. — Es ist

$$\int (d\sigma)_p = 0 \quad \text{oder} \quad = 2\pi,$$

jenachdem p ausserhalb oder innerhalb σ sich befindet. Liegt aber p unmittelbar auf σ, etwa in s, so gilt die Formel:

$$\int (d\sigma)_s = \pi\tau_s = \pi(1 - \vartheta_s),$$

wo τ_s und ϑ_s die in (α) genannten Bedeutungen haben.

II. — Setzt man

$$\int d\sigma = \Sigma,$$

so besitzt das so definirte Σ einen bestimmten endlichen Wert. Dieser Wert heisst der Umfang der Curve.

III. — Setzt man

$$\int abs.(d\sigma)_p = \Omega_p,$$

so wird die so definirte positive Function Ω_p in der ganzen Ebene überall endlich sein, derart dass sie stets $< M$ bleibt, wo M eine angebbare endliche Constante vorstellt.

Dass diese zum Teil aus der geometrischen Anschauung herstammenden Elementarsätze I, II, III auch noch gültig seien für ganz nebelhaft vorschwebende Curven, z. B. für Curven, die mit unendlich vielen Ecken behaftet sind, — wird niemand behaupten wollen. Sie bilden aber das Fundament der vorliegenden Abhandlung. Und der Verfasser hebt besonders hervor, dass seine Untersuchungen Gültigkeit besitzen für alle diejenigen Curven, für welche diese drei Elementarsätze gelten. (Vgl. die Bemerkung, Seite 738).

Bezeichnet man von den beiden Gebieten, in welche die unendliche Ebene durch die Curve σ zerlegt wird, das äussere mit $\mathfrak{A}$, und das innere mit $\mathfrak{J}$, so wird man sich eine Function $\Psi = \Psi(x, y)$ vorstellen können, die folgenden beiden Bedingungen entspricht: Erstens soll Ψ auf $\mathfrak{J}$, inclusive σ, eindeutig und stetig sein. Zweitens sollen auf $\mathfrak{J}$, exclusive σ, die ersten und zweiten Ableitungen von Ψ nach x, y stetig, und $\Delta\Psi = 0$ sein. Jede Function Ψ, die diesen beiden Bedingungen entspricht, nennt der Verfasser eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$. In ähnlicher, aber etwas complicirterer Art definirt der Verfasser die Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ (Seite 725); worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Diese Definitionen vorangeschickt, gelangt nun der Verfasser nach mannigfaltigen Betrachtungen zu einem Satz, der gewöhnlich aus dem Dirichlet'schen Princip hergeleitet wird, der aber in der vorliegenden Abhandlung unter Vermeidung dieses Princips in vollkommen strenger Art bewiesen wird. Dieser Satz lautet folgendermassen (Seite 792; über „zweisternig“ vgl. Seite 715):

Setzt man voraus, dass die gegebene Curve σ überall convex, und dass sie weder ein geradliniges Dreieck noch auch ein geradliniges Viereck sei, so wird stets eine Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren, welche auf σ die daselbst vorgeschriebenen Werte f besitzt. Auch wird nur eine solche Function Ψ existiren. — Zugleich zeigt der Verfasser, dass man diese Function Ψ wirklich zu construiren im Stande ist, und giebt hierzu folgende Vorschrift:

Von den vorgeschriebenen Werten f ausgehend, bilde man den Ausdruck $\int f(d\sigma)_s$ für irgend einen auf σ gelegenen Punkt s und definire sodann eine neue Function f' mittels der Formel:

$$f'_s = \vartheta_s f_s + \frac{1}{\pi} \int f(d\sigma)_s,$$

wo ϑ_s die in (α) angegebene Bedeutung haben soll. Ueberdies sollen f_s und f'_s die Werte der Functionen f und f' im Punkte s vorstellen. Sodann construire man weitere Functionen f'', f''', etc. etc., und zwar derart, dass in der ganzen Reihe

$$f, f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots$$

jedwede Function aus der vorhergehenden genau in derselben Weise entsteht, wie f' aus f. Diese Functionenreihe hat, wie der Verfasser zeigt, die Eigenschaft, dass $\lim_{n=\infty} f^{(n)}$ eine Function repräsentirt, die längs der ganzen Curve σ überall einen und denselben Wert hat; so dass man also schreiben kann

$$\lim_{n=\infty} f^{(n)} = C,$$

wo C eine Constante vorstellt.

Bildet man jetzt für einen beliebigen Punkt p die Integrale

$$W_p = \frac{1}{\pi} \int f(d\sigma)_p, \quad W'_p = \frac{1}{\pi} \int f'(d\sigma)_p,$$

$$W''_p \; [illegible] \int f''(d\sigma)_p, \text{ etc.},$$

und [illegible]

$$[illegible] (W''_p - W'''_p) + \cdots,$$

so w[illegible] bleibt, stets convergen[illegible] die durch diese Reihe d[illegible] Fundamental-

function des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein, welche auf σ identisch ist mit der daselbst vorgeschriebenen Function f.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise erscheint es angemessen, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, welche am Rande von $\mathfrak{J}$, d. i. auf σ, mit einer daselbst vorgeschriebenen Function f identisch ist, kurzweg als die dieser Function f entsprechende Fundamentalfunction zu bezeichnen. Alsdann kann das Theorem, zu welchem der Verfasser, nach Aufstellung einiger Hülfssätze über die Kreislinie, am Schluss seiner Abhandlung (Seite 818) gelangt, folgendermassen ausgesprochen werden:

Die geschlossene Curve σ sei nach wie vor derart, dass für sie die Elementarsätze I, II, III gelten, sonst aber ganz beliebig gegeben, so dass sie also z. B. teils convex, teils concav sein darf. Ferner sei auf σ eine daselbst stetige Function f vorgeschrieben. Ueberdies sei (durch irgend welche Methode, vielleicht auch durch Zufall) eine mit einem variablen Parameter q behaftete Function $f^{(q)}$ gefunden, die ebenfalls und zwar für jedwedes q auf σ stetig ist, und die für $q = \infty$ auf der ganzen Curve gleichmässig gegen f convergirt. Gelingt es alsdann, die dieser Function $f^{(q)}$ entsprechende Fundamentalfunction $\Psi^{(q)}$ des Gebietes $\mathfrak{J}$ zu construiren, so wird hiedurch zugleich auch die Existenz einer der Function f entsprechenden Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{J}$ ausser Zweifel gesetzt sein. Und zwar wird Ψ nichts anderes sein, als der Convergenzwert von $\Psi^{(q)}$ für $q = \infty$. Auch wird dieser Uebergang von $\Psi^{(q)}$ in Ψ für $q = \infty$ auf der ganzen Fläche $\mathfrak{J}$ (inclusive σ) von gleichmässiger Convergenz sein.

Wir haben hier immer nur das Gebiet $\mathfrak{J}$ betrachtet. Analoge Resultate aber enthält die vorliegende Abhandlung auch für das ausserhalb σ liegende und ringsum sich ins Unendliche erstreckende Gebiet $\mathfrak{A}$.

Schliesslich sei bemerkt, dass die Untersuchungen des Verfassers nicht nur auf eine geschlossene Curve in der Ebene, sondern Schritt für Schritt in paralleler Weise auch auf eine im Raum gegebene geschlossene Fläche sich erstrecken. N.

E. Sarrau. Sur un théorème de la théorie de l'attraction. Nouv. Ann. (3) VI. 469-485.

Der hier mitgeteilte Beweis der Poisson'schen Formel

$$\Delta V^{(i)} = -4\pi k$$

stimmt in allen wesentlichen Punkten mit dem von Gauss in den „Allgemeinen Lehrsätzen" gegebenen überein. Die Darstellung ist nur insofern modificirt, als die benutzten Hülfssätze zuerst ohne Beziehung auf das vorgelegte Problem entwickelt werden, wodurch sich der eigentliche Beweis ziemlich kurz gestaltet.

Wn.

J. Weingarten. Zur Theorie des Flächenpotentials. Acta Math. X. 303-309.

Es werden zuerst die Unstetigkeiten der zweiten Differentialquotienten des Potentials einer in einem endlichen Raum stetig verteilten Masse auf einem sehr einfachen Wege hergeleitet. Ist k die Dichtigkeit, V das Potential jener Masse, und zwar $V^{(a)}$ für einen äusseren, $V^{(i)}$ für einen inneren Punkt, sind ferner x_1, x_2, x_3 die Coordinaten, so ist für jeden Punkt der Grenzfläche

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^{(a)} - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\lambda}\right)^{(i)} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Wendet man diese Gleichung auf zwei unendlich nahe Punkte der Grenzfläche an, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^{(a)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\right)^{(i)} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$

proportional ist dem Cosinus des Winkels α_μ, welchen die in dem betrachteten Punkte nach aussen errichtete Normale mit der Axe x_μ bildet. Andererseits ist derselbe Ausdruck proportional $\cos\alpha_\lambda$, woraus folgt, dass der Ausdruck (1)

$$= \varrho_1 \cos\alpha_\lambda \cos\alpha_\mu$$

ist, wobei ϱ_1 einen von der Wahl der Indices λ, μ unabhängigen Wert darstellt. ϱ_1 aber lässt sich mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$(\Delta V)^{(a)} - (\Delta V)^{(i)} = 4\pi k$$

bestimmen, und dadurch folgt für den Ausdruck (1) der Wert

$$(2) \qquad 4\pi k \cos\alpha_\lambda \cos\alpha_\mu.$$

Aus diesem Resultat ergeben sich leicht die Unstetigkeiten der ersten Ableitungen des Flächenpotentials. Ist J das Potential der mit der Dichtigkeit h (die als eine eindeutige, endliche und stetige Function des Ortes angenommen wird) belegten Fläche Σ:

$$J = \int \frac{h\,d\sigma}{r},$$

so ergänze man Σ durch Hinzufügung eines neuen Flächenstücks Σ' zu einer geschlossenen Fläche S. Innerhalb des von S umschlossenen Raumes verteile man eine Masse mit der stetigen Dichtigkeit k, wobei man k innerhalb S beliebig wählen kann, wenn nur der Bedingung genügt wird, dass in allen Punkten der inneren Seite von Σ

$$k = \frac{h}{\cos\alpha_1}$$

ist. α_1 ist hier der Winkel, welchen die äussere Normale von Σ mit der Axe x_1 bildet. Ist nun V das Potential der im Innern von S verteilten Masse, so wird nach einem bekannten Satze

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = -J - J' + W,$$

falls J' ein über die Fläche Σ' zu erstreckendes Integral von derselben Form wie J, W ein Körperpotential für die Dichtigkeit $\frac{\partial k}{\partial \eta_1}$ darstellt, unter η_1 die erste Coordinate eines Punktes innerhalb S verstanden. Da beim Durchgang des angezogenen Punktes durch Σ die ersten Ableitungen von J' und W sich continuirlich ändern, so folgt aus (3):

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^{(a)} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_\lambda}\right)^{(i)} = -\left\{\left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^{(a)} - \left(\frac{\partial J}{\partial x_\lambda}\right)^{(i)}\right\}$$
$$= 4\pi k \cos\alpha_1 \cos\alpha_\lambda = 4\pi h \cos\alpha_\lambda;$$

[d]iese Gleichung ergiebt unmittelbar die discontinuirliche [Änderu]ng von J an der Fläche Σ. Die Ableitung ist wegen [des geringe]n Aufwandes analytischer Hülfsmittel bemerkenswert.

Wn.

G. Morera. Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 302-310, Nuovo Cimento XXII. 240-249.

G. Morera. Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie. Lomb. Ist. Rend. (2) XX. 543-548.

In der ersten Arbeit untersucht der Verfasser, unter welchen Bedingungen die Integrale, welche die zweiten Ableitungen des Potentials einer räumlich ausgedehnten Masse darstellen, für Punkte der Masse einen bestimmten Sinn haben, also unabhängig sind von der Art und Weise, in welcher der Uebergang von einem Integrationsgebiet, das die Umgebung des betrachteten Punktes nicht enthält, zu dem eigentlichen Integrationsgebiet bewerkstelligt wird. Es ist dazu erforderlich, dass, wenn k die veränderliche Dichtigkeit, k_0 die Dichtigkeit in dem betrachteten Punkte (dem Pol) ist, das Integral

$$\int_0^r \frac{|k-k_0|}{r}\,dr$$

für jeden von dem Pol ausgehenden Radius r einen bestimmten, endlichen Wert hat.

Dies einfache Kriterium für die Existenz der zweiten Ableitungen von Körperpotentialen, das die Differentiirbarkeit von k nicht voraussetzt, wird folgendermassen abgeleitet. Sind x, y, z die Coordinaten des Pols, a, b, c die Coordinaten eines beliebigen Massenpunktes, dS ein Volumenelement, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\, dS = -k_0 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\, dS - \int (k-k_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\, dS.$$

Das erste Integral rechts lässt sich in ein Oberflächenintegral verwandeln, so dass, wenn $d\sigma$ ein Element der Oberfläche von S ist,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k_0 \int_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial n}\, d\sigma - \int_S (k-k_0) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\, dS$$

wird. Nun lässt sich durch strenge Grenzbetrachtungen zeigen,

dass

$$\lim_{\Delta x=0}\int_S (k-k_0)\frac{\Delta\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\right)}{\Delta x}dS = -\int_S (k-k_0)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial a^2}dS$$

wird; und das rechts stehende Integral hat, ebenso wie die in der eben erwähnten Grenzbetrachtung vorkommenden, bei Erfüllung des obigen Kriteriums einen bestimmten Sinn. Der entsprechende Grenzübergang für das Oberflächenintegral hat, wenn der Pol nicht auf der Oberfläche liegt, keine Schwierigkeit.

Somit ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -k_0\int_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial n}d\sigma + \int_S (k-k_0)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial a^2}dS,$$

woraus

$$\Delta_2 V = -k_0\int_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = -4\pi k_0$$

folgt.

In der zweiten Abhandlung handelt es sich darum, die discontinuirliche Aenderung des Flächenpotentials beim Durchgang durch die Fläche abzuleiten, ohne die Differentiirbarkeit der Dichtigkeit vorauszusetzen. Zu dem Zwecke wird zuerst das Potential einer mit Masse von der constanten Dichtigkeit s belegten Fläche betrachtet. Ist n eine beliebige Normale, n_0 die Normale im Punkte P_0 der Fläche, n_0' die nach der entgegengesetzten Seite gerichtete Normale in P_0; sind ferner P und P' zwei Punkte auf n_0 resp. n_0', so wird für den Punkt P:

$$(1)\qquad \frac{\partial V}{\partial n_0} = \int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}d\sigma = \int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_0}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma - \int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma.$$

Von dem ersten Integrale lässt sich zeigen, dass es einen endlichen und bestimmten Wert behält, wenn P in P_0 fällt, falls nur alle Normalschnitte der Fläche in P_0 eine endliche Krümmung besitzen; und zwar ist dieser Grenzwert

$$\theta = \int\frac{\cos(r_0 n_0) - \cos(r_0 n)}{r_0^2}d\sigma,$$

$$V_i(\varrho', \vartheta') = -\frac{1}{\pi}\varrho'\frac{\partial}{\partial\varrho'}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} V''(\theta)F(\theta)\,d\theta\right] + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} V(\theta)\,d\theta.$$

Darin ist $V(\theta)$ der gegebene Potentialwert an der Peripherie des Kreises mit dem Radius R, $V''(\theta)$ seine zweite Ableitung nach θ. Aus der letzten Gleichung und der analogen für das Potential V_e eines äusseren Punktes erhält man unter Benutzung der bekannten Relation

$$\lim_{\varrho'=R}\left(\frac{\partial V_e}{\partial\varrho'} - \frac{\partial V_i}{\partial\varrho'}\right) = -2\pi.\delta(\theta')$$

für die Dichtigkeit δ der Kreisbelegung das Resultat:

$$\delta(\theta') = \frac{1}{\pi^2 R}\int_{-\pi}^{+\pi} V''(\theta)\log\left(2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right)d\theta - \frac{1}{4\pi^2 R\log R}\int_{-\pi}^{+\pi} V(\theta)\,d\theta.$$

Dies Resultat führt den Verfasser weiter dazu, unter gewissen Bedingungen eine willkürlich gegebene periodische Function durch ein bestimmtes Integral darzustellen. Ist nämlich die Dichtigkeit $\delta(\theta)$ gegeben, so kann man daraus den Wert von $V(\theta)$ berechnen; setzt man diesen in die letzte Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$\delta(\theta') = -\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\log\left(2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \times\frac{d^2}{d\theta^2}\left[\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(\alpha)\log\left(2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right)d\alpha\right] + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(\alpha)\,d\alpha.$$

Doch gilt diese Gleichung nur, falls $\delta(\theta)$ eine continuirliche Function ist, deren erste und zweite Ableitung existiren und integrabel sind. Entwickelt man $\log\left(2\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$ resp. $\log\left(2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$ in eine Fourier'sche Reihe, so folgt auch die Entwickelung von $\delta(\theta')$ in eine solche Reihe. Umgekehrt kann daher das Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung als eine Summationsformel jener Fourier'schen Reihe angesehen werden. Wn.

G. GIULIANI. Sulla funzione potenziale della sfera in uno spazio di n dimensioni. Nuovo Cimento (3) XXI. 260-262.

Die Potentialfunction einer n-dimensionalen Kugel S_n vom Radius R in einem Punkte $(x'_1, \dots, x'_n)$ wurde von Hrn. Tonelli (Annali di Mat. (2) X. 291-321; F. d. M. XIV. 1882. 797) vermittelst einer Function ψ ausgedrückt, welche innerhalb S_n der Laplace'schen Gleichung, auf der Begrenzung der Gleichung:

$$\frac{\partial\psi}{\partial p} = -\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{n-2}{R^{n-1}}$$

genügt, wo:

$$V = \frac{1}{(\varrho^2 - 2\varrho\varrho'\cos\gamma + \varrho'^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

ist. Der Verfassser erhält den Ausdruck der Function ψ unter der folgenden Form:

$$\psi = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu+1}{\nu} \frac{\varrho^\nu \varrho'^\nu}{R^{2\nu+1}} X_\nu(\cos\gamma),$$

wo die $X_\nu(\cos\gamma)$ Kugelfunctionen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bezeichnen.

Vi.

P. G. LEJEUNE DIRICHLET. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausgegeben von F. GRUBE. 2te Aufl. Leipzig. Teubner. VIII u. 184 S. 8°.

R. CLAUS. Ueber den allgemeinsten Ausdruck innerer Potentialkräfte, deren Potential von der Zeit, den Coordinaten, den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhängt. Diss. Halle. 21 S. 4°.

U. BIGLER. Potential eines homogenen rechtwinkligen Polyeders. Bern. Mitt. Nr. 1184. 127-142.

Der Verfasser behandelt den Gegenstand ungefähr von dem Gesichtspunkte aus wie Hr. Röthig im J. für Math. LVIII. 249-258.

Am Anfange schreibt der Verfasser: „Aus der Literatur über diesen Gegenstand ist mir nur ein Aufsatz des Hrn. Röthig aus dem Jahre 1860 bekannt.“ Es hat danach den Anschein, dass Hr. Bigler die beiden Aufsätze nicht kennen gelernt hat: Mehler, „Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders“ (J. für Math. LXVI. 375-381) und Mertens, „Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders“ (J. für Math. LXIX. 286-288). Lp.

J. J. Somoff. Ueber die Anziehung eines Punktes nach dem Newton'schen Gesetze durch ein homogènes Polyeder. Mosk. Math. Samml. XIII. 129-166. (Russisch.)

A. M. Liapunoff. Ueber den Körper von grösstem Potential der Anziehungskraft. Chark. Ges. II. 63-73. (1886.)

A. Vaschy. Sur la nécessité de la loi d'attraction de la matière. Almeida J. (2) V. 165-172. (1886.)

Ein Beitrag zur Aetherstosstheorie. Die gewöhnliche Beweisführung zur Ableitung der Beschleunigung als umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Entfernung wird als ungenau bemängelt: „Wenn eine gewisse Anzahl von Aether-Atomen, welche sonst M treffen würden, daran durch die Begegnung mit M' verhindert wird, so werden dafür andere, welche nicht nach M gelangt wären, durch ihr Abprallen von M' dorthin gesandt, und nichts beweist, dass zwischen diesen beiden Wirkungen, von denen die eine M nach M' hin, die andere M von M' weg drängt, kein Ausgleich stattfinden kann“. Der Verf. unternimmt einen Beweis auf Grund folgender Annahmen: 1. „Es ist kein Grund vorhanden, für ein Atom einen Zustand der Wärme oder irgend einer potentiellen Energie zu betrachten; seine einzige Energie wird durch seine halbe lebendige Kraft der Translation dargestellt; hieraus folgt, dass der Stoss der beiden Atome die Summe ihrer lebendigen Kräfte nicht ändern darf. 2. Die Massen m (der

Aethermolecüle) sind gleich und tauschen daher nur ihre gegenseitigen Geschwindigkeiten bei einer Begegnung aus; alles trägt sich bei dieser Annahme so zu, wie wenn sie sich nie begegneten". Mit Hülfe dieser Annahmen gelingt der gewünschte Nachweis. Das Gesetz vom Producte der Massen dagegen scheint dem Verfasser schwer beweisbar ohne die Einführung einer Hypothese über den Massenbegriff. Dieser Teil des Newton'schen Gesetzes ist ja eben derjenige, der allen Erklärungsversuchen den zähesten Widerstand entgegenstellt und zu dessen Erläuterung jeder Erklärer sonst zu neuen verwickelten Annahmen zu greifen pflegt.

Lp.

P. Volkmann. Ueber Fern- und Druckwirkungen. Schr. d. Königsb. Ges. XXVII. 95-103. (1886.)

Eine gedrängte Uebersicht über die historische Entwickelung der wissenschaftlichen Anschauungen von Newton bis Faraday und Maxwell. „Man wird nicht mehr erwarten dürfen, als die Gesichtspunkte angedeutet zu finden, nach denen die Forschung in dieser Richtung sich bisher entwickelt hat und vielleicht noch entwickeln wird."

Lp.

E. Lampe. Bemerkungen über die Abhandlung des Hrn. J. W. Häussler: „Die Schwere analytisch dargestellt, als ein mechanisches Princip rotirender Körper". Exner Rep. XXIII. 571-574.

J. W. Häussler. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn E. Lampe zu meiner Abhandlung: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper". Exner Rep. XXIV. 60-62 (1888).

E. Lampe. Replik auf die „Erwiderung" des Herrn J. W. Häussler. Exner Rep. XXIV. 324-327 (1888).

In Bezug auf den Gegenstand der Polemik vergleiche man den Bericht über die erste Arbeit des Hrn. Häussler F. d. M. XVIII. 1886. 930.

Lp.

E. LAMPE. Ueber eine Aufgabe aus der Mechanik. Berl. phys. Ges. Verh. VI. 61-62.

Wird unter der geographischen Breite φ ein Kilogrammstück 1 Meter hoch gegen die Richtung der Schwere gehoben und hier festgehalten, so wird (unter gewissen Voraussetzungen über die Constitution der Erde) die Rotationsgeschwindigkeit ω der Erde um den Betrag $64.\ 10^{-33} \cos^2\varphi\ .\ \omega$ verringert. Lp.

J. FRASER. The mystery of gravity. London. 31 S. 8°.

L. BIRKENMAJER. Neue Theorie der Gestalt und der Gravitation der Erde. Krak. Ber. XIV und Krak. Denkschr. XIII. (Polnisch) 1887.

O. FISHER. On the variation of gravity at certain stations of the Indian arc of the meridian in relation to their bearing upon the constitution of the Earth's crust. Phil. Mag. (5) XXII.

Anzeige durch Hergesell in Petermann's Mitt XXXIV. 31-32. Lp.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

J. J. THOMSON. On some applications of dynamical principles to physical phenomena. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII(A). 471-526.

Der Verfasser meint, infolge der von ihm näher ausgeführten Gründe, es dürfte interessant sein, durch die Anwendung rein mechanischer Principien manche Resultate abzuleiten, welche gewöhnlich mit Hülfe des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie erhalten werden, nicht minder auch einige andere, die früher überhaupt nicht erschlossen waren. Dies beabsichtigt er in der gegenwärtigen Abhandlung zu thun, gerade wie in einer vordem unter gleichem Titel veröffentlichten (Lond. Phil. Trans. CLXXVI. 307-342, F. d. M. XVII. 1885. 942). In dieser ersten Veröffentlichung betrachtete er die Beziehung zwischen Wärme-, elastischen und magnetischen Erscheinungen, berücksichtigte aber nicht Erscheinungen, bei denen chemische und quasi-chemische Processe beteiligt waren, wie Dissociation, Verdampfung, Auflösung, chemische Verbindung, oder alle Wirkungen, die nicht umkehrbar sind, wie die von dem elektrischen Widerstand der Metalle und

Elektrolyten herrührenden. In der gegenwärtigen Arbeit versucht er die Anwendung derselben Principien oder ähnlicher sowohl auf die oben erwähnten Erscheinungen als auch auf einige zusätzliche Phänomene von der in der ersten Abhandlung erörterten Art. Cly. (Lp.)

Love. On recent English researches in vortex motion. Klein Ann. XXX. 326-344.

Eine Inhaltsangabe dieser vorwiegend referirenden Abhandlung ist um so weniger erforderlich, als über die besprochenen Abhandlungen selbst an geeigneter Stelle berichtet ist. F. K.

A. Seydler. Untersuchungen über verschiedene mögliche Formen des Kraftgesetzes zwischen Massenteilchen. Prag. Abh. 7. I. 1-50.

Die Abhandlung enthält eine mathematische Ausführung der Fechner'schen Idee eines allgemeinen Kraftgesetzes. Es sollte danach in einem System von Massenteilchen nicht nur binäre Kräfte geben, welche von der Entfernung je zweier Teilchen abhängen, sondern auch ternäre, quaternäre etc., d. h. solche Kräfte, welche durch die gegenseitige Lage von je 3, 4 etc. Massenteilchen bestimmt wären, schliesslich neben all den niedrigeren eine höchste Kraftwirkung stattfinden zwischen sämtlichen Teilchen, welche von der Configuration des ganzen Systems abhängig wäre. Der Verfasser findet, dass es unendlich viele Kraftgesetze geben kann, bei welchen dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft sowie den Schwerpunkts- und Flächensätzen ebenso gut genügt wird wie bei der gewöhnlichen Annahme, dass immer nur je zwei Massenteilchen in der Richtung ihrer Verbindungslinie mit einer von ihrer Entfernung abhängigen Intensität auf einander wirken. Er wendet sich damit insbesondere gegen de Saint-Venant, der in seiner Uebersetzung von Clebsch's Theorie der Elasticität geschlossen hatte, dass eine solche allgemeinere Annahme mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie in Widerspruch geraten würde.

Wird nun weiter die Forderung gestellt, dass die Kraftfunction in Bezug auf die einzelnen Massenteilchen und ihre Entfernungen symmetrisch sei, so gelangt man zu einem schon specialisirten Gesetze, das aber noch viel allgemeiner ist als das in der Physik bisher allein angenommene und für die Gravitation auch bewährte, und dieses letztere ist als ein ganz specieller Fall in jenem enthalten. Neben diesem enthält das allgemeine Gesetz die besonderen Wirkungsgesetze für ternäre, quaternäre, ... Gruppen, worin die Wechselwirkungen zwischen drei, vier, ... Massenteilchen nach dem gemeinsamen Schwerpunkte gerichtet und für jeden Punkt von dessen Masse, seiner Entfernung vom Schwerpunkte und einer für alle Punkte gleichwertigen Function ihrer Configuration abhängig sind. Fechner's specielle Annahme über die Form des Gesetzes, wonach z. B. in einem ternären Systeme die jeden Punkt nach dem Schwerpunkte treibende Kraft seiner Masse direct und dem Quadrate des Productes aus den Abständen der drei Punkte umgekehrt proportional wäre, würde mit den allgemeinen Sätzen der Mechanik nicht im Einklange stehen; im wesentlichen aber ergiebt sich eine Bestätigung der Fechner'schen Hypothese.

Im zweiten Teile seiner Arbeit sucht der Verfasser mittels der vorher entwickelten Lehre einen dunklen Punkt der Elasticitätstheorie aufzuklären. Die (namentlich von französischen Mathematikern ausgebildete) Theorie, deren Grundlage die Annahme binärer Molecularkräfte ist, ergiebt für homogene, isotrope Stoffe einen einzigen Elasticitätscoefficienten, während die Erfahrung auf die Existenz von zwei solchen Coefficienten hinweist. Es zeigt sich nun, dass die Annahme höherer Kräfte neben den binären auf zwei von einander unabhängige Coefficienten führt. Während also in grösseren Entfernungen ausschliesslich binäre Kräfte zur Geltung kommen müssen, wie die Thatsachen der Astronomie beweisen, liefert für die Molecularwirkungen die auf jene gegründete Theorie nur annähernde Resultate und bedarf einer durch die Existenz höherer Kräfte bedingten Modification.

Im zweiten Teile der Arbeit wird auch die Frage des Ver-

hältnisses der Massen- oder Punktkräfte zu den Flächenkräften berührt, und ein Weg angedeutet, auf dem man bei der Annahme von Punktkräften zur Einführung von Spannungen gelangt. Da man mit jeder der beiden Kraftarten allein auskommen kann, so scheinen dem Verfasser der Atomismus und Dynamismus gleichberechtigt zu sein, indessen dürfte auch vom Standpunkte der Mechanik aus der Atomismus als die günstigere Annahme erscheinen. Sbt.

W. Sutherland. The law of attraction amongst the molecules of a gas. Phil. Mag. (5) XXII. 81-95.

W. Sutherland. On the law of molecular force. Phil. Mag. (5) XXIV. 113-134, 168-187.

Indem der Verf. sich auf die von Joule und Thomson ausgeführten Versuche stützt, die in ihren Abhandlungen über die „Thermal effects of fluids in motion" beschrieben sind, versucht er in dem ersten Artikel zu beweisen, dass die Molekeln eines Gases sich mit einer der vierten Potenz der Entfernung umgekehrt proportionalen Kraft anziehen. Der Zweck der beiden anderen Artikel ist der Nachweis, dass dasselbe Gesetz für die Materie im flüssigen Zustande gilt, kurzum, dass dies das eine Grundgesetz der Einwirkung von Molekel auf Molekel in molecularem Abstande ist. Gbs. (Lp.)

O. Pilling. Ueber die Grösse der Molecüle in Flüssigkeiten. Prog. Realgymn. Erfurt.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, das Volumen der Molecüle einer Flüssigkeit aus der Temperatur des Siedepunktes und dem dabei beobachteten specifischen Volumen abzuleiten. Die Untersuchung kommt in dem vorliegenden Aufsatze nicht zum Abschluss und soll im nächstjährigen Programm fortgesetzt werden. Deswegen mögen nähere Mitteilungen über die Methode und Resultate des Verfassers dem nächsten Jahrgange vorbehalten bleiben. Sbt.

M. Brillouin. Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu capable de transmettre des actions en raison inverse du carré de la distance. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 201-240.

Nach eingehenden Bemerkungen über die Maxwell'sche Theorie des Magnetismus stellt sich der Herr Verfasser die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den Druckkräften und den Deformationen eines Mediums zu finden, bei welchem es möglich ist, dass die Druckkräfte und die Deformationsarbeit sich durch 3 Grössen α, β, γ in folgender Weise darstellen lassen:

$$N_1 = \frac{k}{8\pi}(2\alpha^2-\varphi^2)+N'_1,\quad N_2 = \frac{k}{8\pi}(2\beta^2-\varphi^2)+N'_2,$$

$$N_3 = \frac{k}{8\pi}(2\gamma^2-\varphi^2)+N'_3,$$

$$T_1 = \frac{k}{4\pi}\beta\gamma+T'_1,\quad T_2 = \frac{k}{4\pi}\gamma\alpha+T'_2,\quad T_3 = \frac{k}{4\pi}\alpha\beta+T'_3,$$

$$E = \frac{k}{8\pi}\varphi^2+E',\quad (\varphi^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

(N'_i, T'_i und E' sind constant).

Es wird zunächst gezeigt, dass ein gewöhnliches elastisches Medium, bei welchem die Druckkräfte lineare Functionen der Deformationen sind, dieser Bedingung nicht genügt.

Wenn eine Deformationsarbeit E möglich sein soll, so müssen die sechs Druckcomponenten N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 die Ableitungen von E nach den Componenten der Deformation sein:

$$D_x = \frac{\partial u}{\partial x},\qquad D_y = \frac{\partial v}{\partial y},\qquad D_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$G_x = \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\qquad G_y = \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\qquad G_z = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da ferner die Grösse E bei einem isotropen Medium nur von der Grösse, nicht aber von der Lage der Deformation abhängen kann, so kommen in E nur die Invarianten des Deformationsellipsoids vor, nämlich

$$(3)\quad \begin{cases} J_1 = D_x+D_y+D_z, \\ J_2 = D_yD_z-\frac{1}{4}G_x^2+D_zD_x-\frac{1}{4}G_y^2+D_xD_y-\frac{1}{4}G_z^2, \\ J_3 = D_xD_yD_z-\frac{1}{4}D_xG_x^2-\frac{1}{4}D_yG_y^2-\frac{1}{4}D_zG_z^2+\frac{1}{4}G_xG_yG_z, \end{cases}$$

so dass man hat

$$(6)\quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\partial E}{\partial D_x} = \dfrac{\partial E}{\partial J_1} + (J_1 - D_x)\dfrac{\partial E}{\partial J_2} + (D_y D_z - \tfrac{1}{4}G_x^2)\dfrac{\partial E}{\partial J_3}, \\ T_1 = \dfrac{\partial E}{\partial G_x} = -\tfrac{1}{2}G_x \dfrac{\partial E}{\partial J_2} + (\tfrac{1}{4}G_y G_z - \tfrac{1}{2}D_x G_x)\dfrac{\partial E}{\partial J_3}. \end{cases}$$

Nun folgen aber aus der für N_1, T_1 etc. geforderten Form drei Beziehungen der folgenden Art:

$$(N_1 + N_3 - N_1' - N_3')(N_2 + N_3 - N_2' - N_3') - (T_1 - T_1')^2 = 0,$$

deren Erfüllung zunächst erfordert:

$$N_1' = N_2' = N_3' = P, \qquad T_1' = T_2' = T_3' = 0.$$

Weiter folgen aus ihnen, wenn

$$(7)\quad A = 2P - 2\frac{\partial E}{\partial J_1} - J_1\frac{\partial E}{\partial J_2} - J_2\frac{\partial E}{\partial J_3}, \quad B = -\frac{\partial E}{\partial J_2}, \quad C = \frac{\partial E}{\partial J_3}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} (A-P)^2 + (A-P)BJ_1 + (A-P)CJ_2 + BC(J_1 J_2 - J_3) = 0, \\ -(A-P)B - BCJ_2 + C^2 J_3 = 0, \quad -(A-P)C + B^2 - BCJ_1 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man $(A-P)$ aus den beiden letzten dieser Gleichungen, so erhält man

$$B^3 - B^2 CJ_1 + BC^2 J_2 - C^3 J_3 = 0,$$

d. h. $B:C$ ist gleich einem Hauptdrucke D, also

$$(9)\qquad B = CD_1, \quad A = P - CD_1 J_1 + CD_1^2,$$

und weiter ist

$$\frac{k}{4\pi}\varphi^2 = 6P - 2(N_1 + N_2 + N_3) = C(3D_1^2 - 2D_1 J_1 + J_2).$$

Nun ist aber wegen $D_1^3 - D_1^2 J_1 + DJ_2 - J_3 = 0$:

$$\frac{\partial D_1}{\partial J_1}(3D_1^2 - 2D_1 J_1 + J_2) = D_1^2, \quad \frac{\partial D_1}{\partial J_2}(3D_1^2 - 2D_1 J_1 + J_2) = -D_1,$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial J_3}(3D_1^2 - 2D_1 J_1 + J_2) = 1,$$

und folglich erhält man weiter

$$\frac{\partial(E - J_1 P)}{\partial J_i} = \frac{k}{4\pi}\varphi^2 \frac{\partial(D_1 - \frac{1}{2}J_1)}{\partial J_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Da ferner $E = \dfrac{k}{8\pi}\varphi^2 + E_1$ sein sollte, so ergiebt sich

$$P = 0, \; E = E_1 + F_0\, e^{2D_1 - J_1}, \quad \frac{k}{8\pi}\varphi^2 = F_0 e^{2D_1 - J_1}.$$

Bildet die Hauptdilatation D_1 mit den Axen die Richtungscosinus l, m, n, so folgt

$$\alpha = \pm l\varphi, \quad \beta = \pm m\varphi, \quad \gamma = \pm n\varphi.$$

Es entsteht nun weiter die Frage, wie die Verrückungen u, v, w beschaffen sind, wenn die Grössen α, β, γ als Functionen der Coordinaten gegeben sind.

Für allgemeine Werte α, β, γ sind die Ausdrücke zu complicirt, als dass sie hier Platz finden könnten. Wird aber alles unabhängig von der z-Richtung, also

$$\gamma = 0, \quad w = 0,$$

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\alpha^2-\beta^2}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\alpha\beta}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

woraus sich — was der Verfasser nicht besonders angiebt — nach Einführung complexer Veränderlicher $u+iv$ und $u-iv$ durch blosse Quadraturen ergeben.

Das Gesagte wird zur Kennzeichnung des Inhaltes der anregenden und interessanten Abhandlung hinreichen. F. K.

Moormann. Ueber das Wesen der Festigkeit. Centralbl. d. Bauverw. VII. 169-171.

Der Herr Verfasser glaubt die Elasticitätserscheinungen dadurch völlig erklären zu können, dass er, entgegen der gewöhnlichen Vorstellung von gegenseitigen Kräften, welche je nach der Distanz attractiv und repulsiv wirken, zwischen den verschiedenen Teilen eines Körpers sowie zwischen den Ponderabilien und dem Aether nur repulsive Kräfte voraussetzt. Bezüglich der Begründung verweisen wir auf die Abhandlung selbst.

F. K.

Th. Liebisch. Ueber eine besondere Art von homogenen Deformationen krystallisirter Körper. Gött. N. 435-448.

Die betrachtete Deformation ist die sogenannte einfache Schiebung, bei welcher alle Teilchen parallel der Gleitfläche um Strecken verschoben werden, die dem Abstande von der Gleitfläche proportional sind.

Die gewonnenen Resultate werden auf die Erklärung der mechanischen Bildung von Zwillingskrystallen angewandt.

F. K.

H. Resal. Traité de Physique mathématique. Deuxième édition, augmentée et entièrement refondue. I. Capillarité. Elasticité. Lumière. Paris. Gauthier-Villars.

P. G. Tait. Conférences sur quelques-uns des progrès récents de la Physique. Traduit par Krouchkoll. Paris. Gauthier-Villars.

C. Christiansen. Inledning til den mathematiske Fysik. Del I: Potentialet. Mekanisk Fysik. Kjöbenhavn. 218 S. 8°.

J. Wislicenus. Ueber die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molecülen und ihre Bestimmung in geometrisch isomeren ungesättigten Verbindungen. Leipzig. 77 S. 8°.

E. Boggi-Lera. Sulla cinematica dei mezzi continui. Pisa. 1886. 47 S. 8°.

N. Petroff. Neue Theorie der Reibung. Uebersetzt von L. Wurzel. Hamburg. VI u. 187 S. 8°.

Langlois. Sur l'homogénéité de la formule fondamentale du mouvement atomique. Ass. Franç. (Toulouse) 235-241.

M. Cabannellas. Mémoire sur les principes et conditions techniques de l'application de l'électricité au transport et à la distribution de l'énergie sur les principales forces Chaleur, Lumière, Electricité, Action chimique, Action mécanique. Ing. Civ. I. 34.

B. Elasticitätstheorie.

W. J. Ibbetson. An elementary treatise on the mathematical theory of perfectly elastic solids; with a short account of viscous fluids. London. Macmillan and Co.

Ausführliche Anzeige in Nature XXXVII. 97-98. Lp.

C. Somigliana. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo limitato da una o due superficie sferiche. Pisa Ann. Sc. Norm. IV. 101-172.

Anwendung einer vom Verfasser in einer früheren Arbeit (Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo, Nuovo Cimento (3) XVII-XVIII) behandelten Methode auf die zwei im Titel angedeuteten Fälle.

Sind u, v, w die Verschiebungen des Punktes (x, y, z) oder $(\varrho, \theta, \varphi)$ eines elastischen isotropen Körpers, und setzt man:

$$u = \varrho^2 \frac{\partial W}{\partial x} + \alpha, \quad v = \varrho^2 \frac{\partial W}{\partial y} + \beta, \quad w = \varrho^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \gamma,$$

wo α, β, γ, W innerhalb des Körpers der Laplace'schen Gleichung genügen, so kann man, wenn α, β, γ bekannt sind, W derart bestimmen, dass die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. Man findet nämlich:

$$W = -\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \varrho^{-\frac{1}{\sigma+2}} \int_{\varrho_0}^{\varrho} (\Omega - \Omega_0) \varrho^{\frac{1}{\sigma+2}-1} d\varrho,$$

wo σ eine Elasticitätsconstante ist, und:

$$\Omega = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}.$$

Ist der Körper eine Kugel, so kann der Fall, wo die Verschiebungen u, v, w in jedem Punkte der Oberfläche und die Kräfte X, Y, Z in jedem inneren Punkte bekannt sind, nach den in der oben angeführten Arbeit entwickelten Principien auf die drei folgenden Unterfälle zurückgeführt werden:

1. $X = Y = Z = 0, \quad u = \frac{1}{r}, \quad v = w = 0,$

2. $X = Y = Z = 0, \quad v = \frac{1}{r}, \quad u = w = 0,$

3. $X = Y = Z = 0, \quad w = \frac{1}{r}, \quad u = v = 0.$

Im ersten Unterfalle kann man:

$$u = (\varrho^2 - R^2)\frac{\partial W}{\partial x} + \varphi, \quad v = (\varrho^2 - R^2)\frac{\partial W}{\partial y}, \quad w = (\varrho^2 - R^2)\frac{\partial W}{\partial z}$$

setzen, wo R der Radius der Kugel, φ die Green'sche Function ist; und hieraus berechnet man vermittelst der obigen Formel W. Die Unterfälle 2 und 3 lassen eine ganz analoge Behandlung zu.

Zweitens wird der Fall untersucht, wo der Körper den Aussenraum einer Kugel einnimmt.

Drittens setzt man voraus, dass nicht die Verschiebungen, sondern die Kräfte auf der Oberfläche bekannt sind.

Endlich wird die Thomson'sche Methode auf den Fall eines von zwei Kugelflächen begrenzten isotropen elastischen Körpers angewandt.

Die Formeln wimmeln von Druckfehlern; wir haben deren über 30 gezählt.

Der Verfasser deutet auf die gleichzeitig erschienene Arbeit von Cerruti: Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa (Roma Acc. L. Rend. (4) II_1. 461-469, 586-592; F. d. M. XVIII. 1886. 964) hin. Vi.

C. Chree. A new solution of the equations of an isotropic elastic solid. Quart. J. XXII. 89-118.

Bericht s. F. d. M. 1886. XVIII. 959.

E. Beltrami. Sulle equazioni generali dell' elasticità. Nuovo Cimento. (3) XXI. 25-36, 113-121.

Abdruck des letzten Teiles der in Annali di Mat. (2) X. 188-211 (F. d. M. XIII. 1881. 732-733) erschienenen Abhandlung. Vi.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topas und Baryt. Gött. N. 561-631.

Die Elasticitätsconstanten c_{hk} für das rhombische System sind definirt durch die Formeln

$$\begin{array}{lll} -X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z, & & -Y_z = c_{44}y_z, \\ -Y_y = c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z, & (c_{hk} = c_{kh}), & -Z_x = c_{55}z_x, \\ -Z_z = c_{31}x_x + c_{32}y_y + c_{33}z_z, & & -X_y = c_{66}x_y. \end{array}$$

Es werden ferner mit S die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix},$$

mit S_{hk} ihre Unterdeterminanten, endlich mit s_{hk} der Quotient S_{hk}/S bezeichnet. Dann sind für das rhombische System nur die Grössen

$$s_{11},\ s_{22},\ s_{33},\ s_{44},\ s_{55},\ s_{66},\ s_{23},\ s_{31},\ s_{12}$$

von Null verschieden. Bildet die Längsrichtung eines prismatischen Stabes mit den krystallinischen Hauptaxen des Materials die Richtungscosinus α, β, γ, ist B seine Breite, D seine Dicke, L seine Länge, P die Belastung, so ist die Durchbiegung

$$\eta = \frac{EPL^3}{4BD^3},$$

wo

$$E = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2$$

gesetzt ist. Durch Beobachtungen von Biegungs[illegible]

können also nur sechs Combinationen der Elasticitätsconstanten bestimmt werden. Bezeichnet man mit I, II, III die Hauptrichtungen, mit IV, V, VI die Richtungen, welche in den Hauptebenen liegen und die Winkel der betreffenden Hauptaxen halbiren, so ist

$$E_I = s_{11},\ E_{II} = s_{22},\ E_{III} = s_{33},\quad E_{IV} = s_{22}+s_{33}+s_{44}+2s_{23},$$
$$E_V = s_{33}+s_{11}+s_{55}+2s_{31},\quad E_{VI} = s_{11}+s_{22}+s_{66}+2s_{12}.$$

Um die Elasticitätscoefficienten vollständig zu bestimmen, muss man die Drillung zu Hülfe nehmen. Bezeichnet man mit T den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = {} & 4(s_{11}\alpha^2\alpha_1^2+s_{22}\beta^2\beta_1^2+s_{33}\gamma^2\gamma_1^2) \\ & +2[(s_{44}+4s_{23})\beta\beta_1\gamma\gamma_1+(s_{55}+4s_{31})\gamma\gamma_1\alpha\alpha_1+(s_{66}+4s_{12})\alpha\alpha_1\beta\beta_1] \\ & +s_{44}(\beta^2\gamma_1^2+\gamma^2\beta_1^2)+s_{55}(\gamma^2\alpha_1^2+\alpha^2\gamma_1^2)+s_{66}(\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\alpha_1^2), \end{aligned}$$

wo (α, β, γ) wieder die Längsrichtung, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ die Richtung der grösseren Querdimension bestimmt; bezeichnet man ferner durch den Index I, II, III das Zusammenfallen der Längsrichtung mit einer der Hauptaxen, durch den Index a, b, c hingegen diese Eigenschaft für die grössere Querdimension, so ist die Drillung

$$\tau_{IIc} = \frac{3T_{IIc}LN}{BD^3\left(1-\frac{3}{16}\lambda\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{IIa}}{T_{IIc}}}\right)},$$

$$\tau_{IIa} = \frac{3T_{IIa}LN}{BD^3\left(1-\frac{3}{16}\lambda\frac{D}{B}\sqrt{\frac{T_{IIc}}{T_{IIa}}}\right)}.$$

Ferner ist

$$T_{IIc} = T_{IIIb} = s_{44},\quad T_{IIIa} = T_{Ic} = s_{55},\quad T_{Ib} = T_{IIa} = s_{66}.$$

Durch Beobachtungen von Biegungen und Drillungen können also die Grössen s unmittelbar gefunden werden.

Aus ihnen leitet der Herr Verfasser dann rückwärts die Grössen c ab und stellt dann weiter einige in der Elasticitätslehre wichtige Ausdrücke durch die Grössen s dar.

Bezüglich der Versuchsergebnisse verweisen wir auf die Abhandlung selbst. F. K.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Beryll und Bergkrystall. Wiedemann Ann. XXXI. 474-501, 701-723.

Der mathematische Teil der Untersuchung — die Biegung und Drillung prismatischer Stäbe aus krystallinischen Substanzen — stimmt im wesentlichen mit demjenigen der eben besprochenen Abhandlung überein. Unterschiede beruhen darauf, dass es sich vorher um das rhombische System handelte, jetzt um das hexagonale und das rhomboidische, bei welchen andere Beziehungen zwischen den Constanten c_{hk} bestehen. F. K.

Mercadier. Sur la détermination du coefficient d'élasticité d'acier. C. R. CV. 273-276.

J. J. Weyrauch. Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Nach Vorträgen an der Technischen Hochschule zu Stuttgart. Leipzig. Teubner. XIV. u. 366 S. gr. 8° nebst 20 Tafeln.

Der Verf. kennzeichnet den Zweck seines Buches im Vorwort wie folgt:

„Die im vorliegenden Werke gegebene Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger führt zu Formeln und Methoden, mittels welcher die statische Berechnung jener Träger im allgemeinen durch einfache Substitution bekannter Zahlenwerte erledigt werden kann. Wie dies zu geschehen hat, ist überdies in der gleichzeitig erscheinenden Sammlung von Beispielen und Aufgaben zur Berechnung der statisch bestimmten [illegible]ür alle gewöhnlichen und zahlreiche ungewöhnliche F[illegible] ständig gezeigt, dass der projectirende Ingenieur di[illegible] auch ohne eingehendes Studium der Theorie benutzen [illegible] Band als eine Formelsammlung ansehen kann. Di[illegible] stattet dann nebenbei, eventuell durch Rückgreifen auf[illegible] leitungen, jeden Zweifel über Bedeutung und Gültigkeit [illegible] der einzelnen Formeln auszuschliess[illegible]

Die Verdienste des Verfassers um die von ihm bearbeitete Theorie sind bekannt, so dass sie hier eben nur erwähnt zu werden brauchen. Nach seiner Gewohnheit giebt er am Ende der Abschnitte die Literatur des Gegenstandes an. Wir begnügen uns, um den Inhalt vorzuführen, mit der Angabe der Titel der einzelnen Abschnitte.

I. Beliebige ebene Träger. II. Ebene Fachwerke beliebiger Art. III. Balkenträger mit zwei Gelenkauflagern. IV. Einfluss der Gegendiagonalen. V. Continuirliche Gelenkträger. VI. Bogenträger mit drei Gelenken. VII. Träger mit constantem Horizontalschube. Continuirliche Bogenträger. Träger mit schief verschiebbarem Auflager. Träger mit imaginären Gelenken. VIII. Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke mehrfachen Systems auf Grund der Zerlegung in einfache Systeme. — Ein Anhang enthält Bemerkungen über statisch unbestimmte Träger, ein Wortverzeichnis und eine Zusammenstellung der Buchstabenbezeichnungen.

„Weitgehende mathematische Kenntnisse sind für das Studium der vorliegenden Theorie nicht erforderlich. Abgesehen von den §§ 4-6, deren Resultate man als Ergebnisse der reinen Mathematik hinnehmen kann, und einigen für praktische Berechnungen nebensächlichen Differentiationen würde sogar die niedere Analysis mit Ausschluss der Determinantentheorie genügen."

Lp.

J. Röthlisberger. Calcul de la poussée de l'arc élastique à deux pivots. Schweiz. Bauztg. IX. 73-75.

Der Herr Verfasser entwickelt eine Formel für den Horizontalschub eines elastischen Bogens, welche unter Voraussetzung parabolischer Form auf eine Formel von Weyrauch führt. Die Anwendung der Entwickelungen auf einen concreten Fall bildet den Schluss.

F. K.

C. Guidi. Sul calcolo di certe travi composte. Torino Atti XXII. 240-246.

Der Zweck dieser Note ist der, zu zeigen, wie das Biegungsmoment zu berechnen ist, dem ein aus mehreren (auch heterogenen) Balken zusammengesetzter Balken ausgesetzt werden kann, vorausgesetzt, dass die Verbindung zwischen den zusammensetzenden Balken nicht so vollkommen ist, das Gleiten zu verhindern, welches während der Biegung eintritt. Zahlenbeispiele erläutern die abgeleiteten Formeln. Lp.

E. Lottner. Ein praktisches Beispiel zur Festigkeitslehre. Progr. Realgymnasium, Lippstadt.

Die Aufstellung eines Wasserbehälters auf dem Gymnasialgebäude in Lippstadt hat dem Verfasser die Veranlassung geboten, die Anwendung der Clapeyron'schen Formel zur Berechnung der von einer Last auf die Stützpunkte ausgeübten Druckkräfte auf den Fall auszudehnen, dass die Last auf vier in ungleicher Entfernung befindlichen Balken ruht und mit ihren Enden überhängt. Sbt.

M. R. von Thullie. Analytische Bestimmung der ungünstigsten Belastung eines Balkenträgers durch ein System concentrirter Lasten. W. Oestr. Ing. u. Arch. XII. 241-245, 274.

F. von Emperger. Die ungünstigste Belastung eines Balkenträgers durch ein System concentrirter Lasten. Ibid. 272-274.

Bewegt sich ein Lastzug von links nach rechts über einen Träger, so ändert sich das Moment in einer Stelle C, d[illegible] a von dem linken, um b von dem rechten Ende entfernt [illegible] in der Weise, dass eine Verschiebung um dx eine A[illegible] des Momentes um

$$dM = \frac{ab}{a+b}\left(\frac{R'}{a}-\frac{R''}{b}\right)dx$$

mit sich bringt, wo R'' die Resultante der nach der Versch[illegible] auf der rechten Seite von C wirkender [illegible] ist, während R[illegible]

Summe der auf der linken und gerade in C befindlichen Lasten ist. So lange $\frac{R'}{a} > \frac{R''}{b}$, wächst das Moment, während es abnimmt, sobald $\frac{R'}{a} < \frac{R''}{b}$. Deshalb wird ein Maximum nur unter einer solchen Last eintreten können, deren Durchgang durch C einen Zeichenwechsel von $\frac{R'}{a} - \frac{R''}{b}$ bewirkt. Herr v. Thullie stellt fest, dass dieses bekannte Kriterium einer Ergänzung bedarf, falls während des Ueberganges einer Last über C andere Lasten den Balken betreten oder verlassen, und führt dieselbe an.

Herr v. Emperger hebt hervor, dass die analytischen Kriterien nur relative Maxima liefern, und empfiehlt die Anwendung graphischer Methoden. F. K.

H. Zimmermann. Ueber Trägerquerschnitte von möglichst grossem Widerstandsmoment. Centralbl. d. Bauverw. III.

Das Widerstandsmoment eines Doppelt-T-Trägers mit Steghöhe h_0, Stegbreite δ_0 und der Gurtfläche f wird, wenn die ganze Trägerhöhe sich wenig von h_0 unterscheidet, durch die Formel gegeben:

$$W = \frac{1}{6}\delta_0 h_0^2 + f h_0.$$

Führt man die Fläche des ganzen Querschnittes $F = 2f + h_0\delta_0$ statt f ein, so ergiebt sich

$$W = \frac{1}{2}Fh_0 - \frac{1}{3}\delta_0 h_0^2.$$

Bei vorgeschriebenem δ erreicht dies ein Maximum für $\delta_0 h_0 = \frac{3}{4}F$, d. h. wenn auf den Steg $\frac{3}{4}F$, auf die Gurtung $\frac{1}{4}F$ kommen. Der Anteil des Steges am Widerstandsmoment ist in diesem Falle gleich demjenigen der Gurtung. Soll hingegen δ proportional zu h_0, z. B. gleich nh_0 sein, so erhalten wir für das Maximum

$$\delta h_0 = \frac{1}{2}F.$$

Es ist also der Querschnitt des Steges gleich demjenigen der

Gurtung; jedoch ist der Anteil des Steges am Widerstandsmoment nur der dritte Teil desjenigen der Gurtung. F. K.

H. ZIMMERMANN. Winkeleisen für Druckstäbe. Centralbl. d. Bauverw. VII. 36.

Für Winkeleisen mit dem Querschnitt f, der Schenkellänge b und verhältnismässig geringer Schenkeldicke sind die beiden Hauptträgheitsmomente für den Winkel α:

$$J_1 = \tfrac{1}{3} f b^2 \sin^2\alpha, \quad J_2 = \tfrac{1}{12} f b^2 \cos^2\alpha.$$

Wird α so gewählt, dass beide Grössen einander gleich werden, so erhält man die günstigste Anordnung, d. h. diejenige, bei welcher der kleinere der beiden Werte möglichst gross wird. Es tritt dies ein für $tg\alpha = \frac{1}{2}$, wo

$$J_1 = J_2 = \tfrac{1}{15} f b^2$$

wird. F. K.

H. ZIMMERMANN. Berechnung des Eisenbahn-Oberbaus. Z. f. Bauwesen. XXXVII. 123-174.

Als Grundlage der Berechnung dient die von Winkler aufgestellte und später allgemein benutzte Hypothese, dass die Einsenkung der Schwellen in die Bettung dem an dieser Stelle herrschenden Drucke proportional ist. Aus bekannten Gesetzen der Festigkeitslehre folgt dann für die Einsenkung die Differentialgleichung

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = -4x^4y$$

(E Elasticitätsmodul, J Trägheitsmoment des Querschnittes, x e[illegible] von der Bettung abhängige Constante), mit der Massgabe, da[illegible] y', y'' überall stetig sind, dass y''' nur an den Belastungsstelle[illegible] $x_2, \ldots, x_n$ unstetig wird, und zwar so, dass

$$EJ(y'''_{x_i+0} - y'''_{x_i-0}) = P_i \text{ (der Belastung in } x_i)$$

wird. An den freien Enden ist $y'' = 0$ und $y''' = 0$, an fest[illegible] Enden hingegen $y = 0$ und $y' = 0$.

Die Abhandlung behandelt das so [illegible] bekann[illegible]

ten Methoden zu lösende mathematische Problem im Hinblick auf die vorliegende Frage der Technik.

Der eigentlichen Bearbeitung geht eine historisch-kritische Besprechung der früheren Bearbeitungen voran. Den Schluss bilden ausführliche Zahlentabellen. F. K.

H. Zimmermann. Zur Berechnung von Schienenlaschen. Centralbl. d. Bauverw. 297-299, 305-307.

Schienenlaschen nennt man verbindende Glieder zweier an einander stossenden Schienen. Der Herr Verfasser bestimmt in eleganter Weise den Zusammenhang zwischen den Deformationen der Schienen und den auf die Laschen wirkenden Kräften. Die allgemeinen Betrachtungen werden durch ein praktisches Beispiel erläutert. F. K.

H. Zimmermann. Zur Theorie des Eisenbahnoberbaus. Deutsche Bauztg. XXI. 230.

Handelt von dem für den Eisenbahnbau wichtigen Ausdruck

$$\sqrt[4]{\frac{cb}{4EJ}}$$

(c Constante der Bettung, b Breite, E Elasticitätsmodul, J Trägheitsmoment). Der reciproke Wert dieser Grösse hat die Dimension einer Länge; er spielt in der Beurteilung des Eisenbahnoberbaus eine ähnliche Rolle, wie verwandte Ausdrücke in anderen Teilen der Festigkeitslehre. F. K.

W. Launhardt. Die Berechnung der Ablösung von Baulasten und die Vergleichung von Bauausführungen in Materialien von verschiedener Dauerhaftigkeit. Hannov. Zeitschr. XXXIII.

Die betreffenden Aufgaben werden mit Hülfe von Principien und Ueberlegungen gelöst, wie sie in der Zinseszinsrechnung üblich sind, und lassen sich daher vielleicht als Uebungsbeispiele im Unterricht verwerten.

Die praktische Seite des Aufsatzes kommt hier natürlich nicht in Betracht. F. K.

H. HÖFER. Nutzeffect des Explosivs bei der Sprengarbeit. W. Oestr. Ing. u. Arch. XII. 106-107.

Wenn eine Mine in der Tiefe R unter einer ebenen Fläche bei der Explosion noch gerade im Stande ist Teilchen emporzuschleudern, so wird die im Minenherde frei werdende Wurfarbeit dem Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ proportional sein. Kommt der Minenherd der freien Ebene noch näher, so wird ein Wurfkegel entstehen, dessen Volumen als ein Maximum bei einem Winkel von 45°, und einer Höhe $w = \frac{R}{\sqrt{2}}$ betrachtet wurde, so dass sich ein Nutzeffect von

$$\frac{\frac{\pi}{3\sqrt{2^3}}R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0{,}0884 \text{ oder } 8{,}84\,\%$$

ergab. Nun ist durch Versuche nachgewiesen, dass die Seite des Wurfkegels um so kleiner wird, je näher der Minenherd an die freie Fläche rückt; das Maximum tritt thatsächlich bei einem Winkel von 48° ein, und die Höhe des Kegels wird $\frac{R}{1{,}554}$; es berechnet sich demgemäss der Nutzeffect auf 5,54 Procent. Es wird noch darauf hingewiesen, dass der Nutzeffect von der speciellen Art der explodirenden Substanz unabhängig sein müsse, was durch Versuchsergebnisse im grossen und ganzen bestätigt werde.

F. K.

G. MOCH. Des canons à fils d'acier. Rev. d'Art. XXIX. 26-47, 197-221, 332-350, 459-481, 539-559.

Fortsetzung und Schluss der Arbeit, über deren Anfang F. d. M. XVIII. 1886. 981 berichtet ist. Die vorliegenden Artikel betreffen fast nur technische Fragen. Wir begnügen uns daher mit der Angabe der Titel der behandelten Gegenstände.

XVI. Einfluss der Erwärmung der Kanone. XVII. Ueber den Querschnitt und die Natur der Drähte.

Zweiter Teil. Ueber die Trennung der Widerstände gegen das Zerspringen und das Absprengen des Verschlussstückes. I. Die Aufgabe des Längswiderstandes. II. Verfalzte Reifen und doppelkegelförmige Metall-Construction. III. Zwischenlagerung von Längsdrähten in die Masse der Reifung. IV. Vollständige Trennung beider Widerstände. V. Ueber die Grösse des Verbrennungsraumes. VI. Ueber die Festigkeit des Verschlussstückes.

Dritter Teil. Beschreibung der verschiedenen vorhandenen Drahtkanonen. I. Woodbridge-Kanonen. II. Hotchkiss-Kanonen. III. Longridge-Kanonen. IV. Amstrong- und Woolwich-Kanonen. V. Schultz-Kanonen.

Vierter Teil. Beispiel zur Anwendung der Theorie.

Ueberblick und Schlussfolgerungen. „Wir glauben bewiesen zu haben, dass die Anwendung der Stahldrähte die Herstellung von Kanonen gestattet, deren Dicke unterhalb der dünnsten liegt, welche man bisher angefertigt hat, und deren Bestandteile unter einem Drucke von 4000kg auf 1qcm nur einen Zug in einer einzigen Richtung erleiden würden, der gleich der Hälfte des elastischen Widerstandes des Metalles ist.“ Lp.

G. Moch. Canons à fils d'acier système Very. Rev. d'Art. XXX. 265-268.

Beschreibung eines Geschützrohres mit Drahtumwickelung nach den Plänen des früheren amerikanischen Marineofficiers Very aus dem Jahre 1882. Lp.

P. Laurent. Du déculassement des bouches à feu fermées par une vis à segments. Rev. d'Art. XXIX. 152-168, 222-243.

Fortsetzung der Arbeit, über welche F. d. M. XVIII. 1886. 966 berichtet ist. Während in den ersten beiden Aufsätzen die Schraube als Vollschraube angenommen war, wird jetzt vorausgesetzt, dass aus der Peripherie eines Querschnittes gleich grosse Segmente ausgeschnitten sind. Die Abhandlung zerfällt in zwei

Teile. Im ersten Teile wird die Schraube mit drei Segmenten behandelt. Die Lamé'schen Differentialgleichungen werden für den vorliegenden Fall unter der Annahme $\lambda = 2\mu$ aufgestellt, und zwei particuläre Integrale, gerade wie im Falle der Vollschraube, aus den dort gefundenen abgeleitet. Das Princip der Rechnung ist also dasselbe wie in der früher besprochenen Abhandlung. Die Discussion der Ausdrücke für die Componenten der elastischen Kräfte und die Verrückung U führt zu manchen praktischen Folgerungen, von denen die folgende angeführt werden möge: „Wir sind der Meinung, dass man sich bisher nicht genügend um die dem Gewinde der Kanonenschraube zu gebenden Abmessungen gekümmert hat, und wir kennen fast nur die Einrichtung von Reffye, die mit einer Verschlussschraube versehen ist, deren Radius sich der durch das Minimum von X_3 auferlegten Bedingung nähert. Dies ist einer der Gründe, der, abgesehen vom Querschnitte der Schraube, die Anwendung einer so kurzen Schraube gestattet hat. Sehr viele Kanonen, deren Widerstand gegen das Absprengen man für sehr beträchtlich annimmt, weil der Radius der Schraube sich demjenigen der Verschlussplatte nähert, und weil eine relativ grosse Dicke oberhalb des Schraubenlagers vorhanden ist, würden unverhältnismässig widerstandsfähiger sein, wenn man einen grösseren Radius anwendete, welcher der Bedingung des Minimums der elastischen Hauptkraft genügte."

Im zweiten Teile werden die Rechnungen auf eine Schraube mit beliebig vielen Segmenten ausgedehnt. Es ergiebt sich, dass die Vollschraube in allen Beziehungen der segmentirten Schraube überlegen ist, und dass keine Schraube existirt, deren Segmentenzahl für die verschiedenen Componenten der elastischen Kräfte ein Minimum giebt. Eine Schraube ist also um so besser, je mehr Segmente sie hat, da die Grenze der Segmentirung auf die Vollschraube hinführt. Lp.

J. Taubeles. Ueber die Effectverluste beim Seilbetriebe.
Techn. Blätter. XIX_1. 191-207.

Die Abhandlung, deren Zweck aus dem Titel hervorgeht, ist nur von technischem Interesse. F. K.

E. Bouzerand. Essai sur la recherche de la vitesse au pas qui convient au porteur d'Artillerie. Rev. d'Art. XXIX. 75-79.

Indem der Verf. die Arbeit berechnet, welche ein Reitpferd zu leisten hat, sodann die, welche ein Reitpferd leistet, das gleichzeitig zieht, kommt er zu dem Ergebnisse, dass bei gleicher Arbeitsleistung in beiden Fällen die Geschwindigkeiten für Kavallerie und Artillerie sich wie 110 : 102,2 verhalten müssen. Da nun die Geschwindigkeit der Kavallerie auf 110 m pro Minute festgesetzt ist, so folgt für die Artillerie rund 100 m.

Lp.

C. Capillarität.

J. S. Gromeka. Zur Theorie der Capillarerscheinungen. Kazan Ges. 1886. 42 S. (Russisch.)

M. E. Roger. Théorie mécanique des phénomènes capillaires. Paris. 17 S. 4°.

G. Van der Mensbrugghe. Sur quelques effets des forces moléculaires au contact d'un solide et d'un liquide. Belg. Bull. (3) XIII. 11-15.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

O. Tumlirz. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen endlicher Schwingungsweite. Wien. Ber. XCV. 3.

Im Anschluss an die klassische Abhandlung von Riemann über denselben Gegenstand führt Herr Tumlirz noch einmal die Formeln für den speciellen Fall vor, dass zwischen dem Drucke p und der Dichtigkeit ϱ die Beziehung $p = A\varrho^k$ besteht, und wendet sich alsdann zu der Besprechung der schon von Riemann angedeuteten Unstetigkeiten der Bewegung, den sogenannten Verdichtungsstössen. Er stellt, indem er eine Lamelle betrachtet, innerhalb deren die Unstetigkeit liegt, die drei Gleichungen zwischen Druck, Dichtigkeit, Temperatur und Geschwindigkeit auf, welche hier an Stelle der sonst geltenden Differentialgleichungen treten, und welche besagen:

1) dass der Zuwachs an Masse zwischen beiden Grenzebenen gleich ist der Differenz der austretenden und eintretenden Masse;

2) dass der Zuwachs der Bewegungsgrösse der Schicht gleich ist dem Product der Druckdifferenz mit dem Zeitdifferential;

3) dass der Zuwachs der Energie der Schicht gleich der von den Drucken geleisteten Arbeit sein muss.

Von diesen drei Beziehungen sind die beiden ersten schon in erheblich einfacherer Gestalt von Riemann angegeben worden, und auch die dritte hätte sich ganz bedeutend vereinfachen lassen, wenn die Lösung der Aufgabe geleistet wäre, die offenbar irrelevanten Dicken der zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle liegenden Schichtteile zu entfernen. Die Anfangsbedingungen sind nun so gewählt, dass eine gewisse Function der Geschwindigkeit und der Dichtigkeit überall denselben Wert haben müsste. Beim Uebergang über die Unstetigkeitsstelle ist das aber nicht mehr mit den drei genannten Bedingungen vereinbar, und der Verfasser schliesst daraus, dass von der Stelle des Verdichtungs-

stosses eine Wellenbewegung nach rückwärts abgeht. Der Verfasser fährt nun weiter fort: „Indem diese rückwärtslaufende Wellenbewegung von jener Stelle, wo sie entstanden ist, Energie mitnimmt, schwächt sie die dort bestehende Energiemenge und löst, weil sie an jener Stelle so lange erzeugt wird, als die Unstetigkeit besteht, diese Unstetigkeit auf.“ F. K.

P. Kindel. Elementare Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler und transversaler Wellen. Poske Z. I. 57-66. Lp.

Lord Rayleigh. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. Phil. Mag. (5) XXIV. 145-149.

In einer früheren Abhandlung des Verfassers „On maintained vibrations“ (Phil. Mag. (5) XV. 229) wurde das Thema des gegenwärtigen Artikels kurz abgehandelt. Dasselbe wird nun in Verbindung mit einer Abhandlung über mathematisch verwandte Fragen in der Mondtheorie von Hill (Acta Math. VIII. 1-36, F. d. M. XVIII. 1886. 1106) wieder aufgenommen. Die Bewegungsgleichung des vibrirenden Körpers lautet:

$$(1) \qquad \frac{d^2w}{dt^2}+2k\frac{dw}{dt}+(\Theta_0+2\Theta_1\cos 2t)\,w=0,$$

und auf diese Gleichung wird Hill's Methode angewandt; ausserdem wird aber gezeigt, dass dieselbe Methode anwendbar bleibt, wenn sowohl die Coefficienten von $\frac{d^2w}{dt^2}$ und $\frac{dw}{dt}$ als auch von w gegebenen periodischen Aenderungen unterliegen. Die Gleichung (1) wird

$$\Phi\frac{d^2w}{dt^2}+\Psi\frac{dw}{dt}+\Theta w=0,$$

wo

$$\Phi = \Sigma\Phi_n e^{2int},\quad \Psi=\Sigma\Psi_n e^{2int},\quad \Theta=\Sigma\Theta_n e^{2int}.$$

Nimmt man $w = \Sigma_n b_n e^{ict+2int}$ und substituirt, so ist der Coefficient von $e^{ict+2int}$:

$$(2) \qquad -\Sigma_n b_n (c+2n)^2 \Phi_{m-n} + i\,\Sigma_n b_n (c+2n)\Psi_{m-n} + \Sigma_n b_n \Theta_{m-n}.$$

Um c aus den Gleichungen zu finden, die man erhält, indem man die Ausdrücke von der Form (2) gleich Null setzt, wird eine Determinante, analog der $\mathfrak{D}(c)$ der angezogenen Abhandlung, aufgestellt, und es werden einige besondere Fälle betrachtet. Eine Anwendung der Rechnung wird auf einen gespannten Faden gemacht, der periodisch belastet ist und transversale Schwingungen fortpflanzt. Gbs. (Lp.)

E. Budde. Ueber Schwingungsprobleme. Berl. phys. Ges. Verh. VI. 129-135.

Das Princip der von dem Verf. für die Behandlung von Schwingungsproblemen benutzten Methode lautet wie folgt:

„Man denke sich zunächst das schwingende Object in seiner natürlichen Gleichgewichtslage und gebe jedem seiner Punkte so viele Coordinaten x, y, z, wie das Object Dimensionen hat. Dann nehme man an, jeder Punkt desselben habe eine kleine willkürliche Verschiebung erlitten, deren Componenten u, v, w sind. u, v und w können dann als willkürliche Functionen von x, y, z dargestellt und in Reihen entwickelt werden, jedenfalls mittels der Fourier'schen Reihe, unter Umständen auch mittels anderer, dem speciellen Falle angemessener Ausdrücke. So erhält man irgend eine der drei Grössen u, v, w in der Form

$$a = a_1 f_1(x, y, z) + a_2 f_2(x, y, z) + a_3 f_3(x, y, z) + \cdots.$$

In diesem Ausdrucke sind dann x, y, z die Coordinaten, welche der betrachtete Punkt haben würde, wenn er in der Gleichgewichtslage wäre, d. h. sie sind von der Zeit unabhängig. Die Parameter a_1, a_2, ... dagegen hängen von der Zeit ab, und sind sie zur Zeit t bekannt, so bestimmen sie die Form des Objects zur Zeit t. Man kann also die Parameter a als die Coordinaten des Objects ansehen und kann demgemäss auf sie die Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{\partial U}{\partial a}$$

anwenden, in welcher L die lebendige Kraft, U das Ergal bezeichnet, und $\dot{a}$ für da/dt steht. (Sind nur eine oder zwei Dimensionen zu berücksichtigen, so fallen y, z, bezw. fällt z aus den Functionen f heraus.) In dieser Anwendung besteht die Methode."

Der Verf. führt dieselbe an der Behandlung der unendlich kleinen Schwingungen einer ebenen, rechteckigen Platte durch.

Lp.

A. Harnack. Ueber die mit Ecken behafteten Schwingungen gespannter Saiten. Math. Ann. XXX. 486-499.

Im § 1 der vorliegenden Abhandlung wird strenger, als es gewöhnlich geschieht, für das Problem der schwingenden Saiten bei vorausgesetzter Stetigkeit die Berechtigung der Lösung

$$\eta = \Sigma(a_n \cos(nat) + b_n \sin(nat)) \sin nx$$

nachgewiesen.

Dann wird im § 2 der Fall näher untersucht, dass die Grösse $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ an gewissen Stellen unstetig wird. Es ergiebt sich zunächst, dass derartige Stellen — sogenannte Ecken — sich stets mit der Geschwindigkeit a in dem einen oder andere Sinne bewegen, wo a die Constante ist, welche auch in der partiellen Differentialgleichung der Schwingungen

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

auftritt. Ferner ergiebt sich, dass auch in diesem Falle di oben angegebene Entwickelung für η gilt.

Im § 3 untersucht der Verfasser die Frage, ob Bewegunge der Saite möglich sind, bei welchen die letztere stets aus zwe geradlinigen Teilen besteht, welche in einer Ecke zusamme stossen. In diesem Falle ergiebt sich für η die Lösung

$$\eta = \frac{kC}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nat) \sin nx.$$

Zu irgend einer Zeit $\left(0 < t < \frac{\pi}{\alpha}\right)$ lässt sich dies für $0 < x < \alpha t$ zusammenziehen in

$$\eta = \frac{C}{\pi}(\pi - \alpha t)x$$

und für $\alpha t < x < \pi$ in

$$\eta = \frac{C}{\pi}(\pi - x)\,\alpha t.$$

Der vierte Abschnitt endlich behandelt die allgemeine Aufgabe für den Fall, dass die Saite stets aus $n+1$ geradlinigen Stücken besteht, die durch n Ecken von einander getrennt sind.

F. K.

E. AULINGER. Ueber Membranen, deren beide Hauptspannungen durchaus gleich sind. Wien. Ber. XCV. 170-179.

Sollen die beiden Hauptspannungen in jedem Punkte einer Membran einander gleich sein, so muss die Membran die Form einer Minimalfläche haben. Ferner hat die Spannung für diesen Fall auf der ganzen Fläche denselben Wert. Nach Ableitung dieser Resultate werden die partiellen Differentialgleichungen für die unendlich kleinen Schwingungen einer solchen Membran abgeleitet. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Falle einer Rotationsfläche gewidmet.

F. K.

S. TANAKA. Ueber Klangfiguren, insbesondere über die Schwingungen quadratischer Platten. Wiedemann Ann. (2) XXXII. 670-683.

Der Differentialgleichung für die Schwingungen quadratischer Platten genügen particuläre Intgrale von der Form

$$w = \sin(4\lambda^2 \alpha t)\left\{A\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{l} + B\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi y}{l}\right\},$$

worin m und n ganze Zahlen sind. Die zu diesen Lösungen gehörigen Knotenlinien werden hier in bekannter Weise discutirt. Indessen sind, wie der Verfasser selbst bemerkt, die Lösungen keine strengen. Denn jene particulären Integrale, die den bei den Membranen gebräuchlichen nachgebildet sind, genügen zwar

der für das Innere der Platte geltenden Differentialgleichung, nicht aber den von Kirchhoff [J. für Math. XL, cf. Kirchhoff Mechanik Vorl. 30] aufgestellten Randbedingungen. Die Arbeit giebt sonach eine praktisch brauchbare Näherung, fördert aber die strenge Lösung des Problems, das für quadratische Platten bisher noch nicht erledigt ist, in keiner Weise. Wn.

H. Hugoniot. Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. Journ. de l'Éc. Pol. cah. LVII. 3-97.

Die vorliegende Veröffentlichung ist ein wortgetreuer Abdruck zunächst des ersten Teiles eines Aufsatzes, den der durch einen frühzeitigen Tod hinweggeraffte Verfasser 1885 der Akademie der Wissenschaften vorgelegt hat. Im Auszuge wurden die Untersuchungen des Verfassers damals in den C. R. mitgeteilt. (S. F. d. M. XVII. 1885. 963). Sbt.

W. Witkowski. Die mathematischen Grundlagen der Musik. Warschau. Dn.

J. Aussem. Ueber die temperirte und die natürliche Tonleiter. Pr. Kaiser-Karls-Gymn. Aachen. (No. 390) 3-24. 8°.

Theoretische Betrachtungen, unter Rücksichtnahme auf die historische Entwickelung und geographische Verbreitung; Fortsetzung der Programmabhandlung von 1874: „Ueber die Entstehung, Höhe und Qualität der musikalischen Klänge“. Lp.

B. Theoretische Optik.

E. Verdet. Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von K. Exner. Bd. II. Abt. III. Braunschweig. Vieweg u Sohn. XII u. 192 S.

Das vorliegende Schlussheft des Werkes, dessen frühere Lieferungen in den Bänden XIII-XVII der Fortschritte besprochen sind, ist den Theorien der Reflexion sowie den experimentellen Verificationen der theoretischen Resultate gewidmet. Ausführlich werden die Fresnel'schen Formeln für die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes entwickelt, während von den Theorien von F. Neumann und Mac Cullagh nur die Grundlagen kurz erwähnt werden. Auch bei der Theorie der Krystallreflexion werden nur einige Resultate ohne jede Ableitung mitgeteilt. Hier wäre eine grössere Ausführlichkeit erwünscht gewesen; die vorliegende Darstellung genügt nicht, um von dem gegenwärtigen Stand der Theorie ein zutreffendes Bild zu geben.

Mit der Darstellung der Metallreflexion schliesst das Heft, dem, ebenso wie den früheren, ein ausführliches Literaturverzeichnis beigefügt ist. Im letzteren fehlen die 1885 erschienenen Vorlesungen von F. Neumann über theoretische Optik, während andre in demselben Jahre veröffentlichte Arbeiten citirt sind.

Wn.

A. Clebsch. Principien der mathematischen Optik. Herausgegeben von A. Kurz. Augsburg. 53 S. 8°.

J. E. Couvée. Eenige beschouwingen over de voortplanting van golfstelsels. Dissertation. Delft. Couvée. 80 S.

Theoretische Untersuchung über die Fortpflanzung von Wellensystemen. Im ersten Abschnitt werden Schwingungen behandelt, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Periode abhängt. Als Ausgangspunkt dienen die hydrodynamischen Grundformeln, und die Auflösung derselben wird auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

zurückgeführt, welche nach den bekannten Methoden d'Alembert's und Fourier's aufgelöst wird. Der zweite Abschnitt handelt über die Fortpflanzung solcher Wellensysteme, bei denen die Fortpflanzungs-

geschwindigkeit einfacher Schwingungen von der Wellenlänge abhängt. Als erstes Beispiel dienen die Schwingungen eines homogenen festen elastischen Körpers, welche nach Cauchy's Methode behandelt werden; als zweites transversalschwingende Stäbe, als drittes Wasserwellen unter der Wirkung der Schwerkraft und der Molecularkräfte. Daran schliesst sich eine Untersuchung über die Schwebungen, welche man beim Schall beobachtet, wenn zwei Stimmgabeln, welche sich von einander in der Tonhöhe ein wenig unterscheiden, in Schwingungen versetzt werden, unter Berücksichtigung der Untersuchungen von Helmholtz und Kundt über diesen Gegenstand. Darauf wendet sich der Verf. zu der Betrachtung von mehr als zwei einfachen Wellenbewegungen, welche sich nur ein wenig in der Wellenlänge unterscheiden; vier besondere Fälle werden als Beispiele weiter ausgearbeitet.

Im dritten Abschnitt wird das Vorhergehende auf die Fortpflanzung des Lichtes angewandt, dessen Geschwindigkeit bestimmt wird. Schliesslich werden die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung mit den auf experimentellem Wege erhaltenen verglichen. G.

M. Lévy. Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de Fresnel. C. R. CV. 1044-1050.

Wenn man auch von jeder Hypothese über das Wesen des Lichtes abstrahirt, so ist doch, wie Maxwell bemerkt hat, der Vorgang der Ausbreitung des Lichtes jedenfalls ein solcher, der durch einen Vector dargestellt werden kann. Es fragt sich nun: welches sind für diesen „Lichtvector“ die allgemeinsten Gleichungen, die mit der Fresnel'schen Wellenfläche vereinbar sind? Herr Lévy hat diese Frage untersucht und ist dabei zu folgenden interessanten Resultaten gelangt, die ohne Ableitung mitgeteilt werden.

Die Gleichungen, denen die Componenten u, v, w des Lichtvectors genügen, müssen, wenn man das Medium, in dem sich das Licht ausbreitet, als continuirlich annimmt, Differentialglei-

chungen sein; sie müssen ferner, da Interferenz des Lichtes möglich ist, linear, und falls man von der Dispersion und Circularpolarisation absieht, auch homogen sein. Von Ableitungen der Grössen u, v, w nach der Zeit können nur die gerader Ordnung, d. h. nur die zweiten vorkommen. Es handelt sich darum, zwischen diesen Ableitungen nach der Zeit einerseits und den Ableitungen nach den Coordinaten andrerseits die allgemeinsten Differentialgleichungen aufzustellen, welche für zweiaxige Krystalle auf die Fresnel'sche Wellenfläche führen. Dies leisten vier verschiedene Systeme von je drei Differentialgleichungen, und zwar sind die ersten Gleichungen der verschiedenen Systeme folgende:

$$(A_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{b} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{c} - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z};$$

$$(A_2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{a} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{a} - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z};$$

$$(B_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{b} - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{c} - a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z};$$

$$(B_2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{\lambda}(\mathfrak{a} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathfrak{a} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Aus jeder dieser Gleichungen ergeben sich die beiden zugehörigen durch cyklische Vertauschung von u, v, w, x, y, z wie der in den Gleichungen vorkommenden Constanten. Bei Aufstellung der Gleichungen ist vorausgesetzt, dass der betreffende Krystall drei rechtwinklige Symmetrieebenen besitzt, die zugleich Coordinatenebenen sind. Jedes Gleichungssystem enthält neben den reciproken Hauptbrechungsindices a, b, c noch fünf willkürliche Constanten, nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sowie die Verhältnisse der Grössen λ, μ, ν. Alle vier Systeme ergeben für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

ω ebener Wellen eine Gleichung dritten Grades, die stets in zwei Factoren zerfällt. Der eine Factor liefert die bekannte Fresnel'sche Gleichung

$$\frac{l^2}{\omega^2-a^2}+\frac{m^2}{\omega^2-b^2}+\frac{n^2}{\omega^2-c^2}=0,$$

während der andere Factor

$$\omega^2 = \mathfrak{a}l^2+\mathfrak{b}m^2+\mathfrak{c}n^2$$

der Cauchy'schen dunklen Welle entspricht. Um die letztere Welle zu beseitigen, haben fast alle Autoren, die Theorien der Doppelbrechung aufgestellt haben, $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$ gesetzt, eine Annahme, durch welche die Systeme (A_1) und (A_2) identisch werden. Doch bedarf es dieser Annahme nicht; vielmehr genügt es, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sämtlich als negativ vorauszusetzen, um zu erklären, weshalb die in Rede stehende dritte Welle nie beobachtet ist.

Während von den drei Constanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Geschwindigkeit der nicht sichtbaren Welle abhängt, bestimmen die Constanten λ, μ, ν für sich allein oder mit den andern zusammen die Richtung des zu jeder der beiden ersten Wellen gehörigen Vectors; und zwar kann diese Richtung je nach der Annahme über λ, μ, ν eine ganz beliebige sein, ohne dass die aus obigen Differentialgleichungen folgenden Gesetze den Beobachtungen widersprechen. Der Umstand indessen, dass die durch die Wellennormale und den Strahl gelegte Ebene, die „Normalebene,“ für die Lichterscheinungen eine Symmetrieebene ist, führt darauf, den Vector entweder als senkrecht zu jener Ebene oder als in ihr liegend anzusehen. Auf die erste dieser beiden Lagen, welche die von den Theorien Mac-Cullagh's, F. Neumann's, Lamé's etc. verlangte ist, führt von allen Systemen allein das System (A_2), wenn man darin $\lambda=\mu=\nu$ setzt. Setzt man ausserdem $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$, so erhält man damit aus (A_2) die Lamé'schen resp. Neumann'schen Gleichungen. Auf einen in der Normalebene liegenden Vector hingegen führen allein die Systeme (B_1) und (B_2). Setzt man noch

$$\frac{1}{\lambda}=h+ka^2,\quad \frac{1}{\mu}=h+kb^2,\quad \frac{1}{\nu}=h+kc^2,$$

so ergiebt (B_2) unter der Annahme $k = 0$, dass der Vector parallel ist dem Durchschnitt der Normalebene und Wellenebene; das ist die Fresnel'sche Richtung. Auch gehen, wenn man zu dieser Annahme die weitere $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$ hinzufügt, die Gleichungen (B_2) in die Fresnel'schen über. Setzt man aber in (B_2) $h = 0$, $k = 1$, so liegt der Vector in der Normalebene senkrecht zum Strahl, wie in den Theorien von Maxwell und Sarrau. Durch Variation des Verhältnisses $\frac{h}{k}$ kann man für den Vector alle möglichen Richtungen in der Normalebene erhalten. Ein ähnliches Resultat ergeben die Gleichungen (B_1).

„Zu der Fresnel'schen Wellenfläche kann man übrigens auch gelangen, ohne den Krystall als symmetrisch in Bezug auf drei rechtwinklige Ebenen anzunehmen. Man braucht zu dem Zwecke nur in den obigen Gleichungen u, v, w durch beliebige lineare Functionen von u, v, w zu ersetzen. Wn.

Sir W. Thomson. On Cauchy's and Green's doctrine of extraneous force to explain dynamically Fresnel's kinematics of double refraction. Edinb. Proc. XV. 21-33.

Sir W. Thomson. On the minimal tetrakidekahedron with exhibition of models. Edinb. Proc. XV. 33.

Bericht über einen Aufsatz des Verf. im Phil. Mag. XXV (1887) in Betreff desselben Gegenstandes. Cly.

W. Voigt. Ueber das Doppler'sche Princip. Gött. N. 41-51.

Um zu untersuchen, welchen Einfluss eine Bewegung der Lichtquelle auf die Fortpflanzung des Lichtes ausübt, stellt der Verfasser folgende Ueberlegungen an. Die drei Componenten u, v, w der Lichtoscillation genügen drei Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta u,$$

zu denen noch die Bedingung der Incompressibilität hinzukommt. Es seien nun $u = U$, $v = V$, $w = W$ Lösungen dieser Gleichungen, welche an einer gegebenen Oberfläche gegebene, von der Zeit abhängige Werte $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ annehmen. Es seien ferner ξ, η, ζ, τ vier lineare, homogene Functionen von x, y, z, t, die, da der Factor von t in τ gleich 1 ist, im ganzen fünfzehn Constanten enthalten. Vertauscht man in U, V, W die Variabeln x, y, z, t resp. mit ξ, η, ζ, τ und bezeichnet die so erhaltenen Functionen mit (U), (V), (W), so sind auch

$$u = (U),\ v = (V),\ w = (W)$$

Lösungen der Gleichungen (1), falls die erwähnten fünfzehn Constanten neun Bedingungsgleichungen genügen. Die Discussion dieser Gleichungen ergiebt, dass jene linearen Functionen folgende Form haben müssen:

$$(2)\quad \begin{cases} \tau = t - \dfrac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1), \\ \xi = xq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\alpha_1(1-q) - \varkappa\alpha_1 t, \end{cases}$$

während η und ζ aus ξ durch Vertauschung von x und α_1 mit y und β_1, resp. z und γ_1 hervorgehen. Die Grössen $\varkappa$, α_1, β_1, γ_1 können beliebige Constanten sein, nur dass die letzten drei die Richtungscosinus einer Linie darstellen, während

$$q = 1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}$$

ist. Das Resultat zusammen mit der Bedingung, dass auch

$$\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} + \frac{\partial(W)}{\partial z} = 0$$

sein muss, enthält das Doppler'sche Princip, soweit dasselbe richtig ist. Substituirt man ξ, η, ζ, τ statt x, y, z, t in der Gleichung der gegebenen Fläche, so erhält man die Bewegung der Lichtquelle. Besonders einfach gestaltet sich das Resultat, wenn $\varkappa$, die Geschwindigkeit der Bewegung der Lichtquelle, gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω des Lichtes klein ist, so dass man $\dfrac{\varkappa^2}{\omega^2}$ vernachlässigen kann.

An diese allgemeinen Erörterungen wird die Discussion von drei speciellen Fällen geknüpft. 1) Der erste derselben betrifft

ebene Wellen von constanter Amplitude, wobei die als Lichtquelle zu betrachtende Ebene sich in derselben Richtung bewegt, nach der sich die ebenen Wellen fortpflanzen. Hier gilt das Doppler'sche Princip streng. Die Schwingungsdauer in der fortgepflanzten Welle ist verringert im Verhältnis $\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right):1$.

2) Betrachtet man eine ebene Lichtquelle, deren Punkte alle dieselbe Schwingungsdauer, aber verschiedene Intensität besitzen, so gelten bei derselben Bewegung der Lichtquelle wie in Fall 1) ganz andre Gesetze, als durch das Doppler'sche Princip gegeben sind, selbst wenn man sich auf die erste Annäherung beschränkt und $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ gegen 1 vernachlässigt.

3) Die ruhende leuchtende Oberfläche sei eine sehr kleine Kugel, welche um einen Durchmesser oscillirt, so dass der Drehungswinkel $\overline{\psi}$ das Gesetz

$$\overline{\psi} = A \sin\frac{2\pi t}{T}$$

befolgt. Ersetzt man in den Ausdrücken für die Schwingungen, die ein solcher durch Rotation „leuchtender Punkt" in dem umgebenden Medium veranlasst, x, y, z, t durch ξ, η, ζ, τ unter der Annahme, dass $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ ist, so ergiebt sich die Bewegung, die von einem andern leuchtenden Punkte ausgesandt wird, falls letzterer sich mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ längs der Rotationsaxe bewegt. Die Discussion der Formeln führt hier zu folgenden eigentümlichen Resultaten. Die Wellenflächen sind in erster Annäherung Kugeln, die aber nicht den leuchtenden Punkt zum Mittelpunkt haben, sondern einen von demselben um den $\frac{\varkappa}{\omega}$-ten Teil des Radius nach der der Bewegung entgegengesetzten Richtung hin abstehenden Punkt. Ein ruhender Beobachter würde einen so bewegten leuchtenden Punkt, der sich zur Zeit t in der Entfernung r von ihm befindet, in derjenigen Lage sehen, welche er vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ hatte, aber mit der Intensität, wie sie der augenblicklichen Entfernung entspricht. Wn.

W. Voigt. Theorie des Lichtes für bewegte Medien. Gött. N. 177-237.

Der Behandlung der Lichtschwingungen in bewegten Medien wurde bisher entweder die Fresnel'sche Hypothese zu Grunde gelegt, wonach durch die bewegten ponderabeln Körper der in ihnen enthaltene Aether mit dem $\frac{n^2-1}{n^2}$ten Teil ihrer Geschwindigkeit mitgeführt wird, oder auch die Annahme, dass den bewegten Körpern ein Teil des Aethers, eine Aetheratmosphäre, anhaftet, und dass dieser Teil bei der Bewegung mitgeführt wird. Beide Annahmen verwirft Herr Voigt, die erstere, weil sie mit den Folgerungen der Elasticitätstheorie in Widerspruch steht und bei Krystallen auf Resultate führt, die durch die Beobachtungen nicht bestätigt werden, die zweite, da sie ebenfalls erhebliche theoretische Schwierigkeiten bietet und bisher durch keine Beobachtung nötig gemacht ist. Dagegen bietet sich bei Zugrundelegung der Neumann'schen Ansicht von der überall constanten Dichte des Aethers ganz von selbst die mit der Elasticitätstheorie wohl vereinbare Vorstellung dar, dass der Aether an der Bewegung der Erde und der auf derselben befindlichen Körper nicht teilnimmt. Dabei ist es nicht erforderlich, den Aether als absolut in Ruhe befindlich anzusehen; man muss vielmehr eine selbständige Bewegung desselben zulassen, die in grossen Räumen der Geschwindigkeit und Richtung nach constant ist. Bei Zugrundelegung eines mit dem Aether bewegten Coordinatensystems kann man indessen von dieser Bewegung abstrahiren. Ist sonach eine Beteiligung des Aethers an den fortschreitenden Bewegungen der ponderabeln Massen ausgeschlossen, so kann ein Unterschied der Lichtbewegung in ruhenden und fortschreitenden Körpern nur dadurch hervorgebracht werden, dass die zwischen ponderabeln und Aetherteilchen wirkenden Kräfte hier und dort verschiedenen Gesetzen folgen.

Von dieser Grundvorstellung ausgehend, untersucht Herr Voigt zunächst, ob Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether denkbar sind, die sich mit dem Princip der Energie

vereinigen lassen (also für vollkommen durchsichtige Körper gelten), und die dabei für bewegte Medien andere Gesetze der Lichtausbreitung ergeben als für ruhende. Die in einer früheren Arbeit [cf. F. d. M. XV. 1883. 900] vom Verfasser abgeleiteten Formeln für jene Wechselwirkung, die hier in grösserer Ausführlichkeit als früher nochmals entwickelt werden, ergeben kein der Erfahrung entsprechendes Resultat. Dagegen zeigt sich, dass man dem Princip der Energie, d. h. der Forderung, dass die Arbeit der Wechselwirkung zwischen Aether und Materie ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit wird, noch auf andere Weise genügen kann, als es in der vorerwähnten Arbeit geschehen ist. Man kann nämlich über die Componenten A, B, C der Wechselwirkung eine solche Verfügung treffen, dass die die Arbeit darstellenden Körperintegrale in Oberflächenintegrale, die verschwinden, verwandelt werden. Das führt auf folgendes Gesetz für die Wechselwirkung:

$$\begin{aligned} -A = {} & d_{11}\frac{\partial u'}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial v'}{\partial x} + d_{13}\frac{\partial w'}{\partial x} \\ & + e_{11}\frac{\partial u'}{\partial y} + e_{12}\frac{\partial v'}{\partial y} + e_{13}\frac{\partial w'}{\partial y} \\ & + f_{11}\frac{\partial u'}{\partial z} + f_{12}\frac{\partial v'}{\partial z} + f_{13}\frac{\partial w'}{\partial z}, \end{aligned}$$

und ähnlich B und C. Dabei sind u', v', w' die Ableitungen der Verrückungen nach der Zeit; d_{11}, e_{11} etc. sind Constanten, im ganzen 18 an der Zahl, da eine Vertauschung der Indices keine Aenderung hervorbringt.

Für isotrope Körper, die sich in der Richtung der x-Axe bewegen, vereinfachen sich die Formeln bedeutend. Fügt man hier noch die Annahme hinzu, dass der in Folge der Incompressibilität auftretende hydrostatische Druck verschwindet, was nötig ist, damit die Verrückungen u, v, w von einander unabhängig werden, so wird einfach

$$-A = d\cdot\frac{\partial u'}{\partial x}, \quad -B = d\cdot\frac{\partial v'}{\partial x}, \quad -C = d\cdot\frac{\partial w'}{\partial x}.$$

Die Constante d verschwindet mit der Translationsgeschwindigkeit Ω des ponderabeln Körpers; in erster Näherung ist also d

proportional Ω. Fügt man diese Kräfte zu den für ruhende isotrope Medien geltenden hinzu, so ergeben sich aus den Differentialgleichungen der Lichtbewegung die Gesetze für die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien. In erster Näherung wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω

$$\omega = \omega^0 + k \, . \, \Omega_\varrho,$$

falls ω^0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ruhenden Medium ist, Ω_ϱ die Componente der Translationsgeschwindigkeit Ω nach der Wellennormale, k eine Constante. Diese Formel ist durch die Erfahrung bestätigt. Die Wellenflächen sind excentrische Kugeln.

Wenn man ferner dieselben Kräfte zu den in absorbirenden isotropen Medien wirksamen hinzufügt, so folgt, dass bei geringer Absorption der Absorptionscoefficient durch die Bewegung eine Aenderung erfährt, die proportional $\frac{\Omega_\varrho}{\omega^0}$ ist.

Weiter wird auch für circular-polarisirende und für krystallinische Medien der Einfluss der Translation auf die Lichtbewegung entwickelt. Für die letzteren Medien kommen die allgemeinen oben angeführten Ausdrücke der Kräfte A, B, C in Betracht. Da ein Eingehen auf die Einzelheiten der hier erforderlichen Rechnungen zu weit führen würde, begnügen wir uns mit der Erwähnung folgender Resultate. Bei einaxigen Krystallen ist der Einfluss der Translation für die ordentliche und die ausserordentliche Welle verschieden. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der letzteren hängt nicht nur von der Translationscomponente nach der Wellennormale ab, sondern auch von der hierzu senkrecht im Hauptschnitt gelegenen Componente. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zweiaxigen Krystallen wird ausschliesslich beeinflusst durch die Componenten von Ω nach der Richtung der Wellennormale und nach der zu dieser und der Schwingungsrichtung senkrechten Richtung. Ferner ergiebt sich hier das folgende merkwürdige Resultat. Wie bei isotropen Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen durch die Translation verschieden modificirt werden, so werden bei zweiaxigen Krystallen durch dieselbe Ursache die

beiden Hälften der optischen Axen verschieden verschoben, so dass nunmehr vier statt zwei Richtungen zu unterscheiden sind. Auch die Drehung der Polarisationsebene wird durch die Translation beeinflusst, jedoch in ziemlich verwickelter Art.

Um die Vergleichung der Theorie mit beobachteten Erscheinungen zu ermöglichen, ist noch zu erörtern, welche Modification das Reflexions- und das Brechungsgesetz durch die Bewegung der Medien erfahren. Jene Gesetze werden hier

$$\frac{\sin\varphi_e}{\omega_e - \Omega_n \cos\varphi_e} = \frac{\sin\varphi_r}{\omega_r - \Omega_n \cos\varphi_r} = \frac{\sin\varphi_d}{\omega_d - \Omega_n \cos\varphi_d}.$$

Dabei ist φ der Winkel der Wellennormale gegen das ins zweite Medium hinein positiv gerechnete Einfallslot, ω die Lichtgeschwindigkeit des bewegten Mediums, während durch die Indices e, r, d einfallende, reflectirte und gebrochene Welle unterschieden werden und Ω_n die Componente von Ω nach dem Einfallslot ist. Daraus folgt, dass die Aberration durch ein eingeschaltetes Medium nicht beeinflusst wird, dass sich der Winkel der äusseren Reflexion durch die gemeinsame Bewegung von Beobachter und Spiegel nicht ändert, dass endlich die prismatische Ablenkung von der Bewegung unabhängig ist; alles Folgerungen, die durch Beobachtungen bestätigt sind. Ferner finden die Beobachtungen des Herrn Ketteler, wonach die Ablenkung der Wellennormale in Krystallen durch Brechung und innere Reflexion unabhängig von der Translation ist, ihre vollständige Erklärung, ebenso die Beobachtungen des Herrn Mascart über die Unabhängigkeit der gegenseitigen Verzögerungen der beiden Wellen, welche sich senkrecht zur Axe in einem Kalkspat fortpflanzen, von der gemeinsamen Translation der Lichtquelle und des Krystalls. Für circular-polarisirende Medien ergeben sich, je nach der Verfügung über die Constanten, Werte für die beobachtete Drehung der Polarisationsebene, welche die wirklich gemessenen umschliessen; aber vorläufig ist die Theorie dieser Erscheinungen noch nicht als abgeschlossen zu betrachten. Auch hinsichtlich der Modification der Dispersion und der auswählenden Absorption folgen keine abgeschlossenen und entscheidenden Resultate.

Zum Schluss wird ein Experiment besprochen, das von Herrn Michelson angestellt ist, um zu entscheiden, ob der Lichtäther an der Bewegung teilnimmt oder nicht. Es wird gezeigt, dass bei der Art, in der Herr Michelson die Beobachtung angeordnet hat, die Resultate von der relativen Bewegung zwischen dem Aether und dem Beobachtungsapparat völlig unabhängig sind, also zur Entscheidung jener Frage nichts beitragen können.

Wn.

A. Michelson and E. W. Morley. On the relative motion of the Earth and the luminiferous aether. Phil. Mag. (5) XXIV. 449-463.

A. Michelson und E. W. Morley. Einfluss der Bewegung des Mittels auf die Geschwindigkeit des Lichtes. Exner Rep. XXIII. 198-208.

Ein Bericht über Experimente zur Unterstützung der Hypothese, dass der Aether in Ruhe ist, ausgenommen im Innern durchsichtiger Mittel. Der folgende Satz giebt das erzielte Ergebnis an: „Aus allem Vorangehenden geht als vernünftiger Weise sicher hervor, dass, wenn irgend eine relative Bewegung zwischen der Erde und dem Aether stattfindet, dieselbe klein sein muss; gerade völlig klein genug, um Fresnel's Erklärung der Aberration zu widerlegen“.

Gbs. (Lp.)

R. T. Glazebrook. Supplement to a report on optical theories. Brit. Ass. Rep. 208-209.

Eine Berichtigung zu seinem Referate über Voigt's Theorie der Optik in dem „Report on optical theories“ (Brit. Ass. Rep. 1885. 157).

Gbs. (Lp.)

W. Voigt. Ueber die Einwände von Herrn R. T. Glazebrook gegen meine optischen Arbeiten. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 141-144, 544.

In einem vor der British Association for the Advancement

of Science im Jahre 1886 gehaltenen Vortrage hatte Herr Glazebrook einen umfassenden Ueberblick über alle neueren optischen Theorien gegeben und dabei auch einige Bedenken gegen die Theorie des Hrn. Voigt geäussert. Dieselben beziehen sich auf die Annahme, dass die Amplituden der Körpermolecüle als verschwindend klein angenommen werden, ferner auf die Benutzung des sogenannten Kirchhoff'schen Princips sowie die Form der Grenzbedingungen überhaupt, endlich auf die Annahme gleicher Dichtigkeit des Aethers in verschiedenen Medien und auf das Auftreten ungerader Ableitungen der Verrückungen nach der Zeit. Herr Voigt hatte die meisten dieser Einwände schon in seinen Arbeiten (cf. F. d. M. XV. 1883. 900; XVI. 1884. 899) im voraus erledigt, legt hier aber nochmals die Gründe dar, welche für die Richtigkeit seiner Anschauung sprechen. Wn.

W. Voigt. Zur Theorie des Lichtes für absorbirende isotrope Medien. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 233-242.

Herr Voigt giebt hier drei Zusätze zu der früher von ihm aufgestellten Theorie [cf. F. d. M. XVI. 1884. 899], die folgende Punkte betreffen. 1) Den früheren Ausdrücken für A_x, B_y, C_z etc. wird hier eine andere Form gegeben, die für ebene, periodisch schwingende Wellen mit der früheren zusammenfällt, aber gewisse formelle Vorteile bietet. 2) Das Problem der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze zweier isotropen absorbirenden Medien lässt sich durch Einführung gewisser Hülfswinkel ebenso einfach und anschaulich lösen wie in dem einfacheren Falle, wo nur das eine Medium absorbirend, das andre vollkommen durchsichtig ist. Daraus, dass die eingeführten Hülfswinkel um Vielfache von π unbestimmt sind, entsteht bei Anwendungen eine gewisse Schwierigkeit, die sich aber, wie hier gezeigt wird, leicht beseitigen lässt. 3) Die bei dem eben genannten Problem sich ergebenden Formeln für das Amplitudenverhältnis und die relative Verzögerung der Componenten senkrecht und parallel der Einfallsebene sind für die Anwendungen viel unbequemer als die Cauchy'schen Formeln. Nach einer Bemerkung des Herrn Drude lassen sich indessen die in Rede stehenden Formeln, falls

man die in den allgemeinen Gleichungen auftretende Constante b gleich 0 setzt, so umformen, dass man mit ihrer Hülfe die Constanten des Mediums, an dem die Reflexion stattfindet, durch den Haupteinfallswinkel (für welchen die relative Verzögerung $= \frac{1}{2}\pi$) und das Hauptazimut ausdrücken kann. Die zum Ziele führenden Rechnungen werden hier mitgeteilt. Wn.

R. Hennig. Beobachtungen über Metallreflexion. Gött. N. 365-389.

Die von Herrn Voigt aufgestellten Formeln für die Reflexion an der Grenze eines durchsichtigen und eines absorbirenden Mediums (vergl. das vorhergehende Referat) werden hier einer eingehenden experimentellen Prüfung unterworfen. Der erste Teil der Messungen bezieht sich auf die relative Phasenverzögerung und das Amplitudenverhältnis der reflectirten Componenten. Um diese Messungen zu verwerten, war der Einfluss einer ungenauen Orientirung des Babinet'schen Compensators zu berücksichtigen. Der Verfasser entwickelt die zur numerischen Berechnung dieses Einflusses nötigen Formeln und findet die corrigirten Beobachtungen in vollkommener Uebereinstimmung mit der Theorie. Weiter wurden auch die absoluten Phasenverzögerungen der beiden Componenten bestimmt durch Messung der Durchmesser Newton'scher Ringe, die durch Combination von Stahlspiegeln mit Glaslinsen erzeugt wurden. Hier war die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie nur für mittlere Einfallswinkel (bis zu 50°) eine genügende, nicht aber für grössere. Den Grund für diese Nichtübereinstimmung sucht der Verfasser in der Beobachtungsmethode. Wn.

P. Drude. Ueber die Gesetze der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze absorbirender Krystalle. Wiedemann Ann. (2) XXXII. 584-625.

Die vorliegende Abhandlung bildet eine Ergänzung resp. Erweiterung der Arbeit des Hrn. W. Voigt, über die F. d. M.

XVI. 1884. 899 berichtet ist. Herr Voigt hatte die Theorie der Absorption des Lichtes für isotrope Medien vollständig durchgeführt, die Absorption in Krystallen aber nur soweit behandelt, als es ohne Eingehen auf die Grenzbedingungen möglich war. Für Krystalle fehlte also noch die Bestimmung der Amplituden des reflectirten und gebrochenen Lichtes. Diese Bestimmung ist der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung, die aber auch den schon von Herrn Voigt behandelten Teil des Problems in andrer Darstellung nochmals erörtert. Hinsichtlich der Methode schliesst sich die Abhandlung eng an eine bekannte Untersuchung von Kirchhoff an [Kirchhoff: Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1882, 352; vergl. F. d. M. VIII. 1876. 647].

Die auf den Lichtäther wirkenden Kräfte zerfallen in zwei Arten, solche, welche die Energie des Körpers erhalten, und solche, welche sie vermindern. Für Kräfte der ersten Art (elastische Kräfte) wird hier genau die Kirchhoff'sche Darstellung mittels des elastischen Potentials zu Grunde gelegt, und es wird auch die von Kirchhoff angegebene Transformation des Ausdrucks für dieses Potential benutzt. Von den Kräften der zweiten Art, den absorbirenden Kräften, wird vorausgesetzt, dass sie, ebenso wie die elastischen Kräfte, drei Symmetrieaxen besitzen; doch kann das zweite System von Symmetrieaxen mit dem ersten beliebige Winkel bilden. Ferner wird in Bezug auf die absorbirenden Kräfte angenommen, dass der von Herrn Voigt mit ψ_1 bezeichnete Ausdruck verschwindet, während die Constanten des Ausdrucks ψ_2 sechs Bedingungsgleichungen von der Art genügen, dass für die Lage der Polarisationsebene sich das Neumann'sche Resultat ergiebt. Nach Einführung dieser Annahmen lässt der Ausdruck von ψ_2 (Arbeit der absorbirenden Kräfte), auf beliebig liegende Coordinatenaxen bezogen, eine ganz analoge Transformation zu, wie das Potential der elastischen Kräfte. Von den zwölf Constanten, welche der in Rede stehende Ausdruck enthält, müssen sechs verschwinden, wie unter Heranziehung der später zu erwähnenden Bedingungen für die Grenze zweier Medien sich nachweisen lässt. Dadurch nehmen die Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in absorbirenden Krystallen eine ebenso

einfache Form an, wie die Gleichungen für durchsichtige Krystalle bei Lamé und Kirchhoff haben. Die erste dieser drei Hauptgleichungen wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial G_1}{\partial \eta'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} + \frac{\partial G_1}{\partial \zeta'}\right).$$

Darin ist

$$2G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta,$$
$$2G_1 = a'_{11}\xi'^2 + a'_{22}\eta'^2 + a'_{33}\zeta'^2 + 2a'_{23}\eta'\zeta' + 2a'_{31}\zeta'\xi' + 2a'_{12}\xi'\eta';$$

ferner hängen ξ, η, ζ mit den Verrückungen u, v, w durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

zusammen, während ξ', η', ζ' die Ableitungen von ξ, η, ζ nach der Zeit sind und die Grössen a_{11}, a'_{11} etc. von den Constanten des Mediums und der Lage des zu Grunde gelegten Coordinatensystems abhängen.

Den Hauptgleichungen wird genügt durch Ausdrücke der Form

$$u = Me^{\frac{i}{\tau}[t-(\mu x+\nu y+\pi z)]} + M'e^{-\frac{i}{\tau}[t-(\mu' x+\nu' y+\pi' z)]},$$

wobei alle Constanten complexe Werte haben; und zwar sind M und M', μ und μ', ν und ν', π und π' zu einander conjugirt. Die weitere Discussion dieser Ausdrücke wird vereinfacht durch die Annahme, dass die Amplitude innerhalb der Wellenebene constant ist. Dann ergiebt sich, dass sich in jeder Richtung zwei Wellensysteme mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, analog wie bei durchsichtigen Medien. Doch erfolgt hier die Bewegung beider Wellensysteme in Ellipsen, und zwar sind beide Ellipsen ähnlich; die grosse Axe der einen liegt auf der kleinen der andern und umgekehrt. Uebrigens haben die Gleichungen zur Bestimmung von M, M' etc. wie auch die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe Form wie die entsprechenden Gleichungen für durchsichtige Krystalle; nur lassen diese Gleichungen hier nicht eine so einfache geometrische Interpretation zu, weil alle darin vorkommenden Grössen complex sind.

Eine weitere Vereinfachung entsteht, wenn man die Absorptionsaxen mit den optischen Symmetrieaxen zusammenfallen lässt. Hier ergiebt sich das Resultat, dass optische Axen, d. h. Linien, in denen für beide Wellen die Geschwindigkeit und die Absorption dieselben Werte haben, in einem absorbirenden Krystall des rhombischen Systems nicht existiren können. Anders gestalten sich allerdings die Verhältnisse bei geringer Absorption, weil dann in erster Annäherung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gar nicht von der Absorption abhängt. Für diesen Fall bleibt das Resultat des Herrn Voigt bestehen, wonach zwei optische Axen existiren, in denen aber die Absorption für beide Wellensysteme verschieden ist.

Weiter wird nun das Problem der Reflexion und Brechung gelöst, und zwar für zwei absorbirende krystallinische Medien mit beliebig liegenden Absorptionsaxen. Die Grenzbedingungen sind dieselben wie bei Kirchhoff; an der Grenze sind also die Verrückungen beider Medien gleich, wozu als vierte Bedingung das Kirchhoff'sche Princip kommt, dass an der Grenze die von den elastischen und den absorbirenden Kräften geleistete Arbeit verschwindet. Auch hier lehnt sich die weitere Entwickelung an Kirchhoff an, und auch die Resultate sind ganz analoge, namentlich soweit es die Zahl der in jedem Medium vorhandenen Wellen betrifft. Die unter den allgemeinsten Voraussetzungen abgeleiteten Gleichungen werden specialisirt, indem das eine Medium als durchsichtig und isotrop angenommen wird. Die Deutung der auftretenden complexen Grössen ergiebt, dass der Haupteinfallswinkel des absorbirenden Mediums dem Polarisationswinkel des durchsichtigen nur entspricht, wenn die Einfallsebene mit einer Symmetrieebene zusammenfällt; für absorbirende Krystalle giebt es also, den erwähnten Fall ausgenommen, keinen Polarisationswinkel. Zuletzt werden die Fälle gesondert behandelt, dass auch das zweite Medium isotrop, aber absorbirend ist (d. h. der Fall der Metallreflexion), ferner dass das zweite Medium ein einaxiger Krystall ist, dessen Axe entweder auf der Grenze senkrecht steht oder in der Grenze liegt und dabei in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr, endlich der Fall, wo das zweite

Medium ein zweiaxiger Krystall ist, dessen Absorptionsaxen mit den optischen Symmetrieaxen zusammenfallen. Von den dabei sich ergebenden Resultaten sei hier nur noch das folgende erwähnt. Bei der Metallreflexion erreicht das Verhältnis des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes zu dem parallel derselben polarisirten ein Minimum immer für einen Einfallswinkel, der kleiner als der Haupteinfallswinkel ist. Wn.

O. Wiener. Ueber die Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion und Methoden zur Dickenbestimmung dünner Blättchen. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 629-672.

Die wesentlich experimentelle Arbeit enthält zwei kleinere theoretische Entwickelungen, deren erste zeigt, dass die Doppelbrechung im Glimmer (bei Vernachlässigung der Dispersion) die bei einer Reflexion an der hinteren Fläche eintretende Phasenänderung nicht merklich modificiren kann. Ausserdem wird die Interferenz dreier Strahlenbündel, welche an den Grenzflächen zweier an einander grenzenden durchsichtigen Lamellen senkrecht reflectirt sind, rcehnend verfolgt.

Von den aus den Beobachtungen gezogenen Schlüssen sind folgende auch von theoretischem Interesse: 1) Die Aenderung der Phase bei senkrechter Reflexion des Lichtes am Silber nimmt von Null bis zu höchstens etwa dreiviertel Wellenlängen zu, wenn die Dicke des Silbers von Null bis zur Undurchsichtigkeit wächst. Die Phasenänderung entspricht einer Verzögerung, nicht einer Beschleunigung. 2) Die Phasenänderung bei senkrechter Reflexion an durchsichtigen Körpern, und zwar in optisch dünneren an optisch dichteren, ist weder als eine Verzögerung, noch als eine Beschleunigung anzusehen. Sie wird durch eine Umkehr der Schwingungsrichtung in der reflectirenden Oberfläche erklärt.

Wn.

W. Wernicke. Ueber die elliptische Polarisation des von durchsichtigen Körpern reflectirten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XXX. 452-468.

W. Voigt. Bemerkungen zu Hrn. W. Wernicke's Beobachtungen über die elliptische Polarisation des von durchsichtigen Körpern reflectirten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 326-331.

W. Wernicke. Erwiderung auf Hrn. Voigt's Bemerkungen zur elliptischen Polarisation des von durchsichtigen Körpern reflectirten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 1028-1032.

W. Voigt. Zur Erklärung der elliptischen Polarisation bei Reflexion an durchsichtigen Medien. Wiedemann Ann. (2) XXXII. 526-528.

Herr Wernicke berechnet die resultirende Intensität für die Interferenz von Strahlen, die teils an der Vorderfläche einer planparallelen, dünnen und durchsichtigen Schicht reflectirt sind, teils nach einer Reflexion im Innern aus jener Schicht heraustreten, unter der Voraussetzung, dass mit der Brechung eine Phasenverzögerung verbunden ist. Die sich ergebende Formel wird discutirt. Im übrigen ist der Inhalt der Arbeit des Herrn Wernicke rein experimentell, aber von theoretischem Interesse. Herr Wernicke zeigt nämlich, dass die elliptische Polarisation, welche bei der Reflexion an durchsichtigen Substanzen auftritt, zum Teil zwar von einer jene Substanzen bedeckenden Oberflächenschicht herrührt, dass aber auch nach Entfernung der Oberflächenschicht die reine Substanz noch elliptische Polarisation zeigt. Dass das von Herrn Wernicke ersonnene Verfahren die Oberflächenschicht wirklich entfernte, wurde daraus erkannt, dass nach der Entfernung der Schicht der Haupteinfallswinkel (d. i. derjenige, für welchen die Componenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene eine Phasendifferenz $= \frac{\pi}{2}$ besitzen) mit dem Brewster'schen Polarisationswinkel zusammenfiel. Zur Erklärung der elliptischen Polarisation würde hiernach die Annahme einer fremden Oberflächenschicht nicht hinreichen.

Dem gegenüber stellt Herr Voigt die Ansicht auf, neben der künstlichen Oberflächenschicht sei noch eine zweite, natürliche

vorhanden; die letztere sei dadurch bedingt, dass die ponderablen Molecüle an der Oberfläche in andrer Anordnung sich im Gleichgewicht befinden, als im Innern. Bei den Versuchen des Herrn Wernicke sei nun allein die künstliche Schicht entfernt, nicht aber die natürliche. Herr Voigt untersucht dann den Einfluss der letzteren Schicht unter der Annahme, dass dieselbe homogen sei. Durch Anwendung bekannter Formeln gelangt er dabei zu folgendem Resultat: Wenn die Dicke l der Schicht so gering ist, dass $2\pi l \cos\varphi_1 : \lambda_1$ neben 1 als kleine Grösse erster Ordnung anzusehen ist, so ist der Haupteinfallswinkel bis auf Grössen zweiter Ordnung genau durch die Brewster'sche Definition des Polarisationswinkels gegeben. Für diesen Haupteinfallswinkel aber bleibt eine Ellipticität von der ersten Ordnung übrig. Damit ist die Möglichkeit gezeigt, die bei der Reflexion auftretende elliptische Polarisation durch eine natürliche Oberflächenschicht zu erklären.

Herr Wernicke bestreitet in seiner Replik das Vorhandensein einer natürlichen Oberflächenschicht. Die Voigt'schen Rechnungen, deren Richtigkeit zuzugeben sei, passten nur auf eine künstliche Schicht, und diese sei bei seinen eignen Versuchen entfernt. Auch seien seine Beobachtungen über die Grösse der elliptischen Polarisation nach Entfernung der künstlichen Schicht mit den Folgerungen der Voigt'schen Formeln nicht vereinbar.

Herr Voigt endlich zeigt, dass dieser letztere Schluss nicht zutreffend ist. Wenn ferner die Existenz der natürlichen Oberflächenschicht auch hypothetisch sei, so sei dieselbe doch wahrscheinlich. Sein Erklärungsversuch der Entstehung der elliptischen Polarisation sei daher durch Herrn Wernicke's Bemerkungen in keiner Weise widerlegt. Wn.

W. Voigt. Ueber die Reflexion des Lichtes an circular polarisirenden Medien. Wiedemann Ann. (2) XXX. 190-192.

Herr Voigt führt die Differenz zwischen den aus seinen Formeln abgeleiteten Zahlenwerten und den Beobachtungen des Herrn K. Schmidt (cf. F. d. M. XVIII. 1886. 1001) auf den Einfluss einer durch das Poliren entstandenen Oberflächenschicht

zurück. Durch jene Beobachtungen sei seine Theorie daher in keiner Weise erschüttert. Allerdings böten die circularpolarisirenden Medien noch gewisse theoretische Schwierigkeiten dar. Diese werden ausführlich erörtert. Wn.

W. Walton. On a physical property of a certain generator of the wave-surface of a biaxis crystal. Quart. J. XXII. 268-270.

Durch jeden Punkt P einer Wellenfläche kann man bekanntlich einen sphärischen Kegelschnitt legen; derselbe ist der Durchschnitt der um den Mittelpunkt O der Wellenfläche mit dem Radius $OP = r$ beschriebenen Kugel und des Kegels

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{r^2-c^2}=0.$$

Von dieser Curve wird hier gezeigt, dass sie senkrecht steht auf der Richtung der Schwingung, die der Punkt P bei der Lichtbewegung ausführt. Es folgt dies leicht aus bekannten Formeln für die Doppelbrechung. Wn.

E. Mascart. Quelques propriétés relatives à l'action des lames cristallines sur la lumière. C. R. CV. 536-540.

Auf eine planparallele Krystallplatte falle elliptisch polarisirtes Licht. Dasselbe wird beim Eintritt in die Platte in zwei geradlinig polarisirte Wellen zerlegt, die in der Platte eine ungleiche Phasenverzögerung erfahren und sich beim Austritt wieder zu einer elliptischen Schwingung zusammensetzen. Ist die Lage der Hauptschnitte der Platte sowie die Differenz der durch dieselben bewirkten Phasenverzögerungen gegeben, so kann man die Lage und das Axenverhältnis der Schwingungsellipse der austretenden Welle berechnen. Die zu diesem Ziele führenden Formeln lassen sich nun, wie Herr Mascart zeigt, umkehren: d. h. man kann aus der Lage und Gestalt der beiden Schwingungsellipsen der eintretenden und austretenden Welle die Lage der Hauptschnitte der Platte sowie die beim Durchgang ein-

tretende Phasendifferenz berechnen. Daraus ergiebt sich folgender Satz: „Die Wirkung, welche eine beliebige Zahl von Krystallplatten mit oder ohne Drehungsvermögen auf das Licht ausübt, ist dieselbe wie die Wirkung einer einzigen Platte, die aus einem einaxigen Krystall der Axe parallel geschnitten ist und auf den einfallenden Strahlen senkrecht steht“.

Das Resultat wird zuerst unter der Voraussetzung abgeleitet, dass das Licht beim Eintritt und Austritt an der Platte dieselbe Intensität besitzt. Sodann wird gezeigt, dass dasselbe auch gültig bleibt, wenn beim Durchgang durch die Platte die Intensität sich ändert; nur muss das Verhältnis der geänderten Intensität zur ursprünglichen für den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl das gleiche sein. Ist die letztere Voraussetzung nicht erfüllt, so ist ausser der Kenntnis der beiden Schwingungsellipsen noch die des Intensitätsverlustes nötig. Wn.

J. Friess. Einfache Regel zur Bestimmung der isochromatischen Curven in einaxigen Krystallplatten bei beliebiger Neigung der Axe gegen die Oberfläche. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 90-94.

Für eine Platte der im Titel bezeichneten Art wird unter Anwendung bekannter Sätze der Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und ausserordentlichen Strahl berechnet, wobei der einfallende Strahl als beliebig orientirt angenommen wird. Isochromatische Curven zeigt nun die zwischen zwei Polarisatoren befindliche Platte an den Stellen, wo jener Gangunterschied constant ist. Daraus ergiebt sich unmittelbar die Gleichung der isochromatischen Curven. Dieselben sind für kleine Einfallswinkel Kegelschnitte. Insbesondere wird erörtert, wann jene Curven Kreise oder Parabeln werden; der Fall der Parabel wird in eine einfache Regel zusammengefasst. Für die Resultate nimmt der Verfasser, der dieselben bereits 1877 in einem Programm (Oberrealschule zu Olmütz) veröffentlicht hatte, die Priorität Herrn Bertin gegenüber in Anspruch, dessen Arbeit erst 1884 erschienen ist. Wn.

B. Hecht. Ueber die elliptische Polarisation im Quarz. Wiedemann Ann. (2 XXX. 274-285.

In eine Quarzplatte, deren Normale mit der optischen Axe nicht zusammenfällt, tritt in der Richtung der Normale linear polarisirtes Licht ein. Das aus der Platte austretende, elliptisch polarisirte Licht geht durch einen Compensator und weiter durch eine aus vier Teilen bestehende Quarzplatte, von denen zwei die Polarisationsebene rechts herum, die beiden andern um denselben Winkel links herum drehen, endlich durch einen Analysator. Es wird die Intensität des schliesslich austretenden Lichtes in bekannter Art berechnet und die Bedingung dafür entwickelt, dass alle Teile der Quarzplatte gleich hell erscheinen.

Wn.

J. Krejči. Ueber elliptische und circuläre Polarisation an Krystallen. Prag. Ber. 401-412.

Der Verfasser will das Auftreten der elliptischen und circularen Polarisation an Krystallen daraus erklären, dass zwei Axen des Krystalls das Verhältnis $n:4$ haben, wobei n eine ungerade Zahl ist. Zur Begründung dieser Annahme stellt er einige einfache analytisch-geometrische Erörterungen an, die indessen auf ganz unklaren und nicht zutreffenden Vorstellungen über das Verhalten des polarisirten Lichtes in Krystallen beruhen und daher wertlos sind. Wn.

P. Joubin. Sur la dispersion rotatoire magnétique. C. R. CV. 661-664.

Von den für die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes aufgestellten theoretischen Formeln stimmen zwei, darunter eine von Herrn C. Neumann entwickelte, mit den Verdet'schen Beobachtungen gar nicht, eine dritte von Maxwell herrührende nicht genügend überein. Dagegen giebt eine Formel von Mascart, die auf der Vorstellung beruht, dass unter Einwirkung des Magneten die Periode der Lichtschwingung eine

andere ist, als sie vorher war, einen Teil der Verdet'schen Messungen gut wieder. Durch Wiederholung der übrigen Verdet'schen Versuche nach einer modificirten Methode hat der Verfasser auch hier die Mascart'sche Formel bestätigt gefunden.

Wn.

E. Ketteler. Constanz des Refractionsvermögens. Wiedemann Ann. (2) XXX. 285-299.

Der Verfasser prüft verschiedene empirische Formeln an Beobachtungen und findet schliesslich, dass für zwei verschiedene Farben 1 und 2 der Ausdruck

$$\frac{n_2^2-1}{n_1^2-1}$$

eine der betreffenden Substanz eigentümliche Constante ist, die sich mit der Temperatur nicht ändert. Wn.

E. Ketteler. Zur Handhabung der Dispersionsformeln. Wiedemann Ann. (2) XXX. 299-316.

E. Ketteler. Zur Dispersion des Steinsalzes. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 322-326.

Der Verfasser bringt eine von ihm früher aufgestellte Dispersionsformel für den Fall durchsichtiger Medien auf die Form:

$$n^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{D\,.\,\lambda_m^2}{\lambda^2-\lambda_m^2},$$

prüft dieselbe an fünf verschiedenen Beobachtungsreihen und findet, dass sie zwischen den Wellenlängen $\lambda = 2{,}4$ und $\lambda = 0{,}18$ (in Tausendstelmillimetern), bei Steinsalz sogar bis $\lambda = 5{,}3$ gültig ist, während andere Dispersionsformeln eine viel beschränktere Gültigkeit besitzen. Hat die obige Formel hiernach grossen empirischen Wert, so fehlt ihr doch noch immer die genügende theoretische Begründung, wie Referent schon wiederholt zu bemerken Veranlassung hatte (cf. F. d. M. XVII. 1885. 985, wie auch Bd. XV und XVI). Wn.

F. Koláček. Versuch einer Dispersionserklärung vom Standpunkte der elektromagnetischen Lichttheorie. Wiedemann Ann. (2) XXXII. 224-255.

F. Koláček. Nachtrag zur Abhandlung: „Versuch einer Dispersionserklärung“ etc. Wiedemann Ann. (2) XXXII. 429-439.

Der Verfasser leitet zunächst in wenig durchsichtiger Darstellung die Maxwell'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik ab [cf. Maxwell: Treatise on Electricity and Magnetism II, p. 235 u. 385]. Er sucht weiter die Bedingungen für die Grenzfläche zweier verschiedenen Medien zu ermitteln, gelangt dabei aber zu einem Resultat, das, wie im Nachtrag bemerkt wird, im allgemeinen nicht richtig ist, sondern nur für die Bewegung der Elektricität in einem sich selbst überlassenen Körper gilt, welcher von einer Materie umgeben ist, in der weder Leitungsströme noch dielektrische Polarisationsströme zu Stande kommen können. Den erwähnten Gleichungen und den Grenzbedingungen von beschränkter Gültigkeit kann man für einen kugelförmigen Leiter durch folgende Werte der Kraftcomponenten, denen die dielektrischen Verschiebungen proportional sind, genügen:

$$\xi = -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right),\quad \eta = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y},\quad \zeta = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z}\,{}^{*)},$$

wo

$$S = \Sigma\{A\sin(\beta t)+B\cos(\beta t)\}e^{-\alpha t}\cdot\frac{\sin\left(\frac{mr}{R}\right)}{r},$$

ferner m eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$m = \operatorname{tg} m$$

ist, während R den Kugelradius bezeichnet, A und B willkürliche Constanten, α und β dagegen Grössen, die von m, R und den Constanten des Mediums abhängen.

Nach diesen Vorbereitungen wird die eigentliche Dispersionstheorie entwickelt. Für den freien Aether würde, falls die Fortpflanzungsrichtung parallel der Axe z, die Schwingungs-

---

*) In der Arbeit sind diese Gleichungen nicht ganz richtig.

richtung parallel x ist, die Gleichung gelten:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0.$$

Für den intramolecularen Aether wird nun angenommen, dass die Kraftcomponente ξ aus zwei Teilen besteht, einem Teile ξ_i, der von den Stromschwankungen des Aethers selbst herrührt, sowie einem zweiten Teile ξ'_m, der durch die Stromschwankungen innerhalb der Molecüle veranlasst ist. Von den Molecülen wird angenommen, dass sie die Gestalt von Kugeln haben, und dass daher in ihnen Stromschwankungen der vorher betrachteten Art stattfinden können. Da $\Delta\xi'_m = 0$ ist, so gilt für den intramolecularen Aether die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi'_m}{\partial t^2} = 0.$$

Durch Betrachtungen, die zum Teil wenig streng sind und ausserdem mehrfach neue Hülfshypothesen einführen, wird der Ausdruck für ξ'_m und daraus ein andrer für die Mittelwerte aller von den Molecülen herstammenden Kräfte gewonnen. So gelangt der Verfasser zu folgender Gleichung für die Mittelwerte $\bar{\xi}$ der ξ_i:

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2} - V^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial z^2} + \Sigma R A \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi_\varepsilon}{\partial t^2} = 0,$$

während aus den Schwingungen der Molecüle selbst eine zweite Gleichung zwischen ψ und $\bar{\xi}$ abgeleitet wird. Aus beiden Gleichungen ergeben sich Dispersionsformeln, die für durchsichtige Körper mit den von Ketteler aufgestellten übereinstimmen, für absorbirende Körper dagegen eine etwas andere Gestalt haben als bei Ketteler. Referent glaubt auf die einzelnen Resultate um so weniger eingehen zu sollen, als die Ableitung der zu Grunde gelegten Gleichungen zu erheblichen Bedenken Anlass giebt. Neben den schon oben erwähnten Punkten ist besonders die Anwendung der nicht allgemein gültigen Grenzgleichung für die Oberfläche der Molecüle zu beanstanden.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man die Dispersionsformeln, soweit es durchsichtige Medien betrifft, auch aus der mechanisch-

elastischen Lichthypothese ableiten kann, während im Nachtrag noch zu zeigen versucht wird, dass die aufgestellten Dispersionsformeln an die Annahme kugelförmiger Molecüle nicht gebunden sind, sondern auch gültig bleiben, wenn man den Molecülen andere Gestalten zuschreibt. Wn.

C. Geometrische Optik.

H. v. HELMHOLTZ. Handbuch der physiologischen Optik. Zweite umgearbeitete Auflage. Lieferung 4. Hamburg u. Leipzig. L. Voss.

Der Anfang des Werkes ist F. d. M. XVIII. 1886. 1007 besprochen. Die vorliegende Lieferung enthält von mathematischen Entwickelungen nur eine Darstellung der Brechung im Prisma für die beiden Fälle, dass die Strahlen in einem Hauptschnitt verlaufen, und dass dieselben sich in einer zur brechenden Kante parallelen Ebene ausbreiten. Wn.

R. S. HEATH. A treatise on geometrical optics. Ref. in Nature XXXVI. 219-220. Gbs.

C. PULFRICH. Ein neues Totalreflectometer. Wiedemann Ann. (2) XXX. 193-208, 487-502; XXXI. 724-733.

Das Instrument besteht aus einem vertical stehenden geraden Glascylinder, dessen Mantelfläche und obere Grundfläche geschliffen und polirt sind. Die Strahlen treten von unten her durch die Mantelfläche des Cylinders, werden an der oberen Grundfläche, auf der das zu untersuchende Object liegt, total reflectirt und treten auf der andern Seite der Mantelfläche aus. Der Gang der Strahlen wird genauer verfolgt und die Bedingungen der Totalreflexion erörtert. Endlich werden verschiedene physikalische Anwendungen des Instruments mitgeteilt. Wn.

C. PULFRICH. Einfluss der vorderen Prismenfläche bei der Wollaston'schen Methode auf den Neigungswinkel der Grenzlinie gegen die Verticale. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 734-736.

B. HECHT. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Pulfrich über die Wollaston'sche Methode. Wiedemann Ann. (2) XXXII. 275-277.

In Bezug auf den Einfluss der Brechung, welche der Grenzkegel der Totalreflexion bei Benutzung der Wollaston'schen Methode an der Austrittsfläche des Prismas erleidet, war Herr Pulfrich zu entgegengesetzten Resultaten gelangt wie die Herren Liebisch und Hecht. Der Grund liegt darin, dass die beiden Ableitungen, welche Herr Pulfrich von der in Rede stehenden Formel giebt, fehlerhaft sind. Herr Hecht deckt diese Fehler auf. Wn.

A. RIGHI. Sui fenomeni che si producono colla sovrapposizione di due reticoli e sopra alcune loro applicazioni. Ven. Ist. Atti. (6) V. 141-199.

Legt man zwei Gitter, die aus geradlinigen parallelen Stäben gebildet sind, so auf einander, dass die Stäbe des einen Gitters gegen die des andern geneigt sind, und sieht durch diese Combination gegen das Licht, so bemerkt man dunkle und helle parallele Streifen, getrennt durch halbdunkle Flächenstücke. Die hellen Streifen entstehen an den Stellen, wo zwei Gitterstäbe über einander liegen, während die dunklen dort erscheinen, wo die Stäbe des einen Gitters die Zwischenräume des andern verdecken. Es handelt sich darum, die Abstände und die Richtungen jener Streifen zu bestimmen. Das geschieht durch elementare trigonometrische Rechnungen zunächst für den Fall, wo die Gitterstäbe parallele äquidistante Linien sind, sodann auch für den Fall, wo die Breite der Stäbe in Betracht kommt. Die Resultate gestatten unmittelbar einen Schluss auf die Aenderung, welche die Lage der Streifen erleidet, falls man das eine Gitter sich selbst parallel verschiebt. Weiter wird auch die Intensität der

einzelnen Teile der hellen und dunklen Streifen sowie der halbdunklen Zwischenräume berechnet, indem den Stäben jedes Gitters sowohl als den Zwischenräumen bestimmte Absorptionscoefficienten zugeschrieben und diese mit den zugehörigen Längen multiplicirt werden. Auch hier handelt es sich um elementare Betrachtungen, deren Resultate sich nicht in Kürze wiedergeben lassen. Einzelne Specialfälle werden eingehend discutirt.

Von den in Rede stehenden Streifen werden interessante Anwendungen auf physikalische Beobachtungsmethoden gemacht; auch wird die Herstellung passender Gitter ausführlich besprochen.

Wn.

A. Michelson and E. W. Morley. On a method of making the wave-length of sodium light the actual and practical standard of length. Phil. Mag. (5) XXIV. 463-466.

Nach Angabe der Methoden einiger früheren Experimentatoren wird eine beschrieben, bei welcher der Apparat zur Beobachtung der Interferenzerscheinungen derselbe ist, wie der bei den Versuchen über die relative Bewegung der Erde und des Lichtäthers (s. oben S. 1084). Vorläufige Experimente scheinen gute Resultate zu versprechen. Gbs. (Lp.)

E. Lommel. Die Photometrie der diffusen Zurückwerfung. Münch. Ber. 95-132.

L. Weber. Zur Theorie des Bunsen'schen Photometers. Wiedemann Ann. (2) XXXI. 676-700.

Der Verfasser beweist die Notwendigkeit, bei Benutzung des qu. Photometers eine Vertauschung der beiden Schirmseiten vorzunehmen und also 4 Einstellungen zu machen. Im übrigen vergleiche man die Arbeiten von Lummer-Brodhun. (Z. f. Instrum.-Kunde 1889. pag. 23 und 41). R. M.

P. SWESCHNIKOFF. Ueber die Brennlinien der gebrochenen Lichtstrahlen und ihre Anwendung zur Bestimmung der Lage der Objecte in den brechenden Mitteln. Kazan. 54 S. (Russisch.)

P. SWESCHNIKOFF. Bestimmung der optischen Bilder in den brechenden Mitteln, welche von Ebenen und sphärischen Oberflächen begrenzt sind. Kazan. 31 S. u. 5 Taf. (Russisch.)

W. SALTZMANN. Bestimmung des Ortes und der Helligkeit des gebrochenen Bildes eines Punktes, wenn die brechende Fläche eine Ebene ist. Schlömilch Z. XXXII. 369-373.

Der Verfasser untersucht (vgl. Oekinghaus F. d. M. XVIII. 1886. 1009.) die Beziehungen zwischen der Lage des Auges A, des Objectpunktes O und des Bildpunktes B; dann aber bewegt er A und findet, dass bei festem O die scheinbare Bahn von B die Evolute einer Ellipse ist, deren einer Brennpunkt O ist und deren kleine Axe in der brechenden Ebene liegt. Die anschliessende Helligkeitsbestimmung hat weniger Interesse, da sowohl der durch Absorption als auch der durch Reflexion verloren gehende Teil des Lichts vernachlässigt wird. R. M.

L. MATTHIESSEN. Bestimmung der Cardinalpunkte eines dioptrisch-katoptrischen Systems centrirter sphärischer Flächen, mittelst Kettenbruchdeterminanten dargestellt. Schlömilch Z. XXXII. 170-175.

Der Verf. erweitert seine in derselben Zeitschrift XXIX. 343 [F. d. M. XVI. 1884. 939] gegebenen Formeln auf den Fall, dass die letzte sphärische Fläche spiegelt, so dass die Strahlen das brechende System wieder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Die Formeln gestatten eine Anwendung auf das menschliche Auge, wenn die Krümmung der Linsenflächen mit Hilfe der Sanson'schen Bilder bestimmt werden soll. R. M.

H. BROCKMANN. Beiträge zur Dioptrik centrirter sphärischer Flächen. Diss. Rostock. 40 S. 8°.

H. BROCKMANN. Zur Theorie der dioptrisch-katoptrischen Systeme. Central-Ztg. f. Optik u. Mechanik. 1887. No. 1.

A. MEYER. Billeddannelse i Kuglespeile og Linser. Zenthen Tidss. (5) V. 1-9.

Leichtfassliche Darstellung der Eigenschaften von den durch Hohlspiegel und Linsen erzeugten Bildern. V.

P. ZECH. Elementare Behandlung von Linsensystemen. Böklen Mitt. II. 9-24.

Der Verfasser will „eine Art von Programm feststellen, wie Lehrbücher der Physik auf ganz einfachem, aber vollständig allgemeinem Wege den vorliegenden Teil der Optik behandeln können.“

Ausgehend von der Construction des gebrochenen Strahls nach Reusch entwickelt er allein auf dieser Grundlage auf constructivem Wege die Eigenschaften der Bilder, Haupt-, Brenn- und Knotenpunkte und giebt kurze Anwendungen auf Linse, Mikroskop, Fernrohr. Die Constructionen erfordern, dass die der Axe parallelen Dimensionen der Wirklichkeit entsprechend gezeichnet, die dazu senkrechten aber bedeutend vergrössert werden. Die hierin liegende Abstraction scheint ein Hindernis für die Aufnahme dieser eleganten Deductionen in elementare Lehrbücher.

R. M.

A. TANAKADATE. The constants of a lens. J. of the College of Science Japan. I. 333-336.

Die Wirkung einer Linse, welche einen Lichtstrahl an der vorderen Fläche bricht, an der hintern reflectirt, ist äquivalent der eines Spiegels, dessen Krümmung

$$= -\frac{\mu-1}{r_1}+\frac{\mu}{r_2},$$

wo μ den Brechungsindex, r_1 und r_2 die Krümmungsradien beider Flächen der Linse bezeichnen. Dies gilt bei Vernachlässigung der Dicke; es wird dann die Correction berechnet, welche ihrer Berücksichtigung entspricht. H.

N. Jadanza. Una questione di ottica ed un nuovo apparecchio per raddrizzare le immagini nei cannocchiali terrestri. Torino Atti. XXII. 447-452.

Auf der Axe jedes centrirten optischen Systems liegen zwei projectivische Punktreihen, die Reihe der Objectpunkte und die Reihe der Bildpunkte; im Falle der Reflexion an einem sphärischen Spiegel sind diese beiden Reihen in Involution. Dies kann aber auch bei einem rein dioptrischen Systeme eintreten. Man kann nämlich aus zwei Sammellinsen ein System herstellen, dessen beide Hauptbrennpunkte zusammenfallen; diese Combination kann im terrestrischen Fernrohr zur Umkehrung des verkehrten Objectivbildes gebraucht werden und giebt alsdann die möglichste Verkürzung des Fernrohrs, welche mit der Bedingung verträglich ist, dass das Objectivbild sich vor der Umkehrungsvorrichtung wirklich bilden soll [cf. F. d. M. XVIII. 1886. 1012].

R. M.

H. Krüss. Die Farben-Correction der Fernrohr-Objective von Gauss und Frauenhofer.

O. Handel. Zur Theorie der Spiegelung des Regenbogens an einer ruhigen Wasserfläche. Pr. König Wilhelms-Schule Reichenbach (Schlesien). 19 S. 4°.

Man weiss, dass der Beobachter eines Regenbogens unter gewissen Umständen gleichzeitig in einer ruhigen Wasserfläche das Spiegelbild eines andern tiefer liegenden Bogens sehen kann. Der Verfasser untersucht auf elementarem Wege die gegenseitige Lage und Grösse der beiden Bogen, bestimmt das Areal, welches das Wasser mindestens einnehmen muss, und verweilt besonders

bei dem Einfluss, welchen die Höhe der Sonne, die Höhe des beobachtenden Auges und die Entfernung der Regenwand auf Lage und Länge der Begrenzungs-Sehnen ausüben. R. M.

Ch. Cellérier. Note sur la théorie des halos. Basel. H. Georg. Gen. Mém. XXIX. 71 S. 4°.

Die vielgestaltigen Lichterscheinungen der Höfe und Nebensonnen sind schon 1825 durch eine klassische Arbeit Fraunhofer's erklärt worden (Schumacher's Astronom. Mitteilungen). Sie entstehen durch die Brechung des Lichts in Eisnadeln, deren Querschnitt ein im allgemeinen unregelmässiges Sechseck ist. Je zwei anstossende Flächen bilden einen Winkel von 120°; Ein- und Austrittsfläche der wirksamen Strahlen sind durch eine dritte Fläche getrennt, bilden also einen Winkel von 60°. Die Theorie Fraunhofer's (dessen Namen wir übrigens in der vorliegenden umfangreichen Arbeit vergeblich gesucht haben) berücksichtigt jedoch nur die ins Auge fallenden leuchtenden Ringe und Kreise; die Erscheinung besteht aber in einer Erhellung ausgedehnterer Regionen des Himmels, deren Maximum eben jene Ringe bilden. Zweck des Herrn Cellérier ist es, die Intensität des Lichtes an den verschiedenen Punkten des Himmels zu bestimmen, derart, dass ein Ueberblick über die Abnahme möglich ist.

Im wesentlichen handelt es sich um die Bestimmung der Ablenkung eines Lichtstrahls; daher schickt der Verfasser seinen eigentlichen Betrachtungen die räumliche Theorie des Prismas voraus. Da man sich gewöhnlich auf solche Strahlen beschränkt, welche in einer zur brechenden Kante normalen Ebene verlaufen, so dürften diese umfassenderen Formeln ein allgemeineres Interesse beanspruchen.

Die Verteilung der Eisnadeln in der Luft ist nicht gleichmässig, sondern diejenigen, deren Axen ungefähr vertical sind, sind relativ zahlreicher. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, nimmt der Verfasser zunächst ein Hauptsystem von Nadeln an, deren Axen nach allen Richtungen gleichmässig ver-

Dazu kommt eine Schar von Nebensystemen, jedes gebildet aus Nadeln, deren Axen untereinander parallel sind; die Zahl der Nadeln jedes Nebensystems soll nach unbekanntem Gesetz wachsen in dem Masse, wie die Axenrichtung sich der Verticalen nähert. Die optischen Erscheinungen, welche den einzelnen Systemen zukommen, werden sich dann superponiren; der Hof im engeren Sinne rührt vom Hauptsystem her. Die Sonne wird als leuchtender Punkt, ihr Licht homogen vorausgesetzt. Die analytischen und numerischen Resultate entziehen sich der Wiedergabe. R. M.

W. Biermann. Einige Beobachtungen über Spiegelkimmung. Met. Zeitschr. IV. 186-189.

Im Gegensatze zu Budde erklärt der Verfasser die unter dem Namen „Kimmung" bekannten eigentümlichen Hebungen und Deformationen weit entfernter Objecte nicht durch Reflex an der Wasserfläche, sondern durch unmittelbare Luftspiegelung. Der geradlinige Lichtstrahl wird durch anormale Reflexion in eine Parabel mit verticaler Axe verwandelt, deren Elemente mathematisch bestimmt werden. Soviel uns bekannt, hat auch bereits J. Biot die Gleichung dieser Spiegelungscurve abgeleitet. Gr.

Köpke. Ueber die Höhenlage von Strassenlaternen. Civiling. XXXIII. 69-74.

Die Helligkeit in der Entfernung f von einer Laterne der Höhe y wird gegeben durch

$$H = \frac{ky}{\sqrt{(f^2+y^2)^3}}.$$

Dieser Ausdruck wird discutirt, und das Ergebnis auf die im Titel genannte Aufgabe angewandt. F. K.

Mentz. Berechnung der Tagesbeleuchtung innerer Räume und Massstäbe dazu. Deutsche Bauztg. XXI. 257-260.

Die Aufgabe führt auf einfache Quadraturen, deren Ausführung kein Interesse erregt. F. K.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

C. Dunker. Das Weber'sche Grundgesetz, die beiden Potentialformen für dasselbe von Weber und C. Neumann, das ponderomotorische und elektromotorische Elementargesetz. Progr. d. Realgymn. Hadersleben.

a) Bekanntlich lässt sich das Weber'sche Grundgesetz

$$R = ee'\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2\ddot{r}}{r}\right)\right]$$

aus zwei wesentlich verschiedenen Energiefunctionen ableiten, nämlich aus

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2}\dot{r}^2\right) \quad \text{und} \quad U = \frac{ee'}{r}\left(1 + \frac{1}{c^2}\dot{r}^2\right).$$

V ist die von Weber selbst aufgestellte und als das Potential der zwei Elektricitätsteilchen bezeichnete Function; aus ihr ergiebt sich R in der Weise, dass die bei der wirklichen Bewegung im Zeitelement dt geleistete Arbeit ist

$$dA = Rdr = -\frac{dV}{dt}dt = \frac{ee'}{r^2}dr + \frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{r}\right)\frac{dr}{\dot{r}}$$
$$= ee'\,dr\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{2\ddot{r}}{r}\right)\right].$$

Dagegen ist $\delta A = -\delta U$ eine virtuelle Arbeit, aus welcher sich nach C. Neumann mittels des Hamilton'schen Princips

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(L - U)\,dt = 0$$

die Kraft bestimmt; dabei ist

$$\delta\left(\frac{\dot r^2}{r^2}\right) = -\frac{\dot r^2}{r^2}\delta r + 2\frac{\dot r}{r}\frac{d\delta r}{dt} = \left[-\frac{\dot r^2}{r^2} - 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r}{r}\right)\right]\delta r$$
$$+ 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r}{r}\delta r\right) = \left(\frac{\dot r^2}{r^2} - 2\frac{\ddot r}{r}\right)\delta r + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r}{r}\delta r\right),$$

also

$$\delta A = -\delta U = ee'\delta r\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot r^2}{r^2} - 2\frac{\ddot r}{r}\right)\right] - 2\frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot r}{r}\delta r\right);$$

da nun die Willkürlichkeit von δr so bestimmt wird, dass an den Zeitgrenzen t_0 und t_1 $\delta r = 0$ gesetzt wird, so ist der in dem Hamilton'schen Princip benutzte zeitliche Mittelwert oder das Zeitintegral von δA wieder gleich dem obigen von dA, d. h., wenn nur die Coordinaten von e variirt werden,

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta A dt = \int_{t_0}^{t_1} R\delta r dt = \int_{t_0}^{t_1}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dt,$$

wo X, Y, Z die Componenten der Weber'schen Kraft von e' auf e bezeichnen. Setzt man also die lebendige Kraft der zwei Teilchen

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \cdots) + \frac{m'}{2}(\dot x'^2 + \cdots),$$

also

$$\delta L = m(\dot x\delta\dot x + \cdots) = m\frac{d}{dt}(\dot x\delta x + \cdots) - m(\ddot x\delta x + \cdots),$$

so giebt das Hamilton'sche Princip

$$0 = \int_{t_0}^{t_1}[(-m\ddot x + X)\delta x + \cdots]dt,$$

also $m\ddot x = X$, giebt also für die Kraft den aus dem Weber'schen Grundgesetz folgenden Ausdruck.

(Durch diese Bemerkung, dass $dA = -dV$ die wirkliche, $\delta A = -\delta U$ eine virtuelle Arbeit bezeichnet, löst sich das Paradoxon, dass scheinbar dieselbe Arbeit durch zwei wesentlich verschiedene Energiefunctionen dargestellt wird; die Arbeit ist in Wirklickeit in beiden Fällen nicht dieselbe. Der Verfasser weist nur das bekannte Factum nach, dass beide Functionen auf das Weber'sche Grundgesetz führen. D. Ref.)

b) Das Potential zweier Stromelemente Jds, $J'ds'$ auf einander, d. h. die Summe der Werte von U für die 4 Paare der in ihnen strömenden Massen, ist

$$P = \frac{2}{c^2} JJ'dsds' . \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} .$$

Aus diesem Potential leitet der Verfasser mittels des Hamilton'schen Princips das ponderomotorische Elementargesetz her, welche Ableitung natürlich zu demselben Resultat führen muss, wie die weit einfachere directe Herleitung aus dem Weber'schen Grundgesetz, nachdem einmal nachgewiesen ist, dass das Hamilton'sche Princip zu dem Weber'schen Grundgesetz führt. Hieraus leitet der Verfasser weiter das elektromotorische Elementargesetz nach dem Vorgang von C. Neumann mittels des Princips ab, dass die Summe der ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten in den zwei Stromelementen das zeitliche Differential einer durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmten Function sein muss, wobei er mit C. Neumann als diese Function das Potential P der zwei Stromelemente annimmt: eine Annahme, welche darauf hinauskommt, dass der Zustand des Systems bloss durch die gegenseitige Lage der zwei Stromelemente und die Stromstärken bestimmt sei, und welche durchaus nicht einwurfsfrei ist. (Vgl. Lorberg „Bemerkung zu dem Aufsatz von Riecke über die elektrischen Elementargesetze." Wiedemann Ann. XII. 1881.) Er kommt dadurch natürlich zu dem von C. Neumann aufgestellten, von dem Weber'schen abweichenden elektromotorischen Gesetz. Der Zweck, zu welchem diese schon mehrfach ausgeführten Rechnungen in ermüdender Breite und mit unerquicklichem Mangel an Eleganz wiederholt werden, ist nicht recht ersichtlich. Lbg.

E. Riecke. Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen. Gött. Nachr. 10-28; Math. Ann. XXX. 309-325.

a) Der Verfasser behandelt zuerst die stationäre Strömung einer Flüssigkeit, in welcher sich Hohlräume befinden, durch deren Grenzflächen die Flüssigkeit ein- und ausströmt; als Gesch-

keits-Potential kann dann das Potential V elektrischer Massenpunkte genommen werden, deren sich je einer in einem der Hohlräume befindet, sodass die Niveauflächen jene Grenzflächen sind. Weiter betrachtet er in demselben Raum eine periodische Flüssigkeitsbewegung mit dem Geschwindigkeits-Potential $\varphi = V \cos kt$, wobei jene Grenzflächen oscilliren und für $t = 0$ Flächen constanten elektrischen Potentials sind; unter Voraussetzung kleiner Schwingungen lässt sich dann der Mittelwert des Druckes an einer Fläche $V = C$ ausdrücken durch

$$\bar{p} = c + \frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) C \left(\frac{dV}{dn}\right)_{t=0} + \frac{\mu}{4}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2_{t=0},$$

wo c den Druck in der ruhenden Flüssigkeit, μ die Dichtigkeit, ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien, n die äussere Normale der Grenzfläche bezeichnet. Bei nur zwei Grenzflächen, welche durch zwei pulsirende Kugelflächen gebildet werden, ist, wenn die Kugeln mit gleicher Phase pulsiren, $\bar{p}$ am grössten an den einander nächsten, am kleinsten an den einander fernsten Punkten; die Kugeln stossen also einander ab, entgegengesetzt wie bei den Versuchen von Bjerknes.

b) Der Verfasser behandelt noch die stationäre Bewegung einer reibenden Flüssigkeit mit der Reibungsconstante k zwischen zwei parallelen, von der xy-Ebene um $\mp c$ entfernten Platten; die Gleichungen

$$\frac{dp}{dx} = k\,\Delta u, \quad \frac{dp}{dy} = k\,\Delta v, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$u = v = 0 \text{ für } z = \mp c$$

lassen sich erfüllen durch

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0,$$

$$p = k\frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

woraus, wenn man p von z unabhängig annimmt,

$$\varphi = -p\,\frac{16c^2}{\pi^3 k}\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi z}{2c}}{(2n+1)^3}.$$

Die Curven gleichen Geschwindigkeits-Potentials fallen also zusammen mit den Schnittlinien der Flächen constanten Druckes mit Horizontalebenen, die Strömungslinien mit den galvanischen Strömungslinien in der Platte, wenn man sich die Ein- und Ausströmungspunkte der Flüssigkeit als galvanische Ein- und Ausströmungspunkte denkt. Lbg.

E. Riecke. Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer incompressibeln Flüssigkeit in Ruhe sich befinden. Gött. Nachr. 505-515.

Bericht in Abschnitt X, Cap. 4B. S. 988.

R. Hiecke. Ueber die Deformation elektrischer Oscillationen durch die Nähe geschlossener Leiter. Wien. Ber. XCVI. 134-160.

Das eine Ende einer Spirale, deren anderes Ende zur Erde abgeleitet wird, ist mit der einen Platte eines Condensators und mit dem einen Pol einer Batterie verbunden; im Moment, wo durch Oeffnung eines Contactes die Batterie abgetrennt wird, beginnt die Entladung des Condensators, und wird um eine beliebig zu variirende Zeit später durch Oeffnung eines zweiten Contactes unterbrochen; die in diesem Augenblick noch vorhandene Ladung Q wird an einem Galvanometer bestimmt. Bei Einschiebung einer zweiten geschlossenen Drahtrolle oder eines Metallkörpers in die Spirale zeigt sich Q als Function der Zeit in mannigfacher Weise verändert, die Oscillationsdauer bald vergrössert, bald verkleinert, das logarithmische Decrement bald mehr, bald weniger vergrössert; ein einfaches Gesetz ergiebt sich nicht. Lbg.

G. Adler. Ueber das Verhältnis von Energie und Arbeitsleistung beim Condensator. Wien. Ber. XCV. 50-57.

Findet die Polarisation des Dielektricums eines Condensators bei constanter Potentialdifferenz statt, indem z. B. die eine Platte abgeleitet, die andere durch Verbindung mit einer Batterie auf

dem constanten Potential P erhalten wird, und ist $H = \frac{P}{\delta}$ (wo δ der Plattenabstand) die constante Kraft im Dielektricum, $\mu = kH$ das erzeugte dielektrische Moment der Volumeneinheit, so ist die dabei im Dielektricum τ gegen die elektrische Kraft geleistete Arbeit $A_1 = -\int \mu H d\tau = -k\int H^2 d\tau$. Dazu kommt die bei der Polarisation gegen den molecularen Widerstand $\frac{\mu}{k}$ geleistete Arbeit $A_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\mu}{k}\mu d\tau = \frac{k}{2}\int H^2 d\tau$; also ist die ganze bei der Polarisation gegen die elektrischen Kräfte geleistete Arbeit $A = A_1 + A_2 = -\frac{k}{2}\int H^2 d\tau$. Da dies negativ ist, so bedeutet es eine von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit, welche in Deformations-Arbeit oder Wärme verwandelt wird. Die potentielle Energie ist vor der Polarisation

$$E_0 = \frac{1}{8\pi}\int H^2 d\tau,$$

nachher $E_1 = \frac{1+4\pi k}{8\pi}\int H^2 d\tau$, wächst also durch die Polarisation um $E = \frac{k}{2}\int H^2 d\tau$; die Batterie muss also eine Energie $E - A = 2E$ liefern, ebenso wie bei einer Annäherung der Platten bei constantem Potential. Diese gelieferte Energie besteht in der Arbeit der Heranführung einer elektrischen Dichtigkeit μ auf die Grenzschicht σ zwischen der isolirten Platte und dem Dielektricum, um dadurch die Dichtigkeit $-\mu$, durch welche die Wirkung des Dielektricums nach aussen sich ersetzen lässt, zu neutralisiren und so das Potential auf dem constanten Wert P zu erhalten; diese Arbeit ist in der That

$$= \int \mu d\sigma . P = \int \mu H d\tau = k\int H^2 d\tau = 2E.$$

Lbg.

G. Adler. Ueber die Energie und die Gleichgewichtsverhältnisse eines Systems dielektrisch polarisirter Körper. Wien. Ber. XCV. 180-198.

Die untere, abgeleitete Platte eines Condensators sei zur xy-Ebene genommen; das Potential auf der obern sei P, der Plattenabstand δ; das Zwischenmedium bestehe aus zwei Dielektricis, an deren Grenzfläche die Gleichung

$$K\frac{dV}{dn} = K_1\frac{dV_1}{dn}$$

stattfindet. Das Potential im Dielektricum kann

$$V = \frac{P}{\delta}z + W$$

gesetzt werden, wo $\frac{P}{\delta}z$ das Potential der Plattenladung und der z-Componente der dielektrischen Momente an der Grenze der Platten und des Dielektricums ist, W das Potential der auf der Grenzfläche der zwei Dielektrica befindlichen Schicht und der durch dieselbe auf den Platten inducirten Schicht, welche letztere bewirkt, dass auf den Platten $W = 0$ ist. Setzt man $-\frac{dW}{dx} = X$ etc., so sind die Kraftcomponenten X, Y, $Z - \frac{P}{\delta}$, und in irgend einem Stadium der Polarisirung, wenn ein Bruchteil $\vartheta\mu$ des schliesslichen dielektrischen Moments μ erreicht ist, $= \vartheta X$, ϑY, $\vartheta Z - \frac{P}{\delta}$; die zur Herstellung von μ, dessen Componenten ξ, η, ζ seien, nötige Arbeit ist also

$$Q = -\int_0^1 d\vartheta \int \left[\vartheta X\xi + \vartheta Y\eta + \left(\vartheta Z - \frac{P}{\delta}\right)\zeta\right] d\tau$$
$$= \frac{P}{\delta}\int \zeta d\tau - \tfrac{1}{2}\int (X\xi + Y\eta + Z\zeta) d\tau.$$

Dazu kommt die gegen den molecularen Widerstand $\frac{\mu}{k}$ geleistete Arbeit $\frac{1}{2}\int \frac{\mu}{k}\mu d\tau$; die potentielle Energie des Dielektricums ist also, wenn man $\xi = kX$, $\eta = kY$, $\zeta = k\left(Z - \frac{P}{\delta}\right)$ setzt,

$$(1) \qquad E = \tfrac{1}{2}\frac{P}{\delta}\int \zeta d\tau = \frac{k}{2}\frac{P}{\delta}\int\left(Z - \frac{P}{\delta}\right) d\tau.$$

Von dieser Formel macht der Verfasser eine Anwendung auf

den Quincke'schen Versuch, bei welchem sich in der Flüssigkeit zwischen den Condensatorplatten eine nahezu cylindrische, beide Platten berührende Luftblase befindet; nimmt man dieselbe als genau cylindrisch an, so ist die Normalcomponente des dielektrischen Moments an der cylindrischen Grenzfläche $= 0$, also auch $Z = 0$, mithin

$$E = -\frac{k}{2}\frac{P^2}{\delta^2}\int d\tau,$$

welcher Ausdruck derselbe ist, wie der für den entsprechenden Quincke'schen Versuch im Magnetfelde vom Verfasser abgeleitete (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1082), und aus welchem sich die Druckänderung in derselben Weise wie dort ergiebt. Lbg.

G. Adler. Ueber eine neue Berechnungsmethode der Anziehung, die ein Conductor in einem elektrostatischen Felde erfährt. I u. II. Wien. Ber. XCVI. 1036-1055, 1305-1320.

G. Adler. Ueber die elektrischen Gleichgewichtsverhältnisse von Conductoren und die Arbeitsverhältnisse elektrischer Systeme überhaupt. Wien. Ber. XCVII. 90-118. (1888).

a) In der zweiten der vorstehenden Abhandlungen beweist der Verfasser folgende Sätze über elektrostatisches Gleichgewicht, welche teilweise auch in der ersten abgeleitet werden.

1) Hat ein isolirter Conductor C_1 unbeeinflusst von anderen Conductoren das Potential V_1^0, dagegen unter dem Einfluss anderer Conductoren C_2, C_3, ... das Potential V_1, und bezeichnet P das Potential der Ladung des unbeeinflussten Conductors C_1 auf die schliessliche Ladung der übrigen Conductoren, so ist

$$(1) \qquad E_1(V_1 - V_1^0) = P.$$

2) Hat ein auf constantem Potential V_1 erhaltener Conductor C_1 unbeeinflusst die Ladung E_1^0, dagegen unter dem Einfluss anderer Conductoren C_2, C_3, ... die Ladung E_1, so ist

$$(2) \qquad V_1(E_1 - E_1^0) = -P.$$

3) Giebt ein System isolirter Conductoren C_2, C_3, ... mit den Ladungen E_2, E_3, ... vor, resp. nach dem Hineinbringen

eines neuen (isolirten oder abgeleiteten), mit der schliesslichen Flächendichtigkeit e_1 geladenen Conductors C_1 in das Feld das Potential V^0, resp. V, so ist

$$(3) \qquad \int e_1 V_1^0 d\sigma_1 = {}'\sum_2 E_s(V_s - V_s^0).$$

4) Hat ein System von auf constanten Potentialen V_2, V_3, ... erhaltenen Conductoren C_2, C_3, ... vor, resp. nach dem Hineinbringen eines neuen (isolirten oder abgeleiteten oder auf constantem Potential erhaltenen), mit der schliesslichen Flächendichtigkeit e_1 geladenen Conductors C_1 in das Feld die Ladungen E_s^0, resp. E_s, so ist

$$(4) \qquad \int e_1 V_1^0 d\sigma_1 = -{}'\sum_2 V_s(E_s - E_s^0).$$

Diese Sätze ergeben sich ohne Schwierigkeit aus dem bekannten Satze, dass, wenn m_s^0 und m_s zwei beliebige Massensysteme, V_s^0 und V_s ihre Potentiale sind, die Gleichung stattfindet

$$(a) \qquad {}'\sum m_s^0 V_s = {}'\sum m_s V_s^0.$$

Zum Beweis der zwei ersten Sätze nehmen wir als das erste System die anfängliche Ladung von C_1, als das zweite die schliessliche Ladung von C_1, C_2, C_3, ...; die Gleichung (a) giebt dann

$$\int e_1^0 V_1 d\sigma_1 = \int e_1 V_1^0 d\sigma_1 + {}'\sum_2 \int e_s V_s^0 d\sigma_s,$$

welche unter den Bedingungen des ersten, resp. zweiten Satzes übergeht in

$$E_1(V_1 - V_1^0) = {}'\sum_2 \int e_s V_s^0 d\sigma_s = P,$$
$$V_1(E_1^0 - E_1) = P.$$

Zum Beweis der zwei andern Sätze betrachten wir als die zwei Systeme die anfänglichen und nachherigen Ladungen; dann giebt die Gleichung (a)

$${}'\sum_2 \int e_s^0 V_s d\sigma_s = {}'\sum_1 \int e_s V_s^0 d\sigma_s,$$

woraus sich unter den Bedingungen des dritten, resp. vierten Satzes direct die Gleichungen (3) und (4) ergeben.

b) Unter den Bedingungen des dritten Satzes sei φ_1 das

Potential auf dem isolirten Conductor C_1, wenn er sich im Unendlichen befindet, W^0 und W die potentielle Energie des ganzen Systems (C_1, C_2, C_3, ...), wenn sich der Conductor C_1 im Unendlichen und wenn er sich im Felde befindet; es ist dann

$$W^0 = \tfrac{1}{2}E_1\varphi_1 + \tfrac{1}{2}{}^s\sum_2 E_s V_s^0, \qquad W = \tfrac{1}{2}E_1 V_1 + \tfrac{1}{2}{}^s\sum_2 E_s V_s.$$

Die beim Hineinbringen von C_1 aus dem Unendlichen in das Feld gegen die Kräfte geleistete Arbeit ist $W_1 = W - W^0$, also nach Gleichung (3)

$$(5) \qquad W_1 = W - W^0 = \tfrac{1}{2}\int e_1 V_1^0 d\sigma_1 + \tfrac{1}{2}E_1(V_1 - \varphi_1).$$

Die auf C_1 wirkende Kraftcomponente ist $X = -\frac{dW_1}{dx}$, wobei die Constante $\frac{1}{2}E_1\varphi_1$ wegfällt, und man kann zur Berechnung von X mit Vorteil W_1 statt der gewöhnlich benutzten Gesamtenergie W des Feldes verwenden. Der Verfasser zeigt dies in der ersten Abhandlung an dem Beispiel einer durch einen äusseren Massenpunkt m influenzirten Kugel, sowie zweier sich gegenseitig influenzirenden Kugeln. Ist im ersten Fall a der Radius der Kugel, c der Abstand der Masse m vom Mittelpunkt, so ist $\int e_1 V_1^0 d\sigma_1 = mP$, wo P das Potential der Kugel im Punkt m bezeichnet; ist ferner F die auf der abgeleiteten Kugel inducirte Ladung, M die hinzukommende, für sich im Gleichgewicht befindliche Ladung, so ist bekanntlich

$$M = E_1 - F = E_1 + m\frac{a}{c}, \quad V_1 = \frac{M}{a} = \frac{E_1}{a} + \frac{m}{c},$$

$$P = \frac{M}{c} - m\frac{a}{c^2 - a^2},$$

also

$$W_1 = \frac{E_1^2}{2a} + \frac{mE_1}{c} - \frac{m^2}{2}\frac{a^3}{c^2(c^2 - a^2)},$$

woraus sich die Kraft der Masse m auf die Kugel ergiebt.

In dem zweiten Beispiel ist $\int e_1 V_1^0 d\sigma_1 = E_2 P$, wo P das Potential der ersten Kugel im Mittelpunkt der zweiten; ferner ist V_1 das Gesamtpotential im Mittelpunkt der ersten Kugel; hat man

also das Potential einer jeden der zwei Kugeln in Kugelfunctionen ausgedrückt, so ergiebt sich daraus sofort W_1.

c) Unter den Bedingungen des vierten Satzes sei ε_1 die Ladung des Conductors C_1, wenn er sich im Unendlichen befindet; die Gesamtenergie des Feldes vor und nach Einbringen von C_1, welches ebenfalls auf constantem Potential erhalten werde, ist dann

$$\text{(b)} \qquad W^0 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 V_1 + \tfrac{1}{2}{\textstyle\sum_2^{'}} E_s^0 V_s, \quad W = \tfrac{1}{2}E_1 V_1 + \tfrac{1}{2}{\textstyle\sum_2^{'}} E_s V_s.$$

Um den im Felde befindlichen Conductor C_1 bei constantem Potential V_1 zu laden, muss seine Ladung von einer Stelle vom Potential V_1 zu einer Stelle, wo anfangs das Potential V_1^0, nachher das Potential V_1 herrscht, übergehen, wozu eine Arbeit

$$\int e_1\left(\frac{V_1^0+V_1}{2} - V_1\right)d\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\int e_1(V_1^0 - V_1)d\sigma_1$$
$$= \tfrac{1}{2}\int e_1 V_1^0 d\sigma_1 - \tfrac{1}{2}E_1 V_1$$

aufgewandt werden muss, und ausserhalb des Feldes eine Arbeit $-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 V_1$. Um also den auf constantem Potential V_1 erhaltenen Conductor C_1 ins Feld zu bringen, ist eine Arbeit nötig

$$\text{(6)} \qquad W_1 = \tfrac{1}{2}\int e_1 V_1^0 d\sigma_1 - \tfrac{1}{2}(E_1 - \varepsilon_1)V_1$$

oder nach den Gleichungen (4) und (b)

$$\text{(6}^{\text{a}}\text{)} \qquad W_1 = W^0 - W = \text{der Abnahme der Energie.}$$

Lbg.

A. Rosen. Solution d'un problème d'électrostatique.

Lund Arsskr. XXIII. 1-13.

Folgende Aufgabe wird behandelt: Es seien eine leitende elektrisirte Kugel und eine aus einem nicht leitenden Dielektricum gebildete Kugel gegeben, beide in eine unendliche Masse eines anderen Dielektricums eingebettet, z. B. in Luft; die Verteilung der Elektricität wird gesucht. Danach behandelt der Verfasser zwei andere ähnliche Probleme: An die Stelle der dielektrischen Kugel kann man entweder eine dielektrische Kugel setzen, die von einer concentrischen Schicht eines anderen Dielektricums bedeckt wird, oder eine unendliche Masse des Dielektricums,

die von der Luft durch eine unendliche Ebene getrennt wird. Die Lösung wird mit Hülfe der Kugelfunctionen bewerkstelligt. Lp.

H. Poincaré. Sur le problème de la distribution électrique. C. R. CIV. 44-46.

Enthält einen neuen Existenzbeweis einer Flächenbelegung von constantem Potential. Lbg.

A. Vaschy. Sur la nature des actions électriques dans un milieu isolant. C. R. CIV. 51-54.

Ist k die Constante des Coulomb'schen Gesetzes $F = k\frac{ee'}{r^2}$, so ist bekanntlich die Zugkraft des Dielektricums auf die Flächeneinheit eines geladenen Conductors

$$p = \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2.$$

Der Verfasser macht nun die Hypothese, dass im Innern des Dielektricums ein Zug parallel den Kraftlinien wirkt, welcher gleich einem bestimmten Bruchteil αp von p ist, und ein gleicher Druck senkrecht zu den Kraftlinien, und berechnet daraus die lineare und kubische Dilatation des Dielektricums. Lbg.

A. Vaschy. Sur la nature des phénomènes électrocapillaires. C. R. CIV. 64-66.

P. Duhem. Sur la pression électrique et les phénomènes électro-capillaires. C. R. CV. 54-56.

Enthält die vorläufige Mitteilung einiger Resultate, zu denen der Verfasser auf Grund der früher von ihm aufgestellten Theorie der Capillar-Erscheinungen für den Fall, dass die Flüssigkeiten elektrisch geladen sind, gelangt ist. Lbg.

H. Lamb. On the theory of electric endosmose and other allied phenomena, and on the existence of a sliding coefficient for a fluid in contact with a solid. Brit. Ass. Rep. 495-510.

„Die Gesetze, welche die elektrische Fortführung einer leitenden Flüssigkeit durch die Wände eines porösen Gefässes oder längs capillarer Röhren beherrschen, und andere bezügliche Erscheinungen sind experimentell von den Herren Wiedemann und Quincke ermittelt und von dem letzteren Forscher unter der Annahme einer Contactdifferenz des Potentials zwischen der Flüssigkeit und ihren festen Grenzen erklärt worden. Diese Erklärung ist durch Hrn. von Helmholtz in seinem Aufsatze „Studien über elektrische Grenzschichten“ (Wiedemann Ann. VII. 327-387. 1879) mathematisch entwickelt worden. Durch Anwendung der bekannten Gesetze für die Bewegung zäher Flüssigkeiten findet er, dass die berechneten Ergebnisse, insoweit als sie von Grössen abhängen, die einer Messung zugänglich sind, in befriegender Weise mit den Versuchen übereinstimmen, und dass die Werte, welche man der Contactdifferenz beilegen muss, in allen Fällen mit der elektromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes vergleichbar sind. Gelegentlich kommt er auch zu dem Schlusse, dass in den betrachteten Fällen kein Gleiten der Flüssigkeit an der Oberfläche der Körper stattfindet, mit denen sie in Berührung ist. In der vorliegenden Abhandlung ist die gewählte Anschauung über diesen letzteren Punkt etwas anders. Es ist angenommen, dass ein Körper dem Gleiten einer Flüssigkeit über ihn fort einen sehr grossen, aber nicht einen unendlichen Widerstand darbietet, und dass dieses Gleiten ein wesentlicher Factor in den angezogenen Erscheinungen ist. Gemäss dieser abgeänderten Hypothese werden die verschiedenen von Hrn. von Helmholtz behandelten Fälle erörtert und nach einigen Richtungen erweitert. In allen Fällen unterscheiden sich die Ergebnisse von den durch Hrn. von Helmholtz erhaltenen um einen Factor l/d, wo l ein linearer Factor ist, welcher das Mass des Gleitens bildet, und d die Entfernung zwischen den Platten eines Luftcondensators, welcher dem von den gegenüberstehenden Oberflächen des Körpers und der

Flüssigkeit virtuell gebildeten äquivalent ist. Zieht man z. B. die experimentellen Ergebnisse Wiedemann's zum Vergleiche herbei, so führt Hr. von Helmholtz an, dass für eine gewisse Lösung von $CuSO_4$ in Berührung mit dem Stoffe eines porösen Thongefässes $E/D = 1{,}77$ ist, wo E die Contactdifferenz des Potentials und D die elektromotorische Kraft eines Daniells bedeutet. Nach den in der gegenwärtigen Schrift angenommenen Anschauungen würde die Folgerung $\frac{E}{D}\cdot\frac{l}{d} = 1{,}77$ ergeben. Da nun dieser Ausdruck unbekannte Verhältnisse einschliesst, so kann kein so bestimmter Schluss in Bezug auf den Wert von E gezogen werden. Doch ist es augenscheinlich, dass die Erscheinungen selbst mit sehr kleinen Werten von E/D verträglich sind, wenn nur l ein genügend grosses Vielfaches von d ist. Weil aber diese Grösse d von einer molecularen Grössenordnung ist (vielleicht mit 10^{-8}cm vergleichbar), so kann l noch immer so klein sein, dass die Gleitwirkungen in solchen Versuchen wie in denen von Poiseuille ganz unmerkbar sein dürften."

Das Obige ist im wesentlichen die Einleitung des Hrn. Lamb zu seiner Abhandlung und zeigt sehr klar den Zielpunkt seiner Arbeit. Gbs. (Lp.)

Leduc. Sur la période variable des courants dans le cas où le circuit contient un électro-aimant. C. R. CIV. 286-289.

Unmittelbar nach Schliessung eines Stromes $J = \frac{E}{R}$ ist die variable Stromstärke

$$(1) \qquad i = J\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

wo L den Selbstinductions-Coefficienten bezeichnet. Diese Formel gilt bekanntlich nicht mehr, wenn ein Elektromagnet sich in der Spirale befindet; ist in diesem Falle φ das Flächenintegral der magnetischen Induction durch die Stromfläche, so ist

$$E - Ri = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Der Verfasser integrirt diese Gleichung unter der Annahme, dass

$\varphi = SF$ gesetzt werden kann, wo $F = \frac{mi}{1+\mu i}$ nach Frölich die Stärke des äquivalenten gleichförmigen Magnetfeldes, S die äquivalente Stromfläche ist. Für kleine Stromstärken muss man hierin $\mu = 0$ setzen können, wodurch man auf eine Gleichung von der Form (1) zurückkommt; der Verfasser hat diesen Fall experimentell untersucht, aber die Formel nicht bestätigt gefunden, indem i den Wert $0{,}99 J$ viel später erreichte, als die Formel angiebt; er vermutet als Grund die Verzögerung der Magnetisirung durch die im Eisen inducirten Ströme. Lbg.

R. ARNOUX. Sur la période variable du courant dans un système électromagnétique. C. R. CIV. 425-428.

Der Verfasser erklärt die Nichtübereinstimmung der Beobachtungen von Leduc (vgl. die vorhergehende Abhandlung) mit der Rechnung namentlich dadurch, dass die Frölich'sche Formel für die angewandten kleinen Intensitäten sowie für die variable Periode nicht gültig sei. Lbg.

P. DUHEM. Sur l'aimantation par influence. C. R. CV. 749-751 u. 798-800.

P. DUHEM. Sur la théorie du magnétisme. C. R. CV. 932-934.

P. DUHEM. Sur l'aimantation par influence. C. R. CV. 1240-1241.

P. DUHEM. Théorie nouvelle de l'aimantation par influence, fondée sur la thermodynamique. Paris. Gauthier-Villars. 1888.

Die drei ersten Noten enthalten nur die Mitteilung der hauptsächlichsten Resultate, welche der Verfasser in der letzten ausführlichen Abhandlung entwickelt.

a) Das Potential eines teils aus permanenten Magneten, teils aus Magneten ohne Coërcitivkraft bestehenden Systems in jedem äussern oder innern Punkt $p \equiv (x, y, z)$ ist, wenn A, B, C die

Componenten des magnetischen Moments der Volumeneinheit bezeichnen, bekanntlich

$$(1) \qquad V = \int \Big(A' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + \cdots\Big) d\tau'$$
$$= -\int \Big(\frac{dA'}{dx'} + \frac{dB'}{dy'} + \frac{dC'}{dz'}\Big) \frac{d\tau'}{r} - \int (A' \cos n'x + \cdots) \frac{d\sigma'}{r},$$

wo n die nach innen gezogene Normale der Oberfläche bezeichnet. Die innere potentielle magnetische Energie des Systems ist

$$(2) \qquad W = \frac{1}{2} \int \Big(A \frac{dV}{dx} + \cdots\Big) d\tau.$$

Bezeichnen U und S die Energie und Entropie des Systems, P das Potential der äussern Kräfte, so nennt der Verfasser bekanntlich (F. d. M. XVII. 1885. 1037 ff.) den Ausdruck $U - TS + P$ das thermodynamische Potential des Systems, die Function

$$F = U - TS$$

das „innere thermodynamische Potential des Systems“. Bei rein mechanischen Bewegungen der Teile eines Systems ist, wie der Verfasser zunächst beweist, die von den innern Kräften geleistete Arbeit $A_i = -\delta F$; da nun andrerseits im vorliegenden Falle $A_i = -\delta W$ ist, so ist $F = W + F'$, wo F' nur vom Zustand der magnetischen Elemente, aber nicht von ihrer Lage abhängt. Für ein einzelnes magnetisches Element $d\tau$ in einem isotropen Körper kann nun F' abhängen von seinem Volumen und seiner Form, seinem magnetischen Moment und der Lage seiner magnetischen Axe zu seiner Grenzfläche, sowie von gewissen Parametern α, $\alpha_1, \ldots$, welche seinen Zustand unabhängig von seinem magnetischen Zustand bestimmen. Aendern wir nur das magnetische Moment $Md\tau$ und die Lage der magnetischen Axe, so können wir die entsprechende Aenderung $\delta F'$ so bestimmen, als ob das Element $d\tau$ allein vorhanden wäre, da $\delta F'$ nur vom Anfangs- und Endzustand abhängt und durch Entfernung aller andern Elemente ins Unendliche F' nicht geändert wird; es ist also $\delta F' = d\tau(\lambda\delta A + \mu\delta B + \nu\delta C) = d\tau(m\delta M + a\delta A + b\delta B)$, wo m, a, b von M, A, B und den α abhängen, dagegen von der Form des Elements unabhängig sind. Nehmen wir nun $d\tau$ als

eine Kugel und denken uns ohne Aenderung von M die Axe gedreht, einmal innerhalb der Kugel, dann durch Drehung der ganzen Kugel, so hat beidemal $\delta F'$ denselben Wert; da aber im zweiten Falle $\delta F' = 0$ ist, so muss $a = b = 0$ sein, folglich $\delta F' = m\delta M d\tau = f(M, \alpha, \alpha_1, \ldots)\, \delta M d\tau$. Setzen wir also

$$\varphi(M, \alpha, \alpha_1, \ldots) = \int_0^M f(M, \alpha, \alpha_1, \ldots)\, dM,$$

so wird für das ganze System

$$F' = \int \varphi(M, \alpha, \alpha_1, \ldots)\, d\tau + F'',$$

wo F'' von dem magnetischen Zustand unabhängig ist. Da aber für $M = 0$ auch $\varphi = 0$ und $W = 0$, also $F = F''$ ist, so ist

$$F'' = F_0 = U_0 - TS_0,$$

wo F_0 den Wert von F im unmagnetischen Zustand bezeichnet. Also wird schliesslich

$$(3) \qquad F = F_0 + W + \int \varphi(M)\, d\tau,$$

wo $\varphi\ (M)$ eine für $M = 0$ verschwindende Function des magnetischen Moments M der Volumeneinheit ist, welche ausserdem noch von den den sonstigen Zustand bestimmenden Parametern α abhängen kann.

b) Lässt man in einem Element $d\tau$ die Momente um δA, δB, δC wachsen, so muss beim magnetischen Gleichgewicht $\delta F = 0$ sein. Nun ist nach Gleichung (2)

$$\delta W = \frac{1}{2} d\tau \left(\delta A \frac{dV}{dx} + \cdots\right) + \frac{1}{2} \int \left(A' \frac{d\delta V'}{dx'} + \cdots\right) d\tau',$$

wo

$$V' = \int \left(A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \cdots\right) d\tau, \qquad \delta V' = d\tau \left(\delta A \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \cdots\right),$$

also

$$\delta W = \frac{1}{2}\, d\tau \left(\delta A \frac{dV}{dx} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\, d\tau \left[\delta A \frac{d}{dx} \int \left(A' \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + \cdots\right) d\tau' + \cdots\right] = \left(\frac{dV}{dx} \delta A + \cdots\right) d\tau.$$

Ferner

$$\delta \int \varphi(M)d\tau = \delta\varphi d\tau = \frac{d\varphi}{dM}\delta M d\tau = \frac{1}{M}\frac{d\varphi}{dM}(A\delta A + \cdots)d\tau.$$

Folglich geht die Gleichung $\delta F = 0$, da δA, δB, δC von einander unabhängig sind, über in

$$\frac{dV}{dx} + \frac{A}{M}\frac{d\varphi}{dM} = 0' \text{ etc.,}$$

woraus, wenn man $\psi(M) = \frac{M}{\frac{d\varphi}{dM}}$ setzt,

$$(4) \qquad A = -\psi(M)\frac{dV}{dx} \text{ etc.,}$$

oder, da hiernach

$M = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$ eine Function von $R = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \cdots}$ ist,

$$(4^a) \qquad A = -\chi(R)\frac{dV}{dx} \text{ etc.,}$$

wo $\chi(R)$ eine noch von dem sonstigen Zustand der magnetischen Elemente abhängende Function der resultirenden Kraft R ist. Dies sind die bekannten Kirchhoff'schen Gleichungen der Magnetisirung; je nachdem $\psi(M)$ (oder $\chi(R)$) positiv oder negativ ist. ist das Medium magnetisch oder diamagnetisch.

c) Zur Bestimmung der Function V, worauf nach Gleichung (4) oder (4^a) das Problem der Magnetisirung zurückgeführt ist, haben wir im äussern Raum die Gleichung $\Delta V = 0$, in den permanenten Magneten, deren Momente A_0, B_0, C_0 sein mögen, nach Gleichung (1)

$$(5) \qquad \frac{1}{4\pi}\Delta V = \frac{dA_0}{dx} + \cdots,$$

und in einem inducirten Magneten nach Gleichung (4^a)

$$(5^a) \qquad \left(\frac{1}{4\pi} + \chi(R)\right)\Delta V + \frac{d\chi}{dR}\left(\frac{dR}{dx}\frac{dV}{dx} + \cdots\right)$$
$$+ {}^s\Sigma \frac{d\chi}{d\alpha_s}\left(\frac{d\alpha_s}{dx}\frac{dV}{dx} + \cdots\right) = 0.$$

Ferner an der Grenzfläche eines inducirten und eines permanenten Magneten

$$(6)\qquad \left(\frac{1}{4\pi}+\chi(R)\right)\frac{dV}{dn}-\frac{1}{4\pi}\frac{dV_0}{dn}=-(A_0\cos nx+\cdots),$$

worin, wenn das erste Medium unmagnetisch ist, $\chi=0$ zu setzen ist; und an der Grenzfläche zweier inducirten Magnete

$$(6^a)\qquad \left(\frac{1}{4\pi}+\chi(R)\right)\frac{dV}{dn}-\left(\frac{1}{4\pi}+\chi_1(R)\right)\frac{dV_1}{dn}=0,$$

worin, wenn das zweite Medium unmagnetisch ist, $\chi_1=0$ zu setzen ist.

Der Verfasser weist noch nach, dass für einen magnetischen Körper diese Gleichungen immer eine und nur eine Lösung zulassen, und dass diese einem stabilen Magnetisirungs-Zustande entspricht. Dagegen bleibt für einen diamagnetischen Körper die Eindeutigkeit der Lösung unentschieden. Nach der Theorie von Poisson soll die Function $\psi(M)$ in Gleichung (4) von M unabhängig sein, $\psi(M)=C(\alpha,\alpha_1,\ldots)$; daraus würde $\frac{d\varphi}{dM}=\frac{M}{C}$ folgen, also, da nach a) $\varphi(M)$ mit M verschwindet, $\varphi(M)=\frac{M^2}{2C}$. Für schwach magnetische Körper ist nach der Erfahrung die Annahme von Poisson angenähert richtig; für solche Körper kann man also

$$\varphi(M)=\frac{M^2}{2\vartheta(M,\alpha,\alpha_1,\ldots)}$$

setzen, wo ϑ mit abnehmendem M sich einem Grenzwert $C(\alpha,\alpha_1,\ldots)$ nähert.

d) Verschiebt sich ein inducirter Magnet vom Volumen τ, dem Potential Q und den Momenten A, B, C in einem permanenten Magnetfelde vom Potential P, so ist die Aenderung von F durch die Aenderung der Momente in Folge der Gleichgewichts-Bedingungen Null, und die directe Aenderung von F durch die Bewegung ist gleich der durch die Aenderung von P eintretenden Aenderung von $\int\left(A\frac{dP}{dx}+\cdots\right)d\tau$, wo

$$A=-\psi(M)\frac{d(P+Q)}{dx}.$$

Also, wenn man $\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \cdots = R_0^2$ setzt,

$$(7) \qquad -\delta F = \delta \int \psi(M)\left[R_0^2 + \left(\frac{dQ}{dx}\frac{dP}{dx} + \cdots\right)\right] d\tau$$

$$= \int \psi(M)\delta(R_0^2)d\tau + \int \psi(M)\left[\frac{dQ}{dx}\delta\left(\frac{dP}{dx}\right) + \cdots\right] d\tau.$$

Der Magnet bewegt sich nun so, dass $-\delta F > 0$ ist; für den Fall, dass er sehr klein ist, vernachlässigt W. Thomson (Reprint, 2. ed. p. 514) $\frac{dQ}{dx}$ und erhält dadurch den Satz, dass sich der Körper, je nachdem er magnetisch oder diamagnetisch ist, nach Punkten grösserer oder kleinerer Kraft R_0 bewegt. Da nun R_0 kein Maximum, wohl aber ein Minimum haben kann, so würde folgen, dass ein magnetischer Körper in einem permanenten Magnetfelde keine stabile Gleichgewichtslage haben kann, wohl aber ein diamagnetischer Körper. Dagegen beweist der Verfasser, dass weder ein diamagnetischer noch ein magnetischer Körper in einem Magnetfeld eine stabile Gleichgewichtslage haben kann, da es immer Verschiebungen giebt, für welche $\delta^2 F < 0$ ist; der Widerspruch dieses Resultats mit dem obigen Satz von Thomson erklärt sich daraus, dass die Vernachlässigung von Q in Gleichung (7) nicht gestattet ist; denn nach Gleichung (6^a) ist an der Oberfläche des Körpers

$$\left(\frac{1}{4\pi} + \psi(M)\right)\frac{dQ}{dn} - \frac{1}{4\pi}\frac{dQ_1}{dn} = -\psi(M)\frac{dP}{dn},$$

also $\frac{dQ}{dx}$ etc. von der Ordnung $\psi(M)\frac{dP}{dx}$, mithin das zweite Glied in Gleichung (7) von derselben Ordnung wie das erste, es darf daher nicht gegen dieses vernachlässigt werden.

e) Der Verfasser beweist noch folgenden Satz: Ist ein schwach magnetischer oder diamagnetischer Körper in einem Magnetfelde an einem Faden aufgehängt, so dass er sich nur um diesen drehen kann, so besitzt er in beiden Fällen dieselben Gleichgewichtslagen; aber die stabilen Gleichgewichtslagen des einen sind labile des andern.

f) Ferner bestimmt der Verfasser die in einem magnetischen

System erzeugte Wärme. Wird ein permanenter Magnet aus einem permanent magnetischen Felde ins Unendliche verschoben, so wird dadurch eine Wärmemenge erzeugt gleich dem anfänglichen Potential des Feldes auf den Magneten. Hat dagegen der verschobene Magnet keine Coërcitivkraft, so wird Wärme verbraucht, wenn die Magnetisirungsfunction $\psi(M)$ mit wachsender Temperatur abnimmt oder ungeändert bleibt, während im entgegengesetzten Falle das Zeichen der Wärmeproduction unbestimmt bleibt; dies stimmt nur teilweise mit einem von W. Thomson aufgestellten Satze überein.

g) Schliesslich berechnet der Verfasser noch das thermodynamische Potential eines aus elektrischen und magnetischen Körpern bestehenden Systems, sowie die Gleichgewichts-Bedingungen eines solchen. Ferner berechnet er dasselbe für einen anisotropen Magneten; nimmt man die Krystallaxen eines magnetischen Elements zu Coordinatenaxen (ξ, η, ζ) und bezeichnet mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die magnetischen Momente nach diesen Axen, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A} = c_{11}\frac{dV}{d\xi} + c_{12}\frac{dV}{d\eta} + c_{13}\frac{dV}{d\zeta} \text{ etc.},$$

wo die Coefficienten c von den $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ abhängen. Lbg.

A. B. Basset. Note on the induction of electric currents, in an infinite plane conducting sheet, which is rotating in a field of magnetic force. Phil. Mag. (5) XXII. 140-144.

Eine Bestimmung der in einer dünnen ebenen leitenden Fläche von unendlicher Ausdehnung inducirten Ströme, wenn dieselbe in einem magnetischen Felde um eine zu ihr senkrechte Axe rotirt. Das Feld wird nach Annahme durch ein System von Magneten oder Strömen erzeugt, und für diesen Fall ergiebt die Methode der Bilder eine fertige Lösung, indem ein analytischer Ausdruck für das magnetische Potential der sich bewegenden Spur der Bilder gefunden wird, womit die Ströme äquivalent sind. Gbs. (Lp.)

É. Mathieu. Sur un principe de l'électrodynamique. C. R. CV. 659-661.

Die Note enthält (ohne Beweis) einen mathematisch interessanten und möglicherweise auch physikalisch nicht unwichtigen Satz aus der Theorie der stationären Strömung. Es sei ein von stationären Strömen durchflossener Leiter gegeben; die Elektricität möge durch einen Punkt A einströmen und durch einen Punkt A_1 ausströmen, welche Punkte im Innern des Leiters unendlich nahe seiner Oberfläche anzunehmen sind. Bezeichnen t und t_1 die Entfernung eines Punktes p von A und A_1, U das Potential der auf der Oberfläche des Leiters befindlichen Elektricität, so ist bekanntlich das Potential in einem inneren Punkt p

$$(1)\qquad V = C\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1}\right) + U,$$

und an der Innenseite der Oberfläche, deren nach innen gerichtete Normale n sei, ist

$$(2)\qquad \frac{dV}{dn} = 0.$$

Nach dem Green'schen Satze ist in einem inneren, resp. äusseren Punkt p, wenn σ' die Oberfläche des Leiters bezeichnet,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} U_i &= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dU_i'}{dn'}\frac{d\sigma'}{r} + \frac{1}{4\pi}\int U_i' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'} d\sigma', \\ U_a &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{dU_a'}{dn'}\frac{d\sigma'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int U_a' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'} d\sigma', \end{aligned}\right.$$

ferner in einem inneren, resp. äusseren Punkt

$$(3^a)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \int \frac{d\frac{1}{t'}}{dn'}\frac{d\sigma'}{r} - \int \frac{1}{t'}\frac{d\frac{1}{r}}{dn'} d\sigma', \\ \frac{1}{t_a} &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\frac{1}{t'}}{dn'}\frac{d\sigma'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{t'}\frac{d\frac{1}{r}}{dn'} d\sigma'. \end{aligned}\right.$$

Daraus folgt nach (1) und (2), wenn man setzt

$$(4)\qquad P = \frac{1}{4\pi}\int V_i' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma',$$

$$(5)\qquad U_i = P_i.$$

Bisher hat man immer U als das Potential einer einfachen Flächenbelegung angenommen; nimmt man es dagegen als das Potential einer Doppelbelegung auf σ an,

$$U = -\int m' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma',$$

so folgt aus (5), da P ebenfalls das Potential einer Doppelbelegung ist, auch im äusseren Raum $U_a = P_a$; ferner ist dann bekanntlich an der Oberfläche

$$U_a = U_i + 4\pi m, \qquad \frac{dU_a}{dn} = \frac{dU_i}{dn},$$

wodurch die zweite Gleichung (3) für einen beliebigen äusseren Punkt übergeht in

$$U_a = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dU_i'}{dn'}\frac{d\sigma'}{r} - \frac{1}{4\pi}\int U_i' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma' - \int m' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma',$$

d. h.

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dU_i'}{dn'}\frac{d\sigma'}{r} + \frac{1}{4\pi}\int U_i' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma'$$

oder nach (1) und (2) und der zweiten Gleichung (3^a)

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int V_i' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma' + C\left(\frac{1}{t_a} - \frac{1}{t_{1a}}\right),$$

d. h.

$$P_a = U_a = -C\left(\frac{1}{t_a} - \frac{1}{t_{1a}}\right),$$

also

$$(6)\qquad V_a = 0.$$

Wenn man also annimmt, dass die elektromotorische Kraft im Innern des Leiters von den Elektroden und von einer Doppelschicht auf der Oberfläche herrührt (bestehend aus einer

auf dem Leiter und einer in der Luft), so ist im ganzen äusseren Raum die elektromotorische Kraft gleich Null. Lbg.

P. Ledeboer et G. Maneuvrier. Sur le coefficient de self-induction de deux bobines réunies en quantité. C. R. CV. 218-222 u. 371-375.

Die Verfasser erörtern die Frage, unter welcher Bedingung zwei Spulen von den Widerständen R_1 und R_2 und den Selbstinductions-Coefficienten L_1 und L_2, welche neben einander in einen Stromkreis von der veränderlichen elektromotorischen Kraft E, der Intensität J und dem Widerstand r eingeschaltet sind, sich durch eine einzige Spule vom Widerstand R und dem Selbstinductions-Coefficienten L ersetzen lassen. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für J muss dann mit der Gleichung $L\frac{dJ}{dt}+(R+r)J = E$ identisch sein; als Bedingung hierfür ergiebt sich

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Ferner wird noch der Fall behandelt, wo die beiden Spulen neben einander in den einen Zweig einer Wheatstone'schen Brücke eingeschaltet sind; es zeigt sich, dass dann die Ersetzung während einer Periode $(0, T)$ möglich ist, wenn der variable Hauptstrom der Gleichung $\left[\frac{dJ}{dt}\right]_0^T = 0$ genügt. Die Beobachtung bestätigte diese Resultate im wesentlichen. Lbg.

C. Niven. On some methods of determining and comparing coefficients of self-induction and mutual induction. Phil. Mag. (5) XXIV. 225-238.

Von gewissen Aufgaben, welche bei der Vergleichung elektrischer Constanten vorkommen, können drei als noch etwas unvollkommen gelöst erachtet werden: nämlich die Vergleichung zweier Coefficienten der Selbstinduction, die Vergleichung eines

Coefficienten der Selbstinduction einer Spirale mit demjenigen gegenseitiger Induction zwischen zwei anderen Spiralen und die Bestimmung eines Coefficienten der Selbstinduction durch die Capacität eines Condensators. Die Ausdehnung Maxwell'scher Methoden zeigt, wie man die Einrichtungen für einen nicht permanenten und einen nicht vorübergehenden Strom im ersten und dritten Falle unabhängig von einander zu treffen hat und dadurch die Mittel zur Vergleichung der Selbstinduction irgend einer Spirale mit der gegenseitigen Induction irgend zweier anderen Spiralen erhält. Gbs. (Lp.)

Lord Rayleigh. On the self-induction and resistance of straight conductors. Phil. Mag. (5) XXI. 381-394.

Dieser Artikel kann teils als ein Auszug, teils als eine Entwickelung des Capitels in Maxwell's „Electricity and Magnetism" (II. Chap. XIII) angesehen werden, das von parallelen Strömen handelt. Maxwell's Formeln werden in einigen Fällen verbessert, Beschränkungen angemerkt und Erweiterungen angegeben.

Gbs. (Lp.)

Lord Rayleigh. Notes on electricity and magnetism.

I. On the energy of magnetised iron. Phil. Mag. (5) XXII. 175-183.

II. The self-induction and resistance of compound conductors. Phil. Mag. (5) XXII. 469-500.

III. On the behaviour of iron and steel under the operation of feeble magnetic forces. Phil. Mag. (5) XXIII. 225-245.

O. Heaviside. On the self-induction of wires. Phil. Mag. (5) XXIII. 118-138, 273-288, 332-352, 419-422; XXIV. 10-29, 63-85, 173-213.

O. Heaviside. On resistance and conductance operators, and their derivatives, inductance and permittance especially in connexion with electric and magnetic energy. Phil. Mag. (5) XXIV. 479-502.

H. LAMB. On the principal electric time-constant of a circular disk. Lond. R. S. Proc. XLII. 289-296.

G. ROBIN. Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe. C. R. CIV. 1884-1836.

Ist p ein fester, p' ein variabler Punkt der Fläche σ, n die nach innen gerichtete Normale in p, ferner $r = pp'$, $\varphi = \angle(pp', n)$, so ist die Dichtigkeit der Gleichgewichts-Belegung in p nach einer frühern Abhandlung des Verfassers (F. d. M. XVIII. 1886. 1026)

$$(1) \qquad e = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma'.$$

Ist nun f eine beliebige, in jedem Punkt p von σ endliche Function, und bildet man die Reihe der Functionen

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma', \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f_1'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma', \cdots,$$
$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f_{n-1}'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma',$$

so ist $\lim f_n = ce$, wo c eine Constante bezeichnet, welche man $= 1$ nehmen kann, indem man den Wert von e in einem bestimmten Punkt der Fläche festsetzt. Um den Satz zu beweisen, schreiben wir

$$2\pi f_1 = \int \frac{f'}{e'}\,\frac{e'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma',$$

bezeichnen mit A und B das Maximum und Minimum von $\frac{f}{e}$, und setzen $M = \frac{A+B}{2}$; es sei α derjenige Teil von σ, wo $\frac{f}{e} > M$, β derjenige, wo $\frac{f}{e} < M$. Da e überall dasselbe Zeichen hat, z. B. $+$, und überall $\cos\varphi > 0$ ist, so ist

$$2\pi f_1 \leqq A\int_\alpha \frac{e'\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma' + M\int_\beta \leqq A\int_\sigma - \frac{A-B}{2}\int_\beta$$
$$2\pi f_1 \geqq B\int_\beta + M\int_\alpha \qquad\qquad \geqq B\int_\sigma + \frac{A-B}{2}\int_\alpha$$

oder nach (1)

$$\frac{f_1}{e} \leqq A - \frac{A-B}{2}\vartheta_\beta, \quad \frac{f_1}{e} \geqq B + \frac{A-B}{2}\vartheta_\alpha,$$

wo ϑ_α und ϑ_β zwei positive Zahlen sind und $\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta = 1$ ist. Ist also A_1 und B_1 das Maximum und Minimum von $\frac{f_1}{e}$, so ist

$$A_1 - B_1 \leqq (A-B)\left(1 - \frac{\vartheta_\alpha + \vartheta_\beta}{2}\right) \leqq \tfrac{1}{2}(A-B),$$

also allgemein

$$A_n - B_n \leqq \frac{1}{2^n}(A-B), \qquad \lim(A_n - B_n) = 0,$$

folglich $\lim \frac{f_n}{e} = \text{Const.}$

Lbg.

P. Duhem. Sur une relation entre l'effet Peltier et la différence de niveau potentiel entre deux métaux. C. R. CIV. 1606-1609.

Nach einer frühern Abhandlung des Verfassers (F. d. M. XVII. 1885. 1040) ist die Potentialdifferenz χ zweier sich berührenden Metalle a und b im elektrischen Gleichgewicht

$$(1) \qquad \chi = V_a - V_b = \vartheta_b - \vartheta_a.$$

Ferner ist wegen $\frac{dU}{dT} - T\frac{dS}{dT} = 0$ nach Gleichung (3) des erwähnten Referats

$$-S = \frac{d}{dT}(U - TS) = \frac{d\Phi}{dT} = \frac{d\Phi_0}{dT} + \frac{d}{dT}(\vartheta_a q_a + \vartheta_b q_b)$$

$$= -S_0 + \frac{d}{dT}(\vartheta_a q_a + \vartheta_b q_b)$$

$$TS = TS_0 + (h_a q_a + h_b q_b),$$

woraus

$$(2) \qquad h = -T\frac{d\vartheta}{dT}.$$

Nun ist die beim Uebergang der Elektricitätseinheit von a zu b erzeugte Peltier'sche Wärme $\Pi = h_a - h_b$; die Gleichung (1) geht also über in

$$(3) \qquad \Pi = T\frac{d\chi}{dT}.$$

Die elektromotorische Kraft eines Thermostroms, welcher an der warmen Lötstelle von der Temperatur T_2 von a nach b geht, ist nach W. Thomson

$$E = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T} dT,$$

also nach Gleichung (3)

$$(4) \qquad E = \chi(T_1) - \chi(T_2).$$

Lbg.

P. Duhem. Sur le phénomène de Peltier dans une pile hydroélectrique. C. R. CIV. 1697-1699.

Bezeichnen C und G die der durchgehenden Elektricitätseinheit entsprechende chemische und galvanische Wärme, so ist bekanntlich nach v. Helmholtz

$$C - G = -T\frac{dE}{dT}.$$

Diese Gleichung ist von verschiedenen Beobachtern mit der Erfahrung übereinstimmend gefunden worden; das abweichende Resultat von Gockel (Wied. Ann. XXIV) erklärt der Verfasser daraus, dass Gockel nach Analogie der bekannten Thomson'schen Gleichung für Thermoströme die Grösse $T\frac{dE}{dT}$ als die im Kreise erzeugte Peltier'sche Wärme ansieht. (Diese Erklärung scheint auf einem Missverständnis zu beruhen; Gockel nennt allerdings jene Grösse die Peltier'sche Wärme, bestimmt sie dagegen experimentell direct durch die Temperatur-Coefficienten der einzelnen elektromotorischen Kräfte des Kreises. Der Referent.) Um die Beziehung zwischen $T\frac{dE}{dT}$ und der an der Berührungsstelle der Metalle a und b der Kette beim Uebergang der Elektricitätseinheit von b nach a erzeugten Peltier'schen Wärme $-\Pi$ zu finden, hat man nach einer frühern Abhandlung des Verfassers (F. d. M. XVII. 1885. 1041) als Gleichgewichts-Bedingung für die offene Kette, wenn E die elektromotorische Kraft der geschlossenen Kette ist, $E = V_b - V_a + \vartheta_b - \vartheta_a$, also

$$(a) \qquad T\frac{dE}{dT} = T\frac{d}{dT}(V_b - V_a) + T\frac{d}{dT}(\vartheta_b - \vartheta_a),$$

welche Gleichung nach Gleichung (2) des vorigen Referats und wegen $h_a - h_b = \Pi$ übergeht in

$$T\frac{dE}{dT} = T\frac{d}{dT}(V_b - V_a) + \Pi.$$

Also nur, wenn in der offenen Kette bei jeder Temperatur die Potentialdifferenz der zwei Metalle = 0 ist, wie es Volta annahm, und wie es die Beobachtung für einige Ketten bestätigt hat, ist $T\frac{dE}{dT} = \Pi$, mithin $C - G = -\Pi =$ der an der Berührungsstelle der zwei Metalle abgegebenen Peltier'schen Wärme.

Lbg.

E. Kowalski. Note sur la théorie élémentaire des machines dynamo-électriques. Bordeaux Mém. (3) II. 309-314.

Münch. Die elektrodynamische und dynamoelektrische Maschine mit Ringanker behandelt für den Physikunterricht an höheren Lehranstalten. Pr. Realsch. Wimpfen. (No. 598). 8 S. 4°.

Lp.

A. Vaschy. Action d'un champ électrique sur un courant variable. C. R. CIV. 1609-1611.

Enthält einige Berechnungen über die aus der elektromotorischen Kraft eines veränderlichen Magneten oder Stroms nach dem Princip der Reaction sich ergebende ponderomotorische Kraft eines elektrostatischen Feldes auf einen Strom, welche bekannt und in der Discussion über die von Hertz neu eingeführten Magnetkräfte (F. d. M. XVIII. 1886. 1060) eingehend erörtert worden sind. Der Schluss, dass, weil ein elektrostatisches Feld eine solche Kraft ausübt, auch ein zweiter veränderlicher Strom auf den ersten eine derartige Kraft ausüben müsse, welcher Schluss dort als nicht hinreichend begründet bezeichnet wurde, findet sich auch hier ohne weitere Begründung.

Lbg.

H. Lorberg. Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. Boltzmann zu meiner Kritik zweier Aufsätze von Hertz und Aulinger. Wied. Ann. XXXI. 131-137.

Schon in F. d. M. XVIII. 1886. 1060 besprochen.

E. Hoppe. Zur Theorie der unipolaren Induction. Wied. Ann. XXVIII. 478-491; XXIX. 544-560; XXXII. 297-310.

E. Edlund. Bemerkung zu dem Aufsatz des Hrn. Hoppe. Wied. Ann. XXIX. 420-427.

E. Edlund. Erwiderung auf die letzten Bemerkungen des Hrn. Hoppe über unipolare Induction. Wied. Ann. XXX. 655-660.

E. Budde. Ueber die Grundgleichung der stationären Induction durch rotirende Magnete, und über eine neue Klasse von Inductions-Erscheinungen. Wied. Ann. XXX. 358-389.

H. Lorberg. Zur Theorie der magnetelektrischen Induction. Wied. Ann. XXXVI. 672-692. (1889.)

a) Edlund hat (Phil. Mag. 1887. p. 401) für die elektromotorische Kraft eines um eine Axe gedrehten Magnetpols auf ein ruhendes Stromelement ein neues Gesetz aufgestellt, wonach dieselbe gleich derjenigen sein soll, welche nach dem Weber'schen Inductions-Gesetz der ruhende Punkt auf den bewegten Leiterpunkt ausüben würde, wenn man an beiden nicht, wie es das Weber'sche Grundgesetz verlangt, die Drehungsgeschwindigkeit des Pols, sondern seine Translationsgeschwindigkeit in entgegengesetztem Sinne anbrächte. Um diese Theorie zu prüfen, hat Hoppe den bekannten Plücker'schen Versuch wiederholt, bei welchem ein Magnet um seine Axe rotirt und die Enden des ruhenden Leitungsdrahtes auf einem an dem Magneten befestigten Rotationskörper oder Mantel (z. B. zwei Scheiben) schleifen, und hat dabei dieselben, mit der aus dem Weber'schen Grundgesetz abgeleiteten Theorie übereinstimmenden Resultate gefunden wie frühere Beobachter; er hat hierin einen Beweis gegen die Theorie

von Edlund sehen zu dürfen geglaubt, indem er aus einer von ihm angestellten Rechnung schliesst, dass letztere einen Strom von entgegengesetzter Richtung liefern würde, als ihn die Versuche ergaben. Die Richtigkeit dieser Rechnung bestreitet Edlund mit Recht; dass indessen seine Theorie mit den Beobachtungsresultaten übereinstimmt, behauptet er ohne genügenden Nachweis; auch die ausführlichere Auseinandersetzung seiner Theorie (Phil. Mag. 1887) ist durchaus ungründlich. Wegen dieses auf beiden Seiten hervortretenden Mangels einer beweiskräftigen Berechnung bietet die ganze Polemik nur ein geringes Interesse, ein um so geringeres, als Lorberg in der oben angeführten Abhandlung zeigt, dass in allen Modificationen des Plücker'schen Versuchs die elektromotorische Kraft nach sämtlichen bisher aufgestellten Theorien (Weber, Edlund, Clausius, Maxwell, Riemann) denselben Wert hat, wenn man, wie es geschehen muss, zu der direct im Draht inducirten elektromotorischen Kraft die an seinen beiden Enden auftretende Potentialdifferenz addirt, welche durch die nach allen Gesetzen ausser dem Weber'schen in dem Magneten erzeugte elektrostatische Ladung hervorgebracht wird. Für die Gesetze von Weber, Clausius und Riemann ist dasselbe schon von Budde in der oben angeführten Abhandlung nachgewiesen worden.

b) Die obige Abhandlung von Budde behandelt ferner die Induction durch einen rotirenden Magneten, welcher nicht längs seiner Rotationsaxe, sondern senkrecht zu derselben magnetisirt ist, und welche er „radiale Induction" nennt.

c) Eine anderer Teil des Aufsatzes von Lorberg behandelt eine Streitfrage gegen Clausius; vgl. darüber das folgende Referat.

d) Der Rest des Aufsatzes von Lorberg beschäftigt sich mit Widerlegung der Behauptung von Edlund, von welcher dieser bei Aufstellung seines neuen Inductionsgesetzes ausgeht, dass das Weber'sche Gesetz der Induction durch einen bewegten Inducenten dem Princip der Energie widerspreche. Lorberg zeigt, dass sowohl das Weber'sche als auch das Maxwell-Clausius'sche Inductionsgesetz diesem Princip genügt, indem danach die in einem bewegten Stromelement ds durch einen ruhenden Magneten, resp.

in einem ruhenden Stromelement durch einen bewegten Magneten inducirte elektromotorische Kraftcomponente nach *ds* gleich der negativen Arbeit ist, welche die ponderomotorische Kraft des Magneten an dem vom Strom 1 durchflossenen bewegten Stromelement, resp. die Kraft des Stromelements an dem bewegten Magneten in der Zeiteinheit leistet. Schliesslich zeigt Lorberg, dass auch in Bezug auf die Umkehrung des Plücker'schen Versuchs, wo durch die ponderomotorischen Kräfte zwischen dem ruhenden Teil eines Stroms und dem aus dem beweglichen Teil und dem Magneten bestehenden System letzteres gedreht wird, die Weber'sche und die Clausius-Maxwell'sche Theorie zu demselben Resultat führen. Lbg.

H. Lorberg. Ueber die Berechnung der in der Masse des Ringes einer Dynamomaschine inducirten Ströme. Wiedemann Ann. XXX. 389-400.

R. Clausius. Erwiderung auf eine Bemerkung des Hrn. Lorberg in Bezug auf dynamoelektrische Maschinen. Wiedemann Ann. XXXI. 302-306.

H. Lorberg. Notiz zu dem Aufsatz des Hrn. Clausius: „Erwiderung etc.“ Wiedemann Ann. XXXII. 521-526.

In seiner Theorie der Dynamomaschine (Wiedemann An. XX. 379) stellt Clausius folgenden Satz auf: „Wenn die Windungen mit dem Ringe gemeinschaftlich rotiren, so befinden sie sich in relativer Ruhe zu ihm, und es kann daher nur durch die Stromumkehrungen an den Unterbrechungsstellen eine Induction im Ringe stattfinden. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass diese elektromotorische Kraft dieselbe sein muss, wie in dem Falle, wo die Windungen ruhen und in ihnen keine Stromumkehrungen stattfinden.“ Diesen Satz bestreitet Lorberg in der ersten der obigen Abhandlungen und weist durch Berechnung beider elektromotorischen Kräfte nach, dass sie wesentlich verschieden sind, indem die auf der Ringaxe senkrechte Componente im einen Falle parallel der Indifferenzlinie, im andern radial gerichtet ist; er legt dabei das Weber'sche Inductionsgesetz zu Grunde, welches

aber für beide Fälle mit dem von Clausius selbst aufgestellten identisch ist. Da Clausius den obigen Satz ohne Beweis ausspricht, so stellt Lorberg auf Grund gewisser Aeusserungen von Clausius eine Schlussweise auf, durch welche dieser möglicherweise zu seinem Satze geführt sein könnte. Diese Vermutung erklärt Clausius in seiner Erwiderung als irrig und begründet seinen Satz durch eine andere Schlussweise. In dem zweiten obigen Aufsatz zeigt nun Lorberg, dass auch diese Schlussweise nicht zu dem Clausius'schen Satze führt, weder nach dem Weber'schen noch nach dem Clausius'schen Inductionsgesetz. (Der Verfasser nimmt statt des Clausius'schen das Maxwell'sche Gesetz, welches aber mit dem Clausius'schen identisch ist; vgl. darüber den im vorhergehenden Referat besprochenen Aufsatz von Lorberg: „Zur Theorie der magnetelektrischen Induction.“) Nur bei einer gewissen Bestimmung der in dem Maxwell'schen Inductionsgesetz vorkommenden unbestimmten Function würde der Clausius'sche Satz richtig sein; indessen zeigt Lorberg in dem Aufsatz: „Zur Theorie der magnetelektrischen Induction“, dass diese Annahme unzulässig ist. In dem letzterwähnten Aufsatz wird die Streitfrage definitiv erledigt, indem der Verfasser durch Analyse der Schlussweise von Clausius zeigt, dass, obwohl der Clausius'sche Satz in der obigen Fassung unrichtig ist, dennoch die Gesamtinduction durch die zugleich mit dem Ringe rotirenden Windungen nach dem Clausius'schen Inductionsgesetz in der That dieselbe ist, wie die Induction durch die ruhenden und nicht stromwechselnden Windungen, weil nach dem Clausius'schen Inductionsgesetz die gemeinsame Drehung der Windungen und des Ringes eine Induction im Ringe hervorruft, während die obige entgegenstehende Behauptung von Clausius nur für das Weber'sche Inductionsgesetz gilt.

In dem ersten Aufsatz berechnet Lorberg noch die elektromotorische Kraft der im Ringe durch die Ringwindungen und die festen Elektromagnete inducirten Ströme auf die Windungen, sowie die ponderomotorischen Kräfte zwischen diesen inducirten Ringströmen und den festen Elektromagneten. Lbg.

E. Budde. Mittel zur praktischen Entscheidung zwischen den elektrodynamischen Punktgesetzen von Weber, Riemann und Clausius. Wiedemann Ann. XXX. 100-156.

Die Abhandlung, welche keinen Auszug gestattet, entwickelt die Theorie einer Reihe von Versuchen, welche möglicherweise zur Entscheidung zwischen den erwähnten Grundgesetzen führen könnten. Dieselben sind im wesentlichen folgende.

a) Drehung eines in einem metallenen Hohlkörper aufgehängten Magneten durch plötzliche Ladung oder Entladung des Hohlkörpers, wobei nach Clausius keine Wirkung entsteht.

b) Induction eines Stroms durch Drehung eines elektrostatisch geladenen Körpers, wobei nur nach Weber eine Wirkung eintritt.

c) Elektrostatische Wirkung eines rotirenden veränderlichen Stroms, welche ebenfalls nur nach Weber stattfindet.

d) Rotation eines (etwa noch mit einem leitenden Mantel verbundenen) einen Rotationskörper bildenden Magneten um seine Axe. Hierbei entsteht nach dem Clausius'schen und Riemann'schen Gesetz, wie Referent für ersteres schon im Jahre 1878 nachgewiesen hat (Lorberg, „Ueber Magnetinduction, und über einige Folgerungen aus dem Clausius'schen Grundgesetz“, Wiedemann Ann.Erg. VIII), und wie es Budde auch für das Riemann'sche Gesetz nachweist, im Innern und auf der Oberfläche des Magneten eine statische Ladung, welche Budde „kinetische Ladung“ nennt, sodass in jedem Punkt des Magneten die von der elektrodynamischen Induction und die von der kinetischen Ladung erzeugten elektromotorischen Kräfte sich einander aufheben; in Folge davon ist die gesamte elektromotorische Kraft in einem angelegten ruhenden Draht nach den verschiedenen Grundgesetzen dieselbe. (Vgl. die oben besprochenen Aufsätze von Budde und Lorberg). Dagegen findet der Verfasser nach dem Riemann'schen Gesetz eine kinetische Ladung, deren Gesamtsumme nicht Null ist; dieselbe würde daher, wenn der Magnet abgeleitet ist, nur aus dem Boden entnommen werden können, und würde daher nach Isolirung des Magneten und Aufhören der Rotation zu Tage treten, was der Verfasser zu einer Entscheidung zwischen dem Riemann'-

schen Gesetz und den beiden andern benutzen zu können glaubt. [Dass nach dem Clausius'schen Gesetz die Gesamtmenge der kinetischen Ladung Null ist, hat der Verfasser nicht bewiesen; wäre es nicht der Fall, so würde in einem isolirten rotirenden Magneten ein stationärer Zustand unmöglich sein. Eine Verschiedenheit aber in dieser Hinsicht zwischen beiden Gesetzen scheint mir nicht stattzufinden; das Zusatzglied, welches nach dem Verfasser beim Riemann'schen Gesetz eine kinetische Ladung mit einer von Null verschiedenen Summe geben soll, muss, soviel ich sehe, wegfallen, wie sich auch durch Vergleichung der Gleichung 88) auf pag. 147 mit dem Satz auf pag. 379 ergiebt. Der Referent.] Lbg.

L. Boltzmann. Zur Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen. Wien. Ber. XCVI. 1258-1297.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass es bedenklich sei, den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie auf den um kehrbaren Teil des Vorgangs im Thermostrom für sich allein anzuwenden, und berücksichtigt daher neben diesem gleichzeitig auch die Wärmeleitung. Der Thermostrom gehe an der kälteren Lötstelle von der Temperatur $T_1 > T_2$ vom Metall b zum Metall a; es bezeichne $\Pi = P_a - P_b$ die beim Uebergang der Elektricitätseinheit von a nach b erzeugte Peltier'sche Wärme, σdT die in einem Element ds beim Uebergang der Elektricitätseinheit von T zu $T+dT$ absorbirte Thomson'sche Wärme. Unter der Voraussetzung, dass der elektrische Vorgang und der Vorgang der Wärmeleitung unabhängig von einander stattfinden, ist dann nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie die elektromotorische Kraft E des Thermostroms gleich der beim Durchgang der Elektricitätseinheit im ganzen Kreise absorbirten Peltier'schen und Thomson'schen Wärme; man erhält also den bekannten Thomson'schen Ausdruck

$$\text{(a)} \qquad E = \Pi(T_1) - \Pi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b)\, dT.$$

Nun nimmt der Verfasser an, dass an einer Contactstelle vo

nach a eine elektromotorische Kraft wirkt, welche dem Spannungsgesetz genügt, also gleich $F_a - F_b$ gesetzt werden kann; und dass in einem Element ds im Sinne des Wärmestroms eine elektromotorische Kraft $f(T)dT$ stattfindet; die ganze elektromotorische Kraft ist dann

$$E = (F_a - F_b)_{T_1} - (F_a - F_b)_{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} (f_b - f_a)\,dT,$$

oder wenn man $f + \frac{dF}{dT} = \psi(T)$ setzt,

$$(1) \qquad E = \int_{T_1}^{T_2} (\psi_b - \psi_a)\,dT.$$

Aus (a) und (1) folgt durch Differentiation nach T_2

$$\psi_b - \psi_a = -\frac{d\Pi}{dT} + \sigma_a - \sigma_b = -\frac{dP_a}{dT} + \frac{dP_b}{dT} + \sigma_a - \sigma_b,$$

also für jedes Metall $\psi = \frac{dP}{dT} - \sigma + \frac{dM}{dT}$, wo M von der Natur des Metalls unabhängig ist; oder wenn man $P + M = h$ setzt,

$$(2) \qquad \Pi = h_a - h_b, \quad \sigma = \frac{dh}{dT} - \psi.$$

Um nun den zweiten Hauptsatz anzuwenden, möge ds in jedem Metall im Sinne der wachsenden Temperaturen gerechnet werden, und es sei q der Querschnitt, k die Wärmeleitungsfähigkeit, $\varkappa$ die galvanische Leitungsfähigkeit; dann wird durch Leitung nach dem Contact T_1 hingeführt die Wärmemenge

$$\left(q_a k_a \frac{dT}{ds_a} + q_b k_b \frac{dT}{ds_b}\right)_{T_1},$$

also bei T_1, resp. T_2 im ganzen in der Zeiteinheit die Wärmemenge entwickelt und an das Reservoir abgegeben

$$(b) \qquad W_1 = \varphi(T_1), \quad W_2 = -\varphi(T_2),$$

wo

$$\varphi(T) = q_a k_a \frac{dT}{ds_a} + q_b k_b \frac{dT}{ds_b} - i\Pi.$$

In dem Element ds_a vermehrt sich durch Leitung die Wärmemenge um $ds_a \frac{d}{ds_a}\left(q_a k_a \frac{dT}{ds_a}\right)$; die darin entwickelte Joule'sche Wärme

ist $\frac{ds_a}{q_a \varkappa_a} i^2$, also ist die ganze in ds_a, resp. ds_b in der Zeiteinheit entwickelte Wärme

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} dW_a = ds_a \left[\frac{d}{ds_a} \left(q_a k_a \frac{dT}{ds_a} \right) - i\sigma_a \frac{dT}{ds_a} + \frac{i^2}{q_a \varkappa_a} \right], \\ dW_b = ds_b \left[\frac{d}{ds_b} \left(q_b k_b \frac{dT}{ds_b} \right) + i\sigma_b \frac{dT}{ds_b} + \frac{i^2}{q_b \varkappa_b} \right]. \end{cases}$$

Im stationären Zustand muss nun, wenn dQ das Element der in der Zeiteinheit entwickelten Wärme bezeichnet, der Aequivalenzwert der Verwandlung $\overline{\gtrless} 0$ sein, also

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{W_1}{T_1} + \frac{W_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{dW_a}{ds_a} \frac{ds_a}{T} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{dW_b}{ds_b} \frac{ds_b}{T} \overline{\gtrless} 0,$$

oder wenn man s als Function von T betrachtet und $\frac{ds}{dT} = s'$ setzt, nach (b) und (c)

$$\text{(3)} \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} \Big\{ \frac{q_a k_a}{s'_a} + \frac{q_b k_b}{s'_b} + i [T(\psi_a - \psi_b) - \Pi] + i^2 \left(\frac{s'_a}{q_a \varkappa_a} + \frac{s'_b}{q_b \varkappa_b} \right) T \Big\} \overline{\gtrless} 0.$$

Soll dies für alle Werte von i stattfinden (sowohl positive, in Richtung des Thermostroms, als auch negative, in Folge eines eingeschalteten Elektromotors), so muss der eingeklammerte Ausdruck für keinen Wert von i negativ werden können, es muss also sein

$$\text{(3}^a\text{)} \quad [T(\psi_a - \psi_b) - \Pi]^2 \leqq 4 \left(\frac{q_a k_a}{s'_a} + \frac{q_b k_b}{s'_b} \right) \left(\frac{s'_a}{q_a \varkappa_a} + \frac{s'_b}{q_b \varkappa_b} \right) T.$$

Da das Minimum des rechts stehenden Ausdrucks für alle Werte des Querschnitts und des Temperaturgefälles

$$= 4T \left(\sqrt{\frac{k_a}{\varkappa_a}} + \sqrt{\frac{k_b}{\varkappa_b}} \right)^2$$

ist, so ist die Bedingung (3ᵃ) erfüllt, wenn der Zahlenwert von $T(\psi_a - \psi_b) - \Pi$ oder von $T \frac{dE}{dT} - \Pi \leqq 2\sqrt{T} \left(\sqrt{\frac{k_a}{\varkappa_a}} + \sqrt{\frac{k_b}{\varkappa_b}} \right)$ ist, während nach der zweiten Thomson'schen Gleichung

$$T \frac{dE}{dT} - \Pi = 0$$

sein soll; die bisherigen Versuche geben über die Richtigkeit der letzteren Gleichung keine sichere Entscheidung. Lbg.

E. Budde. Zur Theorie des Zusammenhangs von Wärme und Elektricität. I. Thermoelektricität der Metalle. Wiedemann Ann. XXX. 664-699.

Bekanntlich hat H. A. Lorentz (Arch. Néerl. XX. 1886) für die Energie eines mit einer Elektricitätsmenge e geladenen Metalls den Ausdruck aufgestellt

$$(1) \qquad U = U_0 + W + eU',$$

wo U_0 die gewöhnliche, W die elektrostatische Energie bezeichnet; danach wird, wenn ein Elektricitätsteilchen de von einem Punkt von der Temperatur T zu einem Punkt von der Temperatur $T+dT$ übergeht, eine Wärmemenge $\sigma dTde = \frac{dU'}{dT} dTde$ absorbirt; es ist mithin die Thomson'sche „specifische Wärme der Elektricitätseinheit"

$$(2) \qquad \sigma = \frac{dU'}{dT}.$$

Während aber Thomson einen derartigen Wärmeverbrauch nur in den homogenen Teilen eines Metalls annimmt, muss ein solcher nach der Lorentz'schen Hypothese auch an einer Contactstelle stattfinden; geht nämlich die Elektricitätseinheit von einem Metall b zu einem Metall a über, so muss eine Wärmemenge

$$(3) \qquad q = U'_a - U'_b$$

absorbirt werden. Bezeichnet also $\psi = \varphi_a - \varphi_b$ die Potentialdifferenz, so muss die beim Uebergang der Elektricitätseinheit von b zu a absorbirte Peltier'sche Wärme sein

$$(4) \qquad \Pi = \psi + q.$$

Lorentz leitet die letztere Gleichung dadurch ab, dass er die beiden Metalle durch zwei aus ihnen bestehende Drähte, deren Contactpunkt mit einem Wärmereservoir in Verbindung steht, verbunden und durch Aenderung ihrer Capacität eine Elektricitätsmenge de von b nach a hinübergetrieben denkt. Hiergegen erhebt Budde den — später auch von Lorentz als begründet an-

erkannten — Einwand, dass hierbei die Elektricität sich nur auf der Oberfläche bewegt, der dabei ins Spiel kommende Wert von U' daher wahrscheinlich nicht dem Metall, sondern der Oberflächenschicht angehört; danach sind die Werte U'_i und U'_ω für das Innere und für die Oberfläche zu unterscheiden, und demgemäss auch q_i und q_ω, sodass an Stelle der Gleichung (4) tritt

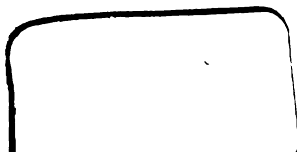
$$(4^a) \qquad \Pi = \psi + q_i.$$

Dieselbe Gleichung erhält man aus dem Lorentz'schen Process; die bei demselben absorbirte Wärme ist nämlich einerseits $= \psi + q_\omega$, andererseits $= \Pi +$ der Wärmemenge $q_\omega - q_i$, welche absorbirt wird, wenn die Elektricität von der Oberfläche von b ins Innere und aus dem Innern von a an die Oberfläche geht. Der Verfasser setzt $\varphi + U'_i = \varphi + c = \chi$ und schreibt demnach die Gleichung (4^a) in der Form $\Pi = \chi_a - \chi_b$. Die elektromotorische Kraft eines Thermostroms, der an der wärmeren Lötstelle T_2 von a nach b geht, setzt der Verfasser mit W. Thomson

$$(5) \qquad E = \Pi(T_1) - \Pi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b) dT$$
$$= (\chi_a - \chi_b)_{T_1} - (\chi_a - \chi_b)_{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b) dT,$$

und durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie leitet er daraus in bekannter Weise seine frühere Theorie ab, in welcher nur jetzt $\Pi = \psi + q_i$ statt $\Pi = \psi$ gesetzt wird. Der durch die Gleichung (2) ausgedrückte Zusammenhang zwischen σ und U' kommt beim Verfasser nicht vor, sondern er betrachtet beide zunächst als unabhängig von einander und erhält aus dem zweiten Hauptsatz zwischen ihnen die Beziehung $\sigma = \frac{d\chi}{dT} - \frac{\chi}{T}$.

Den Lorentz'schen Kreisprocess verwirft er, weil in demselben nicht U'_i, sondern nur U'_ω vorkommt. [Mittels der Gleichungen (2) und (4^a) geht die Gleichung (5), unabhängig von der Anwendung des zweiten Hauptsatzes, über in $E = \psi(T_1) - \psi(T_2)$, d. h. die elektromotorische Kraft ist gleich der Summe der Gleichgewichtspotential-Differenzen an den Contactstellen; die Budde'sche Zurückführung der elektromotorischen Kraft auf



Potential-Differenzen, welche teils an den Contactstellen, teils innerhalb der Metalle wirken, erscheint daher unnötig und wenig wahrscheinlich. Vgl. Lorberg „Einige Bemerkungen zur Theorie der Thermoströme“. Wiedemann Ann. XXXIV. 1888. D. Ref.]

Lbg.

O. TUMLIRZ u. A. KRUG. Ueber die Aenderung des Widerstandes galvanisch glühender Drähte mit der Stromstärke. Wien. Ber. XCV. 1014-1047.

Bezeichnet W den Widerstand eines durch einen Strom J erwärmten Drahtes bei der Temperatur t, so ist, wenn die Temperatur stationär geworden ist, $WJ^2 = f(t)$, wo $f(t)$ die Wärmeabgabe an die Umgebung bedeutet. Hiernach ist J eine Function von t, und da dasselbe auch von W gilt, so ist W eine Function von J. Um diese Function zu bestimmen, sei in einem geraden cylindrischen Draht von der Länge $2l$, dem Radius r und dem Wärmeleitungsvermögen k, dessen Mitte zum Anfangspunkt der x-Axe genommen wird, u die stationäre Temperatur in einem Punkt x; in einem Element dx ist dann der Wärmezuwachs durch Leitung $= \pi r^2 k \frac{d^2u}{dx^2} dx$, der galvanische Wärmezuwachs

$$= AJ^2 w_0 (1+\alpha u) \frac{dx}{\pi r^2},$$

wo w_0 den specifischen Widerstand bei 0^0 bezeichnet und $\alpha = \frac{1}{273}$ gesetzt werden kann. Der Wärmeverlust durch Leitung nach aussen ist $= Bu.2\pi r dx$, der durch Strahlung nach dem Stefan'schen Strahlungsgesetz für kleine Temperaturerhöhungen

$$= C\left[\left(\frac{1}{\alpha}+u\right)^4 - \frac{1}{\alpha^4}\right] 2\pi r dx = \frac{4Cu}{\alpha^3}.2\pi r dx.$$

Setzt man also $m = B + \frac{4C}{\alpha^3}$, wo m eine Constante des umgebenden Mediums ist, so wird die Gleichung des stationären Zustandes

$$\pi r^2 k \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{AJ^2 w_0}{\pi r^2}(1+\alpha u) - 2\pi r m u = 0$$

oder

$$\frac{d^2u}{dx^2} - au + b = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, wenn an den Enden $x = \mp l$ und $u = 0$ ist,

$$(1) \qquad u = \frac{b}{a}\left(1 - \frac{e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}}}{e^{l\sqrt{a}} + e^{-l\sqrt{a}}}\right).$$

Der Widerstand des ganzen Drahtes ist, wenn $W_0 = w_0 \frac{2l}{\pi r^2}$ den Widerstand bei 0° bezeichnet,

$$W = \frac{w_0}{\pi r^2} \int_{-l}^{l} (1 + \alpha u)dx = W_0(1 + \alpha u_m),$$

wo u_m die mittlere Temperatur des Drahtes bezeichnet; mithin nach (1)

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{1 - \frac{Aw_0\alpha}{2\pi^2 r^3 m}J^2} - \frac{b\alpha}{l\sqrt{a^3}} \frac{1 - e^{-2l\sqrt{a}}}{1 + e^{-2l\sqrt{a}}}.$$

Die Abhandlung enthält ferner eine Reihe experimenteller Bestimmungen von $\frac{W}{W_0}$ als Function von J, auch für Glühtemperaturen, für welche die Voraussetzungen der vorstehenden Gleichung nicht mehr gelten. Lbg.

A. Wassmuth u. G. A. Schilling. Ueber eine Methode zur Bestimmung der Galvanometer-Constante. Wien. Ber. XCVI. 19-35.

K. Schering. Neuer Corrections-Apparat für das Bifilarmagnetometer zur Bestimmung der Veränderung des Stabmagnetismus ohne Benutzung der Declination. Gött. Nachr. 643-662.

R. Krüger. Ueber den galvanischen Widerstand dünner Metallplatten. Gött. Nachr. 301-314.

Wird ein Strom i durch zwei diametral gegenüberliegende Ecken einer dünnen rechteckigen Metallplatte ein- und ausgeleitet,

so ist der Widerstand eines durch zwei Niveaucurven V_1, V_2, welche durch zwei Punkte 1 und 2 des Rechtecks gehen, und durch den Rand begrenzten Stückes der Platte

$$w = \frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{H}{\lambda},$$

wo λ die Leitungsfähigkeit und H eine nach der Theorie der stationären Strömung zu berechnende, rein geometrische Grösse ist, welche der Verfasser nach ϑ-Functionen entwickelt; hat man also $w = \frac{V_1 - V_2}{i}$ beobachtet, so lässt sich λ berechnen. Die Beobachtung von w geschah mittels der Wheatstone'schen Brücke, indem der Brückendraht zwischen dem Punkt 1 und einem Punkt des geradlinigen Messdrahts ausgespannt wurde; sind w_1 und w_2 die Widerstände der beiden Teile des Messdrahts, $w_3 + r_1$ und $w_4 + \varrho_1$ die Widerstände der beiden andern Zweige, wo r_1 und ϱ_1 die Widerstände der zwei durch die Niveaucurve V_1 getrennten Teile der Platte bezeichnen, und ist

$$w_1 + w_2 = w_3 + w_4 + r_1 + \varrho_1$$

gemacht, so ist $w_3 + r_1 = w_1$, ebenso, wenn der Endpunkt des Brückendrahts sich im Punkt 2 befindet, $w_3 + r_2 = w_1'$, woraus $w = r_2 - r_1 = w_1' - w_1$. Die sich aus den Versuchen ergebenden Werte von λ wichen von den gewöhnlichen sehr bedeutend ab, was der Verfasser durch Mangel an Homogeneität erklärt.

Lbg.

G. Kiesel. Ueber atmosphärische Elektricität. Progr. des Luisenstädtischen Realgymnasiums Berlin. (Nr. 93). 25 S. 4°.

Der Verfasser stellt eine neue Theorie der Luftelektricität auf. Nach derselben ladet sich die Atmosphäre positiv durch Reibung an dem kosmischen Staube; diese Ladung findet vorwiegend auf der im Sinne der Erdbewegung vorangehenden Fläche, und zwar am stärksten am Aequator statt, während an der Hinterseite eine Ableitung eintritt, wodurch eine mittlere Ladung erhalten bleibt. Die Ladung muss mit wachsender Höhe zunehmen und wird durch die unteren, feuchten Schichten dem

Erdboden zugeleitet, weshalb die täglichen und jährlichen Maxima mit denen der Luftfeuchtigkeit zusammenfallen. Lbg.

LINSS. Ueber einige die Wolken- und Luftelektricität betreffende Probleme. Met. Zeitschr. IV. 345-362.

Indem der Verfasser von der Mascart'schen Formel für die elektrische Dichtigkeit ausgeht, gelangt er durch Integration zu einem angenäherten Ausdrucke für das Potentialgefälle in einem Punkte der Erdoberfläche, welcher sich unter der Einwirkung einer rechtwinklig-prismatischen Schicht mit horizontaler Grundfläche befindet. Die weitere Discussion führt ihn zu dem Schlusse, dass aus der Erfahrung, welcher zufolge im Gebiete eines Regenfalles negative, im Gebiete eines Schneefalles positive Luftelektricität herrschen soll, noch nicht gefolgert werden dürfe, die Regentropfen müssen negativ, die Schneeflocken positiv elektrisch sein. Zur Entscheidung hierüber bedürfe es vielmehr weiterer Untersuchungen, die sich in einem ganz bestimmten, hier näher bezeichneten Sinne zu bewegen hätten. Des weiteren werden neue Argumente zu gunsten der Annahme beigebracht, dass feuchte und Wolken-Luft gut isolirt sei; es wird ein Verfahren zur Messung des Betrages der Elektricität vorgeschlagen, und es wird endlich die bekannte Wiederaufnahme der Peltier'schen Hypothese kritisch besprochen. Die Einwände gegen die Thomson'sche Benutzung eines Auffanggefässes sind gewiss vollberechtigt, denn die Schätzung des Elektricitätsverlustes wird bei diesem Verfahren niemals zuverlässig sein können.

Gr.

HÄBERLEIN. Ueber die Beziehungen der elektrischen Grössen und den Nutzeffect der Secundärelemente. Wiedemann Ann. XXXI. 393-421.

GOLDHAMMER. Ueber die Theorie des Hall'schen Phänomens. Wiedemann Ann. XXXI. 370-384.

Es wird angenommen, dass ein Metall in einem homogenen

Magnetfelde anisotrop wird. Sind u, v, w die Stromdichtigkeiten,

$$X = -\frac{dP}{dx}, \quad Y = -\frac{dP}{dy}, \quad Z = -\frac{dP}{dz}$$

die elektromotorischen Kräfte, so lassen sich bekanntlich nach Maxwell die Coordinatenaxen so wählen, dass, wenn λ_1, λ_2, λ_3 die Componenten eines gewissen Vectors λ bezeichnen, die Gleichungen stattfinden

$$(1) \quad \begin{cases} X = \varkappa_1 u - \lambda_3 v - \lambda_2 w, \quad Y = \varkappa_2 v + \lambda_3 u - \lambda_1 w, \\ Z = \varkappa_3 w + \lambda_2 u + \lambda_1 v. \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Es sei nun die Magnetkraft parallel der z-Axe; in einer rechteckigen Metallplatte von der Länge l, der Breite b und der kleinen Dicke δ seien die Seiten b die Elektroden des Hauptstroms, und eine der drei Kanten sei jedesmal parallel der z-Axe, sodass für die obigen Coordinatenaxen die drei Kanten angenommen werden können.

a) Der Hauptstrom sei senkrecht zu den Kraftlinien, z. B. parallel der mit der Kante l zusammenfallenden x-Axe, und zwar sei $\delta \neq z$. (Die Annahme $b \neq z$ ändert offenbar nichts Wesentliches). Es ist dann $v = w = 0$, also nach (1)

$$X = \varkappa_1 u, \quad Y = \lambda_3 u, \quad Z = \lambda_2 u$$

oder, wenn Q die Potentialdifferenz an den Elektroden bezeichnet,

$$X = \varkappa_1 u = \frac{Q}{l}, \quad Y = \frac{\lambda_3}{\varkappa_1} X, \quad Z = \frac{\lambda_2}{\varkappa_1} X.$$

Werden nun die Kraftlinien und der Hauptstrom umgekehrt, so liegt der neue Vector λ' zur negativen z-Axe ebenso, wie λ zur positiven z-Axe, es ist also $\lambda'_3 = -\lambda_3$, $\lambda'_2 = \lambda_2$, ferner das Potentialgefälle $X' = -X$, also

$$Y' = \frac{\lambda'_3}{\varkappa_1} X' = Y, \quad Z' = \frac{\lambda'_2}{\varkappa_1} X' = -Z.$$

Nun hat Lorentz (Arch. Néerl. XIX) folgendes Princip aufgestellt: „Werden bei elektrischen Vorgängen alle Geschwindigkeiten plötzlich umgekehrt, so gehen dieselben Bewegungen wie vorher,

nur in umgekehrter Richtung, vor sich, und die elektrostatischen Ruhezustände bleiben ungeändert". Nach diesem Princip müssen bei der obigen Umkehrung die elektromotorischen Kräfte, von denen die elektrostatischen Ladungen abhängen, ungeändert bleiben, also $Y' = Y$, $Z' = Z$ sein; aus letzterer Gleichung folgt aber nach dem Obigen $Z = 0$, also $\lambda_2 = 0$. Da nun die Richtung des Vectors λ nur von der Richtung der Kraftlinien, aber nicht von der Stromrichtung abhängt, so ergiebt sich ebenso, wenn man den Hauptstrom und l parallel der y-Axe annimmt, $\lambda_1 = 0$; also fällt λ in die Kraftrichtung. Die Hall'sche elektromotorische Kraft ist demnach

$$E = bY = b\lambda_2 u = \frac{\lambda_2}{\delta} i,$$

wenn i die Intensität des Hauptstroms bezeichnet.

b) Der Hauptstrom sei parallel den Kraftlinien, und z. B. b parallel der x-Axe. Dann ist $u = v = 0$, also nach (1)

$$X = -\lambda_2 w, \quad Y = -\lambda_1 w, \quad Z = \varkappa_3 w = \frac{Q}{l}.$$

Da nun der Vector λ nur durch die Lage der Kraftlinien zu den Kanten der Platte bestimmt ist und im vorigen Falle in die Kraftrichtung fiel, so muss, vorausgesetzt dass die Platte an und für sich isotrop ist, dasselbe in jedem Falle stattfinden, wo die Kraftrichtung einer Kante parallel ist; es muss also auch jetzt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sein, also keine Hall'sche Kraft auftreten, was der Erfahrung entspricht. [Der Verfasser benutzt zum Nachweis dieses Satzes ein zweites von Lorentz aufgestelltes Princip, welches indessen hier überflüssig scheint. D. Ref.] Lbg.

A. Oberbeck. Ueber die elektromotorische Kraft dünner Schichten und ihre Beziehung zur Molecularphysik. Wiedemann Ann. XXXI. 337-359.

Wird ein galvanisches Element aus einer reinen und einer mit einem dünnen elektrolytischen Zinküberzug bedeckten Platinplatte in Zinksulfat gebildet, so ist die elektromotorische Kraft — dieselbe wurde durch Compensation bestimmt — anfangs

dieselbe wie zwischen Platin und Zink und bleibt nahezu constant, nimmt dagegen von einem bestimmten Moment an sehr rasch ab; da die bis zu diesem Augenblick verflossene Zeit ϑ von der ursprünglich auf der Platinplatte vorhandenen Zinkmenge a abhängt, so muss es die Zeit sein, nach welcher die Dicke des Ueberzugs unter einen gewissen Grenzwert gesunken ist. Der Zusammenhang zwischen a und ϑ lässt sich durch die Gleichung $a = A + B\vartheta$ darstellen, aus welcher sich mittels zweier zusammengehöriger Werte von a und ϑ die beim Beginn des raschen Abfalls noch vorhandene Menge A berechnen lässt. Die hieraus berechnete Dicke der Grenzschicht ergab sich im Mittel $= 2{,}5 \,.\, 10^{-6}$mm; ähnliche Zahlen ergaben Cadmium und Kupfer. Der Grund des raschen Abfalls der elektromotorischen Kraft kann entweder darin liegen, dass von da an einzelne Stellen des Platins von dem Ueberzug entblösst werden und sich dadurch Ströme bilden, welche denselben rascher auflösen; oder darin, dass von da an die Dicke der Schicht so klein ist, dass die Wirkung der Molecularkräfte des Platins auf die Flüssigkeit durch die Schicht hindurch erfolgt; letztere Annahme wird dadurch unterstützt, dass die oben angegebene Grenzdicke von der Ordnung der Wirkungssphäre der Gasmolecüle, also wahrscheinlich auch der Metallmolecüle ist. Lbg.

H. Lamb. On ellipsoidal current sheets. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII (A) 131-159.

Der Verf. bemerkt, dass Maxwell im § 675 seines Werkes „Electricity and Magnetism“ eine gewisse Anordnung von Strömen über die Oberfläche eines Ellipsoids angedeutet hat, welche im Innern ein gleichförmiges (uniform) magnetisches Feld erzeugt. Es ist ihm nicht bekannt, ob man schon darauf geachtet hat, dass diese Anordnung die Bedingungen für eine natürliche Art des Verlaufs (decay) freier Ströme in einer dünnen ellipsoidischen Schicht erfüllt, deren Leitungsfähigkeit (per Flächeneinheit) umgekehrt proportional dem Abstande des Mittelpunktes von der der Tangentialebene ist. Dies wird im ersten Teile des Aufsatzes

bewiesen, und es ist somit leicht, die in einer solchen Schale inducirten Ströme zu finden, wenn sie in einem gleichförmigen magnetischen Felde von variirender Intensität enthalten ist, oder auch andererseits die durch Rotation der Schale in einem gleichförmigen und constanten Felde inducirten Ströme.

Der Verf. hat es versucht, diese Ergebnisse zu verallgemeinern und die übrigen Normaltypen von Strömen in einer Schale von der erwähnten Art herauszubringen. Im zweiten Teile wird die vollständige Lösung dieser Aufgabe gegeben, unter Einschluss der Bestimmung der entsprechenden Uebergänge für den Fall, wenn zwei Axen des Ellipsoids gleich sind. Die Lösung des Problems der inducirten Ströme kann dann in einer sehr einfachen Weise erhalten werden.

Von den besonderen Formen, welche die leitende Schale annehmen kann, ist die interessanteste diejenige, bei welcher die dritte Axe (die der Symmetrie) unendlich klein ist, so dass wir in Wahrheit eine Kreisscheibe haben, deren Widerstand mit $\sqrt{a^2-r^2}$ proportional ist. In Anbetracht des physikalischen Interesses, das sich an die Frage knüpft, wäre es wünschenswert, eine Lösung für den Fall einer gleichmässig dicken Kreisscheibe zu haben, die in einem beliebigen Felde rotirt; aber in Ermangelung derselben ist die Lösung für den fraglichen Fall nicht uninteressant. Es kommt zur Erscheinung, dass mit Ausnahme des Falles von Strömen, die symmetrisch zur Axe sind, wenn das Ellipsoid ein Umdrehungskörper ist, immer eine Oberflächen-Verteilung der Elektricität bei den in der Arbeit betrachteten Problemen vorhanden ist. Cly. (Lp.)

H. Hertz. Ueber sehr schnelle elektrische Schwingungen.
Wiedemann Ann. XXXI. 421-448.

Verbindet man einen Punkt des eine Funkenstrecke enthaltenden Entladungskreises eines Inductoriums (Hauptkreis) mit einem einfachen, z. B. rechteckigen, ebenfalls eine Funkenstrecke enthaltenden Drahtkreis (Nebenkreis), so ist jeder Funke im Hauptkreis von einem Funken im Nebenkreis begleitet; dies zeigt,

dass die Schwingungsdauer im Nebenkreis so klein ist, dass in der Zwischenzeit zwischen der Ankunft der Bewegung an der einen und andern Kugel der Funkenstrecke des Nebenkreises schon eine merkliche Potentialdifferenz eintritt; die Funken verschwinden, wenn die Wege vom Zuleitungspunkt des Nebenkreises nach beiden Kugeln gleich sind. Auch wenn man den — geschlossenen oder offenen — Nebenkreis dem Hauptkreis bloss nähert, entstehen Funken.

Lbg.

F. Kohlrausch. Bestimmung der Selbstinduction eines Leiters mittelst inducirter Ströme. Wiedemann Ann. XXXI. 594-600; Münch. Ber. 3-10.

a) Mittels des Differential-Galvanometers. Der Stromstoss eines Inductors vom Widerstand W und der elektromotorischen Kraft E zur Zeit t geht durch zwei neben einander geschaltete Zweige, von denen der eine aus dem einen Zweig des Galvanometers vom Widerstand γ und aus der Spule vom Widerstand w und dem zu bestimmenden Selbstinductions-Coefficienten Π, der andere aus dem zweiten Zweig des Galvanometers vom Widerstand $\gamma_1 = \gamma + w$ besteht. Ist $i_0 = \frac{E}{2W+w+\gamma}$ die Stromstärke im ersten Zweige zur Zeit t, so ist die Ablenkung des Galvanometers

$$x' = \frac{\Pi}{w+\gamma} C \int i_0 dt = \frac{\Pi}{w+\gamma} \frac{C}{2W+w+\gamma} \int Edt,$$

wo $C\int Edt$ sich in bekannter Weise dadurch bestimmt, dass, wenn man den Inductionsstoss durch den inductionslosen Widerstand $R+W+\gamma$ des ersten Galvanometerzweiges schickt, die der Nadel erteilte Geschwindigkeit

$$u = \frac{C}{R+W+\gamma} \int Edt$$

ist.

b) Mittels der Wheatstone'schen Brücke. Der Inductor befindet sich in der einen Diagonale vom Widerstand W; zwischen

den Widerständen der vier Seiten findet die Beziehung $\frac{w_0}{w_1} = \frac{w_2}{w_3}$ statt, wo w_0 der Widerstand der Spule vom Selbstinductions-Coefficienten Π ist. Der Strom im Zweige w_0 ist

$$i_0 = E \frac{w_3}{Ww_3 + w_3(W + w_0 + w_2)}$$

und der Strom in der Brücke vom Widerstand γ

$$i' = \Pi \frac{di_0}{dt} Q' = \frac{\Pi}{Q} \frac{dE}{dt},$$

wo Q' und Q von den Widerständen abhängen. Daraus ergiebt sich die Ablenkung in der Brücke während eines Inductionsstosses

$$x' = \frac{\Pi}{Q} C \int E dt,$$

wo $C \int E dt$ sich wie vorher bestimmt. Lbg.

F. Kohlrausch. Ueber die Berechnung der Fernwirkung eines Magneten. Wiedemann Ann. XXXI. 609-617; Münch. Ber. 23-32.

F. Kohlrausch. Ueber die Herstellung sehr grosser, genau bekannter elektrischer Widerstandsverhältnisse und über eine Anordnung von Rheostatenwiderständen. Wiedemann Ann. XXXI. 600-609; Münch. Ber. 11-21.

H. Götz u. A. Kurtz. Elektrometrische Untersuchungen. Münch. Ber. 195-220.

A. Koepsel. Bestimmung magnetischer Momente und absoluter Stromstärken mittelst der Wage. Wiedemann Ann. XXXI. 250-272.

Der Verfasser hat zunächst die von H. v. Helmholtz angegebene Methode zur Bestimmung eines magnetischen Moments (vgl. F. d. M. XV. 1883. 992) in der Weise modificirt, das

horizontalen Magneten nicht an der Wage aufhängt, sondern ausserhalb des Wagkastens horizontal hinlegt, sodass seine Verlängerung die Mitte des verticalen, an der Wage aufgehängten Magneten schneidet; ist dann G das zuzulegende Gewicht, welches nach Umkehrung des horizontalen Magneten die Wage wieder zum Einstehen bringt, so ist (a. a. O.)

$$G = \frac{6HV}{a^4}\left(1 + \frac{20x^2 - 15y^2}{6a^2}\right),$$

woraus sich, wenn man den Versuch bei einer anderen Entfernung a_1 der Mitten beider Magnete wiederholt, ergiebt

$$HV = \frac{Ga^6 - G_1 a_1^6}{6(a^2 - a_1^2)}.$$

Um ferner die Methode zur Bestimmung einer Stromstärke J anzuwenden, werden an Stelle des horizontalen Magneten zwei vom Strom durchflossene verticale Drahtrechtecke gesetzt, welche parallel den Längsseiten der Wage auf beiden Seiten derselben so aufgestellt sind, dass ihre Mittelpunkte mit der Mitte des vertical an der Wage aufgehängten Magneten in einer Horizontalebene liegen; die verticale Kraft des Stroms auf den Magneten, welche gleich dem Zusatzgewicht G ist, lässt sich dann leicht berechnen, woraus sich J ergiebt. Für schwächere Ströme wird jedes der einfachen Drahtrechtecke durch ein aus 100 Windungen bestehendes ersetzt, welches zwischen dem ersten und der Wage steht; um die Kraft desselben durch die vorige auszudrücken, wird eine einzelne Windung desselben neben das erste Rechteck in entgegengesetztem Sinne in den Stromkreis eingeschaltet und durch Hinzufügung eines Widerstandes der Strom im zweiten Rechteck so verändert, dass die Wirkungen beider Rechtecke sich aufheben; sind dann J und J_1 die beiden Stromstärken, w und w_1 die Widerstände, so sind die Kräfte $KJ = K_1 J_1$, also $\frac{K_1}{K} = \frac{J}{J_1} = \frac{w_1}{w}$. Der Verfasser wendet die Methode zur Bestimmung des elektrochemischen Aequivalents des Silbers an. Lbg.

A. Foeppl. Die Elektricität als elastisches Fluidum.
Wiedemann Ann. XXXI. 306-318.

Der Verfasser entwickelt einige weitere Folgerungen aus der von ihm aufgestellten Theorie der Elektricität als eines elastischen Fluidums (F. d. M. XVIII. 1886. 1054). Bezeichnet ε_0 die Raumdichte der Elektricität im neutralen Zustande, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varDelta\varepsilon$ die Dichte im elektrischen Zustand in der Tiefe δ unter der Oberfläche, $\varDelta\varepsilon_a$ den Wert von $\varDelta\varepsilon$ an der Oberfläche, $p = c\varDelta\varepsilon$ den Druck, so ist (a. a. O.)

$$\text{(a)} \qquad \delta = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}} \log \frac{\varDelta\varepsilon_a}{\varDelta\varepsilon} = \delta' \log \frac{\varDelta\varepsilon_a}{\varDelta\varepsilon}.$$

Daraus ergiebt sich die ganze freie Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit

$$\text{(b)} \qquad m = \varDelta\varepsilon_a \int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{\delta'}} d\delta = \delta' \varDelta\varepsilon_a,$$

also so gross, als wenn sie mit einer gleichförmigen Raumdichte $\varDelta\varepsilon_a$ in einer Schicht von der Dicke $\delta' = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}}$ verbreitet wäre. Ist φ_i der Wert des Potentials φ im Innern ausserhalb der Grenzschicht, so ist (a. a. O.)

$$\text{(c)} \quad \varphi_i - \varphi = c \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \text{ also } \frac{\varDelta\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = e^{\frac{\varphi_i - \varphi_a}{c}} - 1 = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{c},$$

mithin

$$\text{(d)} \qquad m = \frac{\delta' \varepsilon_0}{c}(\varphi_i - \varphi_a) = \frac{\varphi_i - \varphi_a}{4\pi\delta'}.$$

In einem von einem stationären Strom durchflossenen Draht s ist auf dem ganzen Querschnitt freie Elektricität vorhanden; aus Gleichung (c) folgt

$$\varepsilon \frac{d\varphi}{ds} + \frac{dp}{ds} = \frac{d\varphi_i}{ds},$$

d. h. die elektromotorische Kraft $\varepsilon \frac{d\varphi}{ds} + \frac{dp}{ds}$ ist auf dem ga[illegible]zen Querschnitt constant.

Lbg.

ULJANIN. Ueber ein auf die Contactth[illegible] bezügliches Experiment Exner's. Wiedemann Au[illegible]04.

F. Exner. Zur Contacttheorie. Wiedemann Ann. XXXII. 53-64 u. 515-520.

W. Hallwachs. Zur Theorie einiger Versuche des Hrn. Exner. Wiedemann Ann. XXXII. 64-74.

a) Nach der Contacttheorie hat ein mit der Erde in Verbindung stehendes Metall eine bestimmte Potentialdifferenz gegen die Erde und folglich eine elektrische Ladung. Wird es also abgeleitet und mit dem abgeleiteten Quadranten eines Elektrometers in Verbindung gesetzt, so bleibt die Nadel in Ruhe; wird es dann isolirt und seine Capacität durch irgend eine Deformation geändert, so ändert sich sein Potential und muss sich durch eine Ablenkung an dem jetzt gleichfalls isolirten Quadranten bemerklich machen. Diesen Versuch hat Exner (Wien. Ber. LXXXVI. 1882) in der Weise ausgeführt, dass er den Metallkörper K mit einer abgeleiteten metallischen Hülle umgab und diese nach Isolirung des Metallkörpers entfernte; da er hierbei keine Ablenkung erhielt, so schloss er daraus auf die Unrichtigkeit der Contacttheorie. Uljanin hat diesen Versuch wiederholt und eine Ablenkung von 40-60 Skalenteilen gefunden; der Körper K war ein Zinkcylinder, welcher anfangs abgeleitet, mit dem ebenfalls abgeleiteten ersten Quadranten verbunden und mit einer abgeleiteten Zinkhülle umgeben war; nach Isolirung des Zinkcylinders und des Quadranten wurde die Hülle aufgezogen und der Ausschlag beobachtet. Es seien sämtliche Potentiale von dem der Erde aus gerechnet, Q_1 und Q'_1 das anfängliche und nachherige Potential des ersten Quadranten, Q_2 das des zweiten Quadranten, N das der Nadel, G das des Elektrometer-Gehäuses, K und K' das anfängliche und nachherige des Körpers K, Z das der Zimmerwände; ferner c_1 die Capacität des ersten Quadranten, c_2 die des aus dem Zinkcylinder bei entfernter Hülle und den Zimmerwänden bestehenden Systems, p, r, s die Verteilungscoefficienten der Nadel, des zweiten Quadranten und des Elektrometer-Gehäuses gegen den ersten Quadranten,

$$k = pN + rQ_2 + sG.$$

Die anfängliche Ladung des ersten Quadranten ist $E_1 = c_1 Q_1 + k$,

die des Zinkcylinders $E_2 = 0$ (unter der Voraussetzung, dass der Zinkcylinder und die Zinkhülle, wenn sie beide zur Erde abgeleitet sind, sich auf demselben Potential befinden); nach dem Aufziehen der Hülle wird $E'_1 = c_1 Q'_1 + k$, $E'_2 = c_2(K' - Z)$ (wenn man die Aenderung von c_1 und k durch die Verschiebung der Nadel vernachlässigt). Ferner ist $E'_1 + E'_2 = E_1$, $K' - Q'_1 = K - Q_1$. Hieraus folgt die der Ablenkung proportionale Grösse

$$(1) \qquad Q'_1 - Q_1 = -\frac{c_2}{c_1 + c_2}(K - Z),$$

woraus sich das „natürliche Potential“ K des Zinkcylinders berechnen lassen würde, wenn $Z = 0$ wäre, d. h. wenn sich die Zimmerwände auf dem Potential der Erde befänden.

b) Das Resultat des Versuchs von Uljanin glaubt Exner dadurch erklären zu können, dass der Zinkcylinder und die Zinkhülle in Folge von Oxydation entgegengesetzt geladen gewesen seien. Er wiederholt den Versuch in anderer Form, indem er als Versuchskörper K zwei durch einen Draht verbundene, auf einander liegende Platten von demselben Metall nimmt und die Capacität durch Aufziehen der obern Platte bis auf 15 cm Entfernung vergrössert (ungefähr verdoppelt), wobei sich der Körper beständig in einer abgeleiteten Metallhülle befindet. Die Theorie dieses Versuchs, wie sie Exner und vollständiger Hallwachs giebt, ist folgende. Es sei H das Potential der Hülle, c_2 und c'_2 die anfängliche und nachherige Capacität des Körpers K in der Hülle; im übrigen mögen die vorigen Bezeichnungen beibehalten werden. Hallwachs berücksichtigt auch die Aenderung von c_1 und k durch die Verschiebung der Nadel, von welcher aber Exner in seiner zweiten Abhandlung angiebt, dass sie w[illegible] als 1 % betragen habe; vernachlässigen wir diese Aenderung [illegible]
$E_1 = c_1 Q_1 + k$, $E_2 = c_2(K - H)$, $E'_1 = c_1 Q'_1 + k$, $E'_2 = c'_2($[illegible]
ferner

$$E'_1 + E'_2 = E_1 + E_2, \quad K' - Q'_1 = K - Q_1.$$

Daraus folgt

$$(2) \qquad Q'_1 - Q_1 = \frac{c_2 - c'_2}{c_1 + c'}(K - H).$$

Die von Exner aufgestellte Formel [illegible] von [illegible]

vorstehenden dadurch, dass er K statt $K-H$ setzt; auf diesen Mangel macht Hallwachs aufmerksam und spricht die Vermutung aus, dass das Ausbleiben der Ablenkung bei einem Teil der Exner'schen Versuche sich dadurch erklären möge, dass der Versuchskörper und die Hülle von demselben Metall, also ihre natürliche Potentialdifferenz $K-H = K\,|\,H = 0$ gewesen sei. Dagegen erklärt Exner in seiner zweiten Abhandlung, dass er K nur als Abkürzung für $K-H$ gebraucht habe, und dass ausserdem H bei seinen Versuchen unwesentlich sei; setzt man nämlich nach (2) die Ablenkung $\vartheta = \varkappa(K-H)$, wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet, so folgt für zwei verschiedene Metalle

$$\vartheta-\vartheta' = \varkappa(K-K') = \varkappa\,.\,K\,|\,K';$$

da sich nun aus seinen mit verschiedenen Metallen angestellten Versuchen $\vartheta-\vartheta' = 0$, also $K\,|\,K' = 0$ ergebe, ebenso wie aus seinen früheren Versuchen nach Gleichung (1), so folge daraus die Unhaltbarkeit der Contacttheorie. Lbg.

F. Schumann. Elektromagnetische Rotationserscheinungen flüssiger Leiter. Wiedemann Ann. XXXII. 141-164.

Bei Entwickelung der Theorie seiner Beobachtungen über die Rotation eines stromführenden flüssigen Leiters im Magnetfelde (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 1007) hat Riecke für die Winkelgeschwindigkeit w in der Entfernung r vom Mittelpunkt die Gleichung aufgestellt

$$\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{A}{r^3},$$

wo A eine gewisse Constante bezeichnet; setzt man $2n+1 = \nu$ und

$$w = {}^{n}\!\sum w_\nu \cos\nu\frac{\pi z}{\delta},$$

so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d^2w_\nu}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dw_\nu}{dr}-\frac{\nu^2\pi^2}{\delta^2}w_\nu=\frac{(-1)^n}{\nu}\frac{4A}{\pi r^3},$$

woraus

$$w_\nu = -\frac{(-1)^n}{\nu^3}\frac{4\delta^2 A}{\pi^3 r^2}+v_\nu,$$

$$\frac{d^2v_\nu}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dv_\nu}{dr}-\frac{\nu^2\pi^2}{\delta^2}v_\nu=0.$$

Diese Gleichung hat Riecke nur näherungsweise für grosse Werte von $\frac{r}{\delta}$ gelöst; der Verfasser integrirt sie allgemein durch

$$v_\nu = \frac{A_\nu}{r} J'\left(\frac{i\pi\nu}{\delta} r\right) + \frac{B_\nu}{r} Y'\left(\frac{i\pi\nu}{\delta} r\right),$$

wo J' und Y' die zwei Cylinderfunctionen erster Ordnung sind. Die Constanten A_ν und B_ν bestimmen sich durch die Bedingung, dass an den zwei Elektroden-Cylindern, d. h. für $r = a$ und $r = b$, $w_\nu = 0$ ist. Der Verfasser berechnet v_ν näherungsweise und bestimmt aus von ihm angestellten Beobachtungen die Reibungsconstante von Zinkvitriol und Kupfervitriol. Lbg.

H. Weber. Zur Theorie der Wheatstone'schen Brücke. Wiedemann Ann. XXX. 638-655.

J. Fröhlich. Verallgemeinerung der Wheatstone'schen Brücke. Wiedemann Ann. XXX. 156-161.

Die Abhandlung enthält den Beweis des folgenden Satzes: „Wenn in sämtlichen sechs Zweigen der Wheatstone'schen Brücke beliebige elektromotorische Kräfte wirken und beim Schliessen und Oeffnen des einen Diagonalzweiges die Stromstärke in dem anderen Diagonalzweig ungeändert bleibt, so besteht zwischen den Widerständen der vier Seiten die Proportion $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}$ “.

Lbg.

A. Gray. Note on an elementary proof of c rems regarding the steady flow of elec network of conductors. Phil. Mag. (5) XXIV.

Indem der Verfasser von Kirchhoff's Gesetzen u wöhnlichen Satze betreffs der Summe der Producte aus d in jedem Teile eines Umkreises in den Widerstand d ausgeht, betrachtet er den Fall ei es aus fünf und findet den äquivalenten Wid ystems v

Widerständen. Darauf beweist er den Satz: „Irgend zwei Punkte in einem linearen Systeme, die auf verschiedenen Potentialen sind, kann man durch einen Draht verbinden, ohne dadurch in irgend einer Weise den Zustand des Systems zu verändern, falls der Draht eine elektromotorische Kraft enthält, welche der Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten gleich und entgegengesetzt gerichtet ist." Es folgen Beweise bekannter Sätze.

Gbs. (Lp.)

H. JANUSCHKE. Das Princip der Erhaltung der Energie in der elementaren Elektricitätslehre. Leipzig. Teubner. VIII u. 186 S. 8°.

Das Buch behandelt in ziemlicher Vollständigkeit die Anwendung des Energiebegriffs auf die Elektrostatik, die Theorie des Stroms und die Elektrodynamik. Als eine in jeder Beziehung genügende Darstellung des Gegenstandes kann es wohl kaum — und will es auch vielleicht gar nicht — angesehen werden; das Streben nach elementaren Ableitungen, deren Berechtigung auf diesem Gebiet fraglich erscheint, hat vielfach der wünschenswerten Klarheit Eintrag gethan. Aber auch in den Definitionen vermisst man nicht selten die unumgänglich nötige Präcision; so z. B. fehlt eine allgemeine Definition des Begriffs der Energie, und das Potential wird bald der Energie gleich, bald von entgegengesetztem Zeichen angenommen. Lbg.

E. MASCART u. J. JOUBERT. Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von Levy. Bd. II. Berlin. Springer.

Der vorliegende zweite Band behandelt mit grosser Klarheit, Gründlichkeit und Vollständigkeit das gesamte Gebiet der elektrischen und magnetischen Messungen. Der erste Teil enthält die allgemeinen Methoden der Winkelmessung und die Formeln für die Potentiale von Rollen; der zweite die elektrischen Messinstrumente und Messungsmethoden; der dritte die magnetischen Messungen; der vierte die industriellen elektrischen Maschinen.

Die Grundlage bildet, ebenso wie für den ersten, die Theorie behandelnden Band, das Lehrbuch der Elektricität von Maxwell.

Lbg.

G. S. Ohm. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Vorwort von J. Moser. XIV u. 135 S. Wien. Toeplitz u. Deutike.

O. May. Lehrbuch der Elektrodynamik. VI u. 88 S. Stuttgart. J. Maier.

A. Kriloff. Ueber die Anordnung der Magnetnadeln in der Windrose des Seecompasses. Mar. J. 1886. 28 S. (Russisch.)

A. Kriloff. Ueber ein neues Dromoskop. Mar. J. 1886. 13 S. (Russisch.)

A. Kriloff. Ueber die Berechnung der Teilungswerte des Deflectors für Seecompasse. Mar. J. 1886. 18 S. (Russisch.)

Wm. Harkness. On the constant *P* in observations of terrestrial magnetism. Nature XXXVII. 272.

A. W. Rücker. Observation. ibid. 272-273.

R. A. Hermann. On the motion of two spheres in fluid and allied problems. Quart. J. XXII. 204-262.

R. A. Hermann. On a problem in fluid motion. Quart. J. XXII. 370-384.

Bericht auf S. 996ff. dieses Bandes.

A. B. Basset. On the motion of two spheres in a liquid and allied problems. Lond. M. S. Proc. XVIII. 369-377.

Bericht auf S. 998ff. dieses Bandes.

Capitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

J. Bertrand. Thermodynamique. Paris. Gauthier-Villars. 8°.
Ausführliche Anzeige in Darboux Bull. (2) XI. 249-261.

R. Clausius. Théorie mécanique de la chaleur. Deuxième édition, refondue et complétée, traduite sur la 3e édition de l'original allemand par F. Folie et E. Ronkar. Tome I. Mons. Manceaux. VII + 499 S. 8°.

Der erste Band dieser französischen Ausgabe von der Wärmetheorie von Clausius enthält die Entwickelung der Formeln, welche aus den beiden Hauptsätzen folgen, nebst verschiedenen Anwendungen. Mn. (Lp.)

J. P. Joule. Joint scientific papers. Published by the Physical Society of London. Vol. II. London. 8°.

P. Duhem. Étude sur les travaux thermodynamiques de M. J. Willard Gibbs. Darboux Bull. (2) XI. 122-148, 159-176.

Die beiden Teile der vorliegenden Abhandlung geben einerseits eine Darlegung des Weges, auf welchem man zu der Methode von Gibbs für die Behandlung thermodynamischer Vorgänge gelangt, andererseits eine historische Darstellung derjenigen Versuche, welche vorher in der betreffenden Richtung unternommen worden sind, und derjenigen Anwendungen, welche diese Behandlungsweise thermodynamischer Vorgänge bisher gefunden hat.

Die in Frage stehenden Untersuchungen beruhen im wesentlichen auf dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie, und daher beschäftigt sich der erste Abschnitt der Abhandlung vorwiegend mit diesem Gesetze.

Nachdem kurz der erste Hauptsatz der mechanischen Wärme-

theorie formulirt ist, gelangt das Postulat von Clausius zur Besprechung, aus welchem dann weiter abgeleitet wird, dass uncompensirte Verwandlungen nur positiv sein können. Hieraus erhält man dann fast unmittelbar das Gibbs'sche Princip: Ein System ist offenbar im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn mit jeder beliebigen virtuellen Modification eine negative oder verschwindende uncompensirte Verwandlung verbunden ist. Bleibt die Temperatur während des Vorganges constant, so kann der Wert dieser uncompensirten Verwandlung dargestellt werden als der Wertunterschied einer gewissen Zustandsfunction für die End- und Anfangslage, welche passend als thermodynamisches Potential bezeichnet werden kann. Dann aber erhält man weiter den Satz: Ein System befindet sich bei gegebener Temperatur allemal im Zustand des stabilen thermodynamischen Gleichgewichts, wenn das thermodynamische Potential ein Minimum ist.

Der zweite Teil bespricht zunächst die Beziehungen der Untersuchungen von Massieu und von Helmholtz zu denjenigen von Gibbs. Alsdann wird die Bedeutung der Gibbs'schen Theorie für die Dissociationserscheinungen und die Volta'sche Säule hervorgehoben. F. K.

H. Poincaré. Sur la théorie analytique de la chaleur. C. R. CIV. 1753-1759.

In der Absicht, zu einer strengeren Begründung der Gesetze beizutragen, welche die analytische Theorie der Wärme für beliebige feste Körper aufstellt, beschäftigt sich der Verfasser mit der Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 . \Delta V \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial n} + h . V = 0.$$

Sbt.

F. Lucas. Étude thermodynamique des propriétés générales de la matière. C. R. CIV. 1083-1085.

Der Verfasser gelangt zu dem Satze: Damit die absolute Temperatur und die innere Energie als Functionen des Volumens und des Druckes eines Körpers betrachtet werden können, muss

die absolute Temperatur gleich dem Product aus dem Druck und einer Function des Volumens, oder es muss die innere Energie eine Function der Temperatur allein sein. Sbt.

J. Bertrand. „Explications ...“ et „Remarques relatives à la fonction de Carnot“. C. R. CV. 441-446, 477-483.

Die erste Mitteilung enthält sehr lesenswerte Bemerkungen, mit welchen der Verfasser der Akademie sein Werk über Thermodynamik ankündigt, und welche erkennen lassen, dass es ein leitender Grundsatz desselben gewesen ist, die Verwendung von Erfahrungsthatsachen als Grundlagen der Theorie auf ein Minimum zu beschränken.

In dem zweiten Aufsatz beschäftigt sich der Verfasser mit Carnot's Ansicht über die in einem Kreisprocesse geleistete Arbeit: Carnot hatte den Satz aufgestellt, dass die bei einem Wärmeübergange gewonnene Arbeit von der Natur der Körper, durch welche die Arbeitsleistung und der Wärmeübergang vermittelt werden, unabhängig und allein eine Function der Anfangs- und Endtemperatur T_1 und T_2 sei. Diese Function wurde weder von Carnot noch von Clapeyron bestimmt. Der Verfasser zeigt mit Hülfe der Gasgesetze, dass sie die folgende — von derjenigen, welche die neuere Wärmetheorie giebt, sehr verschiedene — Form hätte haben müssen:

$$\frac{G}{Q} = F(T_1, T_2) = \frac{R}{c_p - c_v}(\log T_1 - \log T_2),$$

wo G die geleistete Arbeit, Q die übergehende Wärmemenge bedeutet. Sbt.

M. Planck. Ueber das Princip der Vermehrung der Entropie. I, II, III. Wiedemann Ann. XXX. 562-582, XXXI. 189-203, XXXII. 462-503.

Die vorliegenden Untersuchungen, in welchen eine weitere Verallgemeinerung der Anwendungen des Carnot-Clausius'schen Princips enthalten ist, beruhen auf derselben Grundlage wie der bekannte Satz von Clausius, dass ein Wärmeübergang von einem

kälteren zu einem wärmeren Körper nicht stattfinden kann ohne Compensation. Solche nicht umkehrbaren Processe, wie die Wärmeleitung aus einem wärmeren in einen kälteren Körper, die Erzeugung von Wärme durch Reibung oder Stoss, die Ausdehnung eines Körpers ohne Leistung äusserer Arbeit, werden vom Verfasser natürliche genannt. Sie erfolgen stets in dem Sinne, dass die Entropie des materiellen Systems im Endzustande grösser (für den Grenzfall der umkehrbaren Processe ebenso gross) ist als im Anfangszustande. Von irgend einem Zustande wird also der Uebergang zu einem anderen nur dann möglich sein, wenn für den letzteren die Entropie einen grösseren Wert besitzt; wobei noch die notwendige Voraussetzung zu machen ist, dass die Energie für beide Zustände gleich ist. Ein System in einem Zustande, dem der grösste Wert der Entropie entspricht, befindet sich im absolut stabilen Gleichgewicht.

Das so formulirte Princip wendet der Verfasser zunächst an auf Reactionen zwischen Körpern von der nämlichen stofflichen Zusammensetzung, also auf die Wirkungen, welche z. B. bei der Berührung zweier Massen M und M' desselben Stoffes in verschiedenen Aggregatzuständen eintreten, auf die Wechselwirkungen zwischen zwei isomeren Körpern sowie die zwischen einer chemischen Verbindung und dem homogenen Gemisch ihrer Dissociationsproducte. Die Volumina, Energien und Entropien der Masseneinheit heissen v und v', u und u', s und s', die Temperatur ϑ, der Druck p. Die Zusammensetzung der betreffenden Körper ist constant, die Zustandsänderung soll ohne äussere Wärmezufuhr geschehen. Die Aenderung der Entropie wird

$$\delta S = 1/\vartheta \, . \, (w - w') \, . \, \delta M,$$

wobei w die Massieu'sche Function $\vartheta s - u - pv$ bedeutet. Wenn also Temperatur und Druck beliebig angenommen sind, so ist zwischen den sich berührenden Körpern eine Reaction möglich, und diese erfolgt, weil $\delta S > 0$ sein muss, so, dass M' in M oder M in M' sich verwandelt, je nachdem $w \gtrless w'$. Für $w = w'$ besteht stabiles Gleichgewicht; diese Gleichung drückt eine Beziehung zwischen ϑ und p aus, deren graphische Darstellung die sogenannte neutrale Linie ergiebt. Sie scheidet die Coordinatenebene

in zwei Gebiete, für welche stabiles Gleichgewicht nur dann möglich ist, wenn M bezw. $M' = 0$. Aus der Gleichung $w = w'$ ergeben sich leicht die Folgerungen für die Reactionswärme.

In der angedeuteten Weise werden in der ersten Abhandlung noch die Reactionen nach constanten Gewichtsverhältnissen oder die sogenannten „nackten“ chemischen Reactionen behandelt, wobei namentlich alle Lösungs-, Diffusions- und Absorptionserscheinungen ausgeschlossen sind. Es zeigt sich, dass, wenn Temperatur und Druck beliebig gegeben sind, jede nackte chemische Reaction (im Gegensatz zu Berthollet's Ansicht) in einer bestimmten Richtung bis zur vollständigen Beendigung verläuft. Es giebt aber wieder für jede beliebig angenommene Temperatur einen bestimmten „neutralen“ Druck, für welchen $\delta S = 0$, also stabiles Gleichgewicht besteht bei jedem Mengenverhältnis der reagirenden Stoffe.

In der zweiten Abhandlung wird die Dissociation eines gasförmigen Körpers in mehrere gasförmige Bestandteile untersucht. Hier bildet der erstere mit den Zersetzungsproducten einen mit fortschreitender Reaction veränderlich zusammengesetzten Körper; die Reaction ist nicht mehr eine nackte chemische, denn der innere Zustand des Körpers hängt nicht mehr von Druck und Temperatur allein, sondern auch von der Zusammensetzung ab. Deswegen ist hier das stabile Gleichgewicht mit abhängig von dem Mengenverhältnis der zersetzten und unzersetzten Substanz.

In der dritten Abhandlung wird das Problem bedeutend verallgemeinert: es wird mittels des in Rede stehenden Princips das Eintreten von Reactionen untersucht, die mit ganz beliebigen physikalischen und chemischen Veränderungen verbunden sind. Dabei wird auch die Zufuhr einer gewissen Wärmemenge aus dem Medium, von welchem das System der sich berührenden beliebig zusammengesetzten, homogenen Körper umgeben ist, zugelassen. Die allgemeinen Ausführungen werden fortwährend durch Beispiele erläutert. Es ergiebt sich die Gleichgewichtsbedingung:

$$\Sigma\left(\nu\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \nu_1\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \nu_2\frac{\partial\Phi}{\partial n_2} + \cdots\right) = 0.$$

Hier steht Φ zu der nach dem früheren mit W zu bezeichnenden Function in der Beziehung $W = \vartheta . \Phi$; $n, n_1, n_2, \cdots$ sind die Anzahlen der Moleclüle der verschiedenen Stoffe eines Körpers, $\nu, \nu_1, \nu_2, \cdots$ die Verhältniszahlen der Variationen $\delta n, \delta n_1, \delta n_2, \cdots$; die Summation ist über alle Körper des Systems auszudehnen.

Die allgemeine Gleichung wird angewandt auf Körper von constanter Zusammensetzung, auf Gemenge vollkommener Gase und auf verdünnte Lösungen. Es stellt sich dabei im wesentlichen eine Bestätigung der Guldberg-Waage'schen Theorie heraus, gleichzeitig ergiebt sich der Zusammenhang der Guldberg-Waage'schen Affinitätsconstanten mit den allgemeinen thermodynamischen Eigenschaften der betreffenden Stoffe. Zum Schluss werden die Abweichungen der theoretischen Ergebnisse von denen der Experimentaluntersuchungen erörtert. Sbt.

F. Lucas. Sur l'entropie. C. R. CIV. 569-571.

Es wird der Satz abgeleitet, dass bei der Erwärmung eines Gases, möge dieselbe bei constantem Volumen oder constantem Drucke erfolgen, der Zuwachs seiner Entropie proportional ist der Zunahme der wahren Temperatur. Sbt.

Ch. V. Burton. On the dimensions of temperature in length, mass, and time; and on an absolute C. G. S. unit of temperature. Phil. Mag. (5) XXIV. 96-98.

Der Verfasser bemerkt, dass die zweite absolute Skala von Sir W. Thomson das Mittel zur Auffindung des Verhältnisses zwischen zwei Temperaturen giebt unabhängig von jeder willkürlichen Convention bezüglich der Grösse der Grade; daher betrachtet er die Temperatur als eine physikalische Grösse, die genauer Messung fähig ist und mithin Dimensionen in Länge, Masse und Zeit besitzt. Bedeutet t die Temperatur auf Sir W. Thomson's absoluter Skala eines vollkommenen Gases, E die mittlere kinetische Energie eines Molekels des Gases, so ist $E = kt$, wo k dieselbe Constante für alle Temperaturen und für

alle vollkommenen Gase ist. Die Dimensionen von t sind daher die von E, nämlich ML^2T^{-2}. Eine rohe Abschätzung des Wertes der Temperatur $0^\circ C$ ergiebt ihn als $2{,}5 \, . \, 10^{-16}$ im *C. G. S.*-Masse. Aus der obigen Ueberlegung folgt, dass Entropie eine bloss numerische Grösse ist. Gbs. (Lp.)

B. A. Michelssohn. Einfache Ableitung des zweiten Satzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Principien der analytischen Mechanik. Mosk. Math. Samml XIII. 229-244. (Russisch.)

N. N. Pirogoff. Neuer analytischer Beweis des zweiten Satzes der mechanischen Wärmetheorie. Phys. Ges. St. Pet. XVIII. 307-326. (Russisch.)

J. Moutier. L'énergie libre et les changements d'état. Journ. de l'Éc. Pol. Cah. LVII. 99-146.

Die Arbeit thut dar, wie der von H. v. Helmholtz in die Thermodynamik eingeführte Begriff der freien Energie zur Erklärung der bei den Zustandsänderungen der Körper beobachteten Erscheinungen verwendet werden kann. Insbesondere beschäftigt sich der Verfasser weitläufig mit der Verschiedenheit der Spannung der Dämpfe, welche bei gleicher Temperatur aus dem festen und flüssigen Zustande entstehen, ferner mit dem Dampfdruck der Salzlösungen, mit dem Erstarren solcher Salzlösungen und der Auflösung der Gase in Flüssigkeiten. Sbt.

R. von Helmholtz. Die Aenderungen des Gefrierpunktes berechnet aus der Dampfspannung des Eises. Wiedemann Ann. XXX. 401-432.

Der Verfasser entwickelt zunächst die Gleichung

$$R\vartheta \log \frac{p}{p'} = \frac{P}{2}((s'-s)+(s'''-s''))+\frac{p}{2}(s+s'')-\frac{p'}{2}(s'+s''')$$

zwischen den Dampfdrucken p und p' von Wasser und Eis, dem Drucke P, welcher bei irgend einer Temperatur unter Null Eis

in Wasser verwandelt. Es bedeuten ferner ϑ die absolute Temperatur, s und s' die Volumina von 1 kg Wasser resp. 1 kg Eis bei den Drucken p resp. p', s'' und s''' die Volumina von 1 kg Wasser und 1 kg Eis bei dem Drucke P, endlich R die Gasconstante des Wassers. Bei den durch die thatsächlichen Verhältnisse gegebenen Grössenverhältnissen vereinfacht sich diese Beziehung folgendermassen:

$$\frac{p-p'}{P-p'} = \frac{s'-s}{v-s}$$

[v specifisches Volumen des Wasserdampfes beim Drucke p]. Bei einer bestimmten Temperatur $\vartheta = \vartheta_0$, dem sogenannten Schmelzpunkte, müssen die drei Grössen p, p', P einer Grösse p_0 gleich werden, und man kann bei dieser Temperatur also schreiben

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} - \frac{\partial p'}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta} - \frac{\partial p'}{\partial \vartheta}\right)\frac{s-s'}{v-s},$$

wo sich noch $\frac{\partial p'}{\partial \vartheta}$ gegen $\frac{\partial P}{\partial \vartheta}$ unterdrücken lässt. Die so abgekürzte Gleichung entsteht auch, indem man aus der Kirchhoff'schen Gleichung

$$\frac{dp}{d\vartheta} - \frac{dp'}{d\vartheta} = \frac{Jl}{(v-s)\vartheta_0}$$

und der Thomson'schen Gleichung

$$-\frac{dP}{d\vartheta} = \frac{Jl}{(s'-s)\vartheta_0}$$

$\frac{Jl}{\vartheta_0}$ eliminirt. Ramsay und Young hatten für ihre Untersuchungen die Gleichung

$$\frac{dp'}{d\vartheta} : \frac{dp}{d\vartheta} = r + l : r$$

benutzt, in welcher r die Verdampfungswärme des Wassers, l die Schmelzungswärme des Eises bezeichnet. Der Verfasser zeigt, dass diese Gleichung nur für $\vartheta = \vartheta_0$ richtig ist, während sie für andere Temperaturen lauten muss

$$v'\frac{dp'}{d\vartheta} : v\frac{dp}{d\vartheta} = \frac{d\log p'}{d\vartheta} : \frac{d\log p}{d\vartheta} = r' : r,$$

wo

$$r' = r + \frac{\vartheta}{\vartheta_0} l_0 - (c - c')(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{R}{J} \vartheta \log\left(\frac{p}{p'}\right).$$

Der letzte Abschnitt bezieht sich auf die Aenderung des Gefrierpunktes durch Lösung. Die gewonnenen theoretischen Ergebnisse werden mit Versuchsresultaten verglichen. F. K.

F. Koláček. Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn R. von Helmholtz „die Aenderungen des Gefrierpunktes“. Wiedemann Ann. XXXI.

Zunächst hebt Herr Koláček die Beziehung einer v. Helmholtz'schen Formel zu einer von ihm selbst im Bd. XV von Wiedemann's Annalen entwickelten Formel hervor; ferner nimmt Herr Koláček es für sich in Anspruch, den Satz, dass beim Gefrierpunkt einer Salzlösung die Dampfspannungen von Eis und Lösung dieselben seien, nicht nur vermutet — wie R. v. Helmholtz sagt — sondern auch bewiesen zu haben. Zum Schluss vervollständigt Herr Koláček die von ihm an der oben erwähnten Stelle gelieferten Formeln. F. K.

J. Bertrand. Formule nouvelle pour représenter la tension maxima de la vapeur d'eau. C. R. CV. 389-394.

Die Untersuchung betrifft die thermischen Eigenschaften von Körpern, deren specifische Wärmen beide Functionen der Temperatur sind, und ergiebt für Dämpfe die Relation $pv = R(T+\mu)$, wo R und μ Constanten bedeuten. Die Prüfung dieser Formel an den für gesättigten Wasserdampf bekannten Zahlen lässt erkennen, dass der Quotient $\frac{pv}{T+127}$ nahezu constant und im Mittel gleich 2,47 ist. Dieses Ergebnis führt zu einer Formel, welche den Druck des gesättigten Wasserdampfes als Function der Temperatur darstellt, nämlich:

$$p = G \cdot \frac{T^{79,623}}{(T+126,37)^{88,578}}, \text{ wo } \log G = 34,21083.$$

Der Vergleich der nach der Formel berechneten Zahlen mit den Werten von Regnault zeigt ziemlich gute Uebereinstimmung.

Bemerkenswert ist die ausserordentliche Grösse der im Zähler und Nenner der vorstehenden Formel enthaltenen Zahlen.

Sbt.

Ch. Antoine. Variation de température d'un gaz ou d'une vapeur qui se comprime ou se dilate en conservant la même quantité de chaleur. C. R. CV. 1242-1244.

Bezeichnet θ die von einem für das Gas oder den Dampf charakteristischen Nullpunkt gerechnete Temperatur, so ist die Wärmemenge eines gesättigten Dampfes nach Regnault

$$X = N\sqrt[3]{\theta} + \text{const.}$$

Wenn der Dampf überhitzt wird, so vermehrt sich die Wärmemenge um $c(T-\theta)$, wo T die Endtemperatur, c die specifische Wärme bei constantem Drucke ist. Es ist also die gesamte Wärmemenge

$$Q = N\sqrt[3]{\theta} + c(T-\theta) + \text{const.}$$

Für irgend eine andere Temperatur und einen anderen Druck erhält man

$$Q' = N\sqrt[3]{\theta'} + c(T'-\theta') + \text{const.}$$

Sollen nun die Wärmemengen einander gleich sein, so ist

$$T'-T = \mu-\mu',$$

wo

$$\mu = \frac{N}{c}\sqrt[3]{\theta}-\theta, \quad \mu' = \frac{N}{c}\sqrt[3]{\theta'}-\theta'.$$

Die beiden letzten Ausdrücke lassen sich bestimmen, man erhält aus ihnen die Temperaturdifferenz.

F. K.

C. Puschl. Ueber die Zusammendrückbarkeit der Gase und Flüssigkeiten. Wien. Ber. XCVI. 1028-1037.

C. Puschl. Ueber die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten. Wien. Ber. XCVI. 1131-1139.

Die Arbeiten beschäftigen sich im wesentlichen mit den Maximis (resp. Minimis), welche der Ausdehnungscoefficient a,

die Zusammendrückbarkeit c und das Volumen v, sowie deren Ableitungen als Functionen der Temperatur oder des Druckes aufweisen, sowie allgemeiner mit den Vorzeichen dieser Grössen.

Es ergiebt sich, dass bei den grössten Dichten $\frac{\partial c}{\partial t}$ für Flüssigkeiten negativ, $\frac{\partial a}{\partial p}$ positiv ist, dass der Ausdehnungscoefficient also durch Compression vergrössert wird. Um nun für ein Dichtemaximum a constant $= 0$ zu erhalten, muss mit einer Zunahme des Druckes eine Abnahme der Temperatur verbunden sein. F. K.

A. Sandrucci. Sulla equazione fondamentale e sulla pressione interna dei vapori saturi. Rom. Acc. L. Rend. (4) III. 489-493.

Der Herr Verfasser entwickelt die in anderer Form schon von Clapeyron aufgestellte Gleichung für die Verdampfungswärme gesättigter Dämpfe. Alsdann wird eine Beziehung zwischen dem inneren Drucke für die Gewichtseinheit einer Substanz im flüssigen und im dampfförmigen Zustande aufgestellt und aus derselben geschlossen, dass der Wasserdampf sich nicht wie ein ideales Gas verhalten könne. F. K.

P. Duhem. Sur les vapeurs émises par un mélange de substances volatiles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 9-60.

Der Herr Verfasser entwickelt zunächst die Bedingungen des thermischen Gleichgewichts für ein Gemisch zweier Flüssigkeiten und die von ihnen ausgesandten Dämpfe unter der Voraussetzung, dass sich die letzteren wie vollkommene Gase verhalten. Ferner soll das Gesetz gelten, welches Regnault bei Gemischen von Aether und Wasser beobachtet hat, dass der Druck für das Gemisch von Aether und Wasser genau derselbe ist wie für reinen Aether. Die bemerkenswerteste Folgerung, welche der Herr Verfasser aus seinen Voraussetzungen zieht, besagt, dass in dem Dampfgemisch die Mengen beider Stoffe in demselben Verhältnis stehen, als in dem Gemisch der Flüssigkeiten.

Ferner wird nachgewiesen — wieder unter Voraussetzung von Regnault's Gesetz — dass bei der Zufügung von Aether zu einem schon vorhandenen Gemisch von Wasser und Aether Wärme weder entbunden noch aufgenommen wird. Wird jedoch dem Gemisch Wasser hinzugesetzt, so tritt eine Aenderung der Wärmemenge ein; dieselbe ist jedoch unabhängig von dem Mischungsverhältnis der beiden Substanzen. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Formel für diese Wärmemenge vollständig mit einer von Kirchhoff für einen anderen Fall entwickelten Formel übereinstimmt.

Der zweite Teil der Abhandlung ist den Dissociationserscheinungen gewidmet, und zwar besonders denjenigen bei dem von Isambert untersuchten cyansauren Ammoniak. Auch hier handelt es sich um ein Gasgemisch in Verbindung mit Gemischen anderen Aggregatzustandes. Es ergiebt sich hier das merkwürdige Gesetz, dass das Verhältnis von Cyanwasserstoff (cyanhydrique) zum Ammoniak im Gasgemisch genau dasselbe ist, wie in den anderen Teilen des Systems.

Auch bezüglich der Aufnahme und Abgabe von Wärme existiren ähnliche Gesetze, wie sie bezüglich des Wasser-Aethergemisches mitgeteilt sind. F. K.

P. Duhem. Sur quelques formules relatives aux dissolutions salines. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. 381-405.

Nach einer historischen Einleitung über die zuerst von Kirchhoff theoretisch bearbeiteten thermischen Verhältnisse der Salzlösungen entwickelt der Herr Verfasser zunächst allgemein die Ausdrücke für die beim Verdünnen oder Verstärken einer Salzlösung frei werdenden oder gebundenen Wärmemengen, specialisirt dieselben dann durch Voraussetzung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes oder des Gesetzes von Clausius für Wasserdampf.

Sodann wird für die betreffenden Salze die Gültigkeit der durch von Babo und Wüllner beobachteten Gesetze für die Dampfspannung bei Lösungen zu Grunde gelegt. Die betreffenden

Formeln werden namentlich bei Annahme des Gesetzes von Babo sehr einfach. So ist z. B. die bei der Auflösung einer Salzmenge in Wasser frei werdende resp. gebundene Wärmemenge unabhängig von der Menge des Wassers; und zwar wird Wärme gebunden oder frei, je nachdem die Löslichkeit des Salzes mit wachsender Temperatur steigt oder fällt.

Der letzte Abschnitt bezieht sich auf die specifische Wärme der Salzlösungen. F. K.

F. Braun. Untersuchungen über die Löslichkeit fester Körper und die den Vorgang begleitenden Volum- und Energieänderungen. Wiedemann Ann. XXX. 250-274.

Die Arbeit ist von vorwiegend physikalischem Interesse. Die Rechnungen, welche der Angabe von Versuchsergebnissen vorangeschickt werden, sind an und für sich nicht wichtig genug um hier eingehend erörtert zu werden. Auch scheinen dieselben nicht überall einwurfsfrei zu sein. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0,$$

wo U eine Function p und t ist, kann ohne Benutzung anderweitig gegebener Beziehungen nie eine Folgerung gezogen werden. Entweder benutzt der Herr Verfasser bei Bildung der Hauptgleichungen II, III und IIa derartige weitere Beziehungen, ohne es ausdrücklich anzugeben, oder diese Gleichungen sind die Ergebnisse von Rechenfehlern. F. K.

E. Gossart. Recherches sur l'état sphéroïdal. C. R. CV. 518-520.

Für die Tropfen in sphäroidalem Zustande muss an der Oberfläche zwischen dem hydrostatischen Druck qz und dem capillaren Druck $F\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ Gleichgewicht bestehen. Für sehr breite Tropfen kann $\frac{1}{R'}$ vernachlässigt werden, $\frac{1}{R}$ wird gleich $z''(1+z'^2)^{-\frac{3}{2}}$, so dass für die Meridiancurve die Differentialgleichung

$$qz = Fz''(1+z'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

besteht. Der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist hierbei der Scheitel des Tropfens, die z-Axe die Richtung der Schwere. Die erste Integration liefert, da $z' = 0$ ist, für $z = 0$

$$qz^2 = 2F\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\right);$$

wird jetzt $\frac{2F}{q} = a^2$, $z' = \operatorname{tg}\beta$ gesetzt, so kann geschrieben werden

$$z^2 = a^2(1 - \cos\beta).$$

Für die Berührungslinie mit der Unterlage kann $\beta = 180^\circ$ gesetzt werden, also ist die Dicke e des Tropfens gleich $a\sqrt{2}$. Mitgeteilte Beobachtungsresultate ergeben eine gute Uebereinstimmung mit dieser Formel. Setzt man nun

$$v = \sqrt{2 - \frac{z^2}{a^2}},$$

also $z = a\sqrt{2 - v^2}$, so erhält man

$$x = a\left\{v + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - v}{\sqrt{2} + v}\right\}.$$

Hierdurch ist dann die Gestalt der Meridiancurve des Tropfens bestimmt. F. K.

G. A. Hirn. Remarques sur un principe de Physique, d'où part M. Clausius dans sa nouvelle théorie des moteurs à vapeur. C. R. CV. 716-723.

Der Verfasser verteidigt vom Standpunkte der Experimentalphysik aus gegen Clausius seine Ueberzeugung, dass es nicht erlaubt sei, in einer Theorie der Dampfmaschinen den Wärmeaustausch zu vernachlässigen, welcher bei jedem Kolbenhube zwischen dem Dampfe und den Wänden des Cylinders stattfinde. Sbt.

K. Buske. Ueber Kaltluft- und Kaltdampfmaschinen. Pr. Progymnasium. Berlin. (Nr. 65). 20 S. 4°.

Der erste Teil der Arbeit enthält eine kurze theoretische Darstellung der Principien, auf welchen die Constructionen von Luftmaschinen beruhen; der zweite Teil giebt eine ausführliche

Beschreibung der von Windhausen construirten Kaltluft- und Kaltdampfmaschine. Sbt.

TELLIER. Nouveau moteur thermo-dynamique. Ass. Franc. (Toulouse.) 114-116.

A. NADESCHDIN. Ueber die Ausdehnung der Flüssigkeiten und den Uebergang der Körper aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand. Exner Rep. XXIII. 617-649, 685-718.

A. NADESCHDIN. Ueber die Spannung der gesättigten Dämpfe. Exner Rep. XXIII. 759-790.

A. VOSS. Elementare Darstellung der mechanischen Wärmetheorie für Gase. Pr. Humboldt-Gymn. Berlin. (Nr. 61). 20 S. 4°.

Eine Darstellung bekannter Gesetze, wobei auf die Hülfsmittel der höheren Analysis verzichtet wird. Sbt.

TH. DUDA. Ueber die durch Erwärmung bewirkte Ausdehnung der Körper. Pr. Gymn. Brieg. (Nr. 167). 18 S.

Eine Arbeit von rein didaktischem Interesse. Sbt.

B. Gastheorie.

L. BOLTZMANN. Ueber einige Fragen der kinetischen Gastheorie. Wien. Ber. XCVI. 891-918.

Dem Verfasser war von Tait der Vorwurf gemacht worden, dass er in seinen Abhandlungen über das Wärmegleichgewicht eines Gemisches zweier Gase den Fall unberücksichtigt gelassen

hätte, wo die Molecüle des einen der gemischten Gase unter einander verhältnismässig selten zum Zusammenstoss gelangen, oder wo die Zahl N_1 der Molecüle in der Volumeneinheit für das eine Gas unverhältnismässig kleiner ist als die (N_2) für das andere. Dagegen hatte sich der Verfasser in seiner Abhandlung „Ueber die zum theoretischen Beweise des Avogadro'schen Gesetzes erforderlichen Voraussetzungen" verwahrt und hatte u. a. hervorgehoben, dass die von ihm wiederholt bewiesenen Sätze (1. „Jedes der Gase nimmt die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung an". 2. „Die mittlere lebendige Kraft eines Molecüles wird für beide Gase geich".) für ganz beliebige Werte von $N_1 : N_2$, ja selbst dann noch gelten, wenn man die Annahme macht, dass weder die Molecüle der ersten noch die der zweiten Gasart unter sich, sondern nur die der ersten mit denen der zweiten zusammenstossen. Gleichwohl hat Tait die Polemik fortgesetzt (Edinb. Trans. XXXIII. 251, vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1099) und die Sache so dargestellt, als ob die letzterwähnte Annahme eine für die betreffenden Entwicklungen notwendige Voraussetzung wäre.

Dem gegenüber macht der Verfasser aufs neue geltend, dass die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (oder der specielle Zustand nach Tait) und das Avogadro'sche Gesetz auch noch unter den Umständen gelten, für welche Tait dies bestreitet. Er weist ferner darauf hin, dass die von Tait in der zweiten Abhandlung entwickelte Formel für den Reibungscoefficienten schon 1881 von ihm abgeleitet ist. Die dort und jetzt von Tait befolgte Methode hat indessen, wie schon früher bemerkt wurde, ihre Mängel, weil in dem Ausdrucke für den Reibungscoefficienten, ebenso wie bei Maxwell, Glieder von gleicher Ordnung wie die Ausschlag gebenden vernachlässigt sind. Deshalb wurden auch die Diffusion und Wärmeleitung nicht nach derselben Methode berechnet, nach welcher Tait nun auch diese Erscheinungen behandelt. Die von O. E. Meyer gegebene Formel für den Reibungscoefficienten kann, wie der Verfasser zeigt, auf zweierlei Weise im Anschluss an die Tait'schen Rechnungen abgeleitet werden. Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher sich Abweichungen vom speciellen Zustande, wie sie z. B. durch Gasreibung bewirkt wer-

den, ausgleichen, könnten nur die vom Verfasser früher aufgestellten Gleichungen Aufschluss geben.

In der zweiten Abhandlung hat Tait zugegeben, dass sein erster Beweis des Maxwell'schen Gesetzes der Geschwindigkeitsverteilung nicht ausreichend sei, und hat sich von neuem mit diesem Beweise beschäftigt; der Verfasser kann seinen Ausführungen eine bindende Beweiskraft nicht zugestehen und weist damit zugleich den Beweis des Avogadro'schen Gesetzes als nicht stichhaltig zurück. Er versagt ferner der von Tait vorgeschlagenen Definition der mittleren Weglänge seine Zustimmung und hält die ältere, von Maxwell herrührende Definition aufrecht. Schliesslich tritt er den in der ersten Abhandlung gegen seine Berechnung des Wärmegleichgewichts von Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken, erhobenen Bedenken entgegen und behandelt diesen Gegenstand von neuem in einfacherer Weise und nach der Methode, welche zuerst Lorentz in seiner Abhandlung: „Ueber das Gleichgewicht der lebendigen Kraft unter Gasmolecülen“ angewandt hat. Sbt.

L. Boltzmann. Neuer Beweis zweier Sätze über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolecülen. Wien. Ber. XCV. 153-164.

Von den beiden Sätzen besagt der erste, dass die Zustandsverteilung in einer Masse r-atomiger Molecüle sich unter gewissen Voraussetzungen nicht ändert. Wenn die Molecüle einer Masse nur einer endlichen Anzahl von Zuständen fähig sind, und $w_1, \cdots, w_n$ die Anzahlen der Molecüle bezeichnen, welche jedem einzelnen Zustande entsprechen, so hat die Function

$$E = w_1(\ln w_1 - 1) + \cdots + w_n(\ln w_n - 1)$$

entweder einen constanten Wert, oder der letztere nimmt mit wachsender Zeit ab. F. K.

L. Boltzmann. Einige kleine Nachträge und Berichtigungen. Wiedemann Ann. XXXI. 139-140.

Nebst einigen nachträglichen Bemerkungen zu des Verfassers

Abhandlung über einen Gegenstand der Elektrodynamik (Ann. XXIX. 598-603) wird ein strenger Beweis gegeben als Ersatz des von Joule, Krönig und dem Verfasser früher benutzten Kunstgriffes, dass man sich bei Berechnung des Gasdruckes je $\frac{1}{3}$ der Molecüle in drei senkrechten Richtungen fliegend denkt.

Sbt.

B. W. Stankewitsch. Zur dynamischen Gastheorie. Schlömilch Z. XXXII. 187-191.

Beweis des folgenden Theorems von Boltzmann: In den Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dP_i}{dt} = \varrho_i (i = 1, 2, \cdots, m+1), \qquad \frac{dQ_x}{dt} = \sigma_x (x = 1, 2, \cdots, n)$$

seien die ϱ_i lediglich Functionen der Grössen Q_x, während die σ_x nur von den Grössen P_i abhängen. Zwischen den Werten der $m+1$ Grössen P_i für $t = t_0 (p_1, p_2, \cdots, p_{m+1})$ möge eine Gleichung der Form

$$F(p_1, p_2, \cdots, p_{m+1}) = b$$

bestehen, wo b eine feste Constante ist. Dann können die P_i und die Q_x aufgefasst werden als Functionen der Grösse t und der $(m+n)$ Grössen $p_1, p_2, \cdots, p_m, q_1, q_2, \cdots, q_n$. Es sei ferner

$$\varDelta = \Sigma \pm \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial P_m}{\partial p_m} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial Q_n}{\partial q_n};$$

$$\frac{\partial F(P_1, P_2, \cdots, P_{m+1})}{\partial P_{m+1}} = H,$$

$$\frac{\partial F}{\partial P_1}\varrho_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2}\varrho_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial P_{m+1}}\varrho_{m+1} = E$$

und endlich η und ε die Anfangswerte dieser Ausdrücke. Dann ist der in Frage stehende Satz ausgedrückt durch die Gleichung

$$\varDelta = \frac{\varepsilon H}{\eta E}.$$

F. K.

Burnside. On the partition of energy between the translatory and rotational motions of a set of non-homogeneous elastic spheres. Edinb. Trans. XXXIII. 501-507.

Der Aufsatz versucht, die Methode des Hrn. Tait aus der Abhandlung „The foundations of the kinetic theory of gases“ auf einen Fall der Aufgabe über die Verteilung der Energie in einem Systeme nicht homogener, zusammenstossender Kugeln anzuwenden. Die Aufgabe ist wie folgt gefasst: Gegeben sei eine sehr grosse Menge glatter elastischer Kugeln von gleicher Grösse und Beschaffenheit nach jeder Hinsicht; ihre geometrischen und ihre Trägheitsmittelpunkte fallen nicht zusammen, und die Summe ihrer Volumina ist nur ein kleiner Bruchteil des Raumes, in dem sie sich bewegen; verlangt wird die endliche Verteilung der Energie unter den verschiedenen Graden der Freiheit, wenn das System durch Zusammenstösse einen „besonderen Zustand“ erreicht hat. Cly. (Lp.)

P. G. Tait. Numerical and other additions to his paper, read on the 6th Dec. 1886 on the foundations of the kinetic theory of gases. Edinb. Proc. XIV. 46-48.

P. G. Tait. On the general effects of molecular attraction of small range on the behaviour of a group of smooth impinging spheres (abstract). Edinb. Proc. XIV. 85.

N. N. Pirogoff. Die Grenzgeschwindigkeiten der Gasmolecüle und Watson's Theorie der Rotationsbewegung der Gasmolecüle. Phys. Ges St. Pet. XVIII. 295-303. (Russisch.)

B. W. Stankewitsch. Ueber die Verteilung der Rotationsbewegung unter den Gasmolecülen. Mosk. Math. Samml. XIII. 129-166. (Russisch.)

F. Lucas. Les chaleurs spécifiques d'un gaz parfait. C. R. CIV. 49-51.

Es wird gezeigt, dass die Wärmemenge, welche nötig ist, um die wahre Temperatur der Gewichtseinheit eines vollkomme-

nen Gases bei normalem Druck von t' auf t'' zu erhöhen, ein constantes Verhältnis hat zu der Differenz $\Theta''-\Theta'$ der entsprechenden Angaben eines hundertteiligen Thermometers, wie auch die Function φ in der für vollkommene Gase geltenden Gleichung $(m-1)U = pv = p_0 v_0 \varphi(t)$ beschaffen sein möge. Jenes Verhältnis K wird gleich c_p, wenn $\varphi(t) = 1+\alpha t$. Sbt.

Ch. V. Burton. On the value of γ for a perfect gas. Phil. Mag. (5) XXIV. 166-167.

Der Zweck der Untersuchung ist der Nachweis, dass γ, das Verhältnis zwischen den beiden Elasticitäten, denselben Wert ($\frac{5}{3}$) für alle vollkommenen Gase hat und für diese hypothetische Körperklasse aus rein theoretischen Ueberlegungen berechnet werden kann. Nimmt man eine Menge eines vollkommenen Gases, dessen Volumen v, Druck p und moleculare kinetische Energie W ist, so ist die isothermale Elasticität unter diesen Bedingungen $E_t = p$. Ist dW die bei adiabatischer Compression geleistete Arbeit, wobei das Volumen $v_1 = v - dv$, der Druck $p_1 = p+dp$ wird, und ist W_1 die kinetische Energie nach der Compression, so ist $W_1 = W + pdv$. Nun aber ist $pv = \frac{2}{3}W$, $p_1 v_1 = \frac{2}{3}W_1$, hieraus folgt $dp = p_1 - p = \frac{5}{3}p\frac{dv}{v}$. Demnach ist die isentropische Elasticität $E_\varphi = v\frac{dp}{dv} = \frac{5}{3}E_t$. Gbs. (Lp.)

A. Sandrucci. Sopra la costante R nell' isoterma dei gas perfetti. Batt. G. XXV. 73-81.

Der Verfasser leitet den Satz ab, dass die Gasconstanten R für zwei beliebige vollkommene Gase sich umgekehrt verhalten wie die Atomgewichte derselben, woraus sich für die Gleichung $pv = RT$ die Form ergiebt $pv = \frac{\varrho}{a}\cdot T$, wenn a das Atomgewicht des beliebigen Gases, ϱ die Constante des Wasserstoffs bedeutet. Hieraus entwickelt er, bezugnehmend auf eine frühere Arbeit, für die Moleculargeschwindigkeiten $u_1(T_1)$ und $u_2(T_2)$ zweier

Gase bei den absoluten Temperaturen T_1 bezw. T_2 die Gleichung $\frac{u_1(T_1)}{u_2(T_2)} = \frac{\sqrt{p_1 v_1}}{\sqrt{p_2 v_2}}$ und zieht die Folgerungen für die besonderen Annahmen $T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$ und $v_1 = v_2$. Die Constanten R haben die Bedeutung von Arbeiten, welche die Gewichtseinheiten der Gase in der Ueberwindung des Atmosphärendruckes leisten, wenn sie um 1° erwärmt werden und sich frei ausdehnen. Es sind mithin die Arbeiten, welche gleiche Gewichtsmengen verschiedener Gase in der Ueberwindung eines constanten Druckes leisten, wenn ihre Temperatur um 1° erhöht wird, proportional den Quadraten der Moleculargeschwindigkeiten bei der Anfangstemperatur und unabhängig von dieser; und diese selben Arbeiten sind den Atomgewichten der Gase umgekehrt proportional. Das letztere Ergebnis in Verbindung mit der Thatsache, dass der für Wasserstoff gefundene Zahlenwert von $R(\varrho)$ nahe übereinstimmt mit dem des mechanischen Wärmeäquivalents (E), macht es dem Verfasser äusserst wahrscheinlich, dass $\varrho = E$ ist. Er schliesst seine Arbeit mit der Betrachtung einiger Folgerungen, welche dieses Theorem für die thermodynamischen Formeln haben würde. Sbt.

A. Sandrucci. Su l'accordo della teoria cinetica dei gas colla termodinamica, e sopra un principio della cinetica ammesso finora come vero. Rom. Acc. L. Rend. (4) III. 205-211.

Das fragliche Princip der kinetischen Gastheorie besagt, dass die Geschwindigkeit w, mit welcher Gas durch eine Oeffnung in dem Recipienten in den leeren Raum ausströmt, gleich der zu der betreffenden Temperatur gehörenden fortschreitenden Moleculargeschwindigkeit v ist. Indem Herr Sandrucci das Princip fallen lässt, und durch eine andere Beziehung zwischen w und v ersetzt, glaubt er den Widerspruch der kinetischen Gastheorie und der Thermodynamik bezüglich der Ausflussgeschwindigkeit der Gase auflösen zu können. F. K.

Hugoniot. Remarques relatives aux observations de M. Hirn sur l'écoulement des gaz. C. R. CIV. 46-49.

Herr Hugoniot hebt noch einmal hervor, dass die Werte, welche Hirn der Ausflussgeschwindigkeit der Gase beilegt, viel zu gross seien, um mit den fundamentalen Gesetzen der Hydrodynamik im Einklang zu sein. Es wird ferner gezeigt, zu welchen Widersprüchen sie unter Umständen führen; namentlich wird hervorgehoben, dass Herr Hirn seine ursprünglichen Werte der Ausflussgeschwindigkeit ganz beträchtlich reducirt habe. Herr Hugoniot verwahrt sich weiter gegen eine irrtümliche Auffassung seiner Entwickelungen über den Ausfluss der Gase und hebt endlich hervor, dass seine Formel für das Einströmen des Gases in einen Recipienten gut mit den Resultaten des Herrn Hirn übereinstimmt.

F. K.

Al. Gouilly. Ecoulement varié des gaz. Gén. civ. XI. 205.

Anerkennende Besprechung und Wiedergabe der von Haton de la Goupillière in den C. R. CIII. 661-665, 709-712, 785-788 veröffentlichten Untersuchungen. F. K.

S. H. Burbury. On the diffusion of gases. A simple case of diffusion. Phil. Mag. (5) XXIV. 471-479.

Zwei Gefässe mögen durch eine gleichförmige horizontale Röhre verbunden sein. Im linken Gefässe befinde sich eine Mischung aus zwei Gasen, Gas I und Gas II, nach gewissem Verhältnisse, im rechten Gefässe eine Mischung derselben beiden Gase nach anderem Verhältnisse. Die Temperatur und der Druck sei in beiden Gefässen gleich. Dann wird ein Strom des Gases I durch die Röhre z. B. von links nach rechts fliessen und ein Strom des Gases II von rechts nach links. Die Umstände werden so vorausgesetzt, dass die Bewegung durch die Röhre stetig und die Temperatur und der Druck der vereinigten Gase durchweg derselbe bleiben wird. Das Problem der Diffusion besteht darin, zu finden, wie unter diesen Umständen die Strombe-

jedes der beiden Gase für gegebene Mischungsverhältnisse an den Enden der Röhre beschaffen sein wird. Es wird angenommen, dass die Stromgeschwindigkeit sehr klein ist im Vergleiche zu der mittleren Quadratgeschwindigkeit jedes Gases, die von der kinetischen Gastheorie gefordert wird, und dass bei der Berechnung des Ergebnisses der Begegnungen zwischen den Molekeln diese letzteren als elastische Kugeln anzusehen sind. Der Autor beabsichtigt in diesem Aufsatze zu zeigen, dass eine gewisse von Hrn. Tait gemachte Hypothese (in „On the foundations of the kinetic theory of gases", Edinb. Trans. 1887) mit stetiger Bewegung unvereinbar ist. Gbs. (Lp).

W. C. Wittwer. Die thermischen Verhältnisse der Gase mit besonderer Berücksichtigung der Kohlensäure. Stuttgart. K. Wittwer. 56 S. 8°.

Der Verfasser stellt an die Spitze seiner Untersuchungen folgende Hypothesen:

1) Es giebt zwei verschiedene materielle Stoffe, die Massensubstanz und den Lichtäther.

2) Gleichartiges stösst sich ab, Ungleichartiges zieht sich an.

3) Sämtliche Wirkungen nehmen ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Aus diesen Voraussetzungen leitet der Herr Verfasser das Wirkungsgesetz zweier von Aether umgebenen Massenkugeln auf einander ab.

Dann wird untersucht — und zwar mit Zuhülfenahme einiger Thatsachen der Optik und einiger vom Verfasser anderwärts begründeten Beziehungen — wie die Dichtigkeit des Aethers in einem Gase sich zu der des freien Aethers verhält.

Den Schluss des ersten Abschnitts macht die Beziehung zwischen Temperatur, specifischem Volumen und Druck, welche für ideale Gase in das Gay-Lussac'sche und Mariotte'sche Gesetz übergeht.

Im zweiten Abschnitt werden nun zunächst unter Benutzung vorliegender Beobachtungsthatsachen die Constanten der eben erwähnten Gleichung für den Fall der Kohlensäure abgeleitet.

Es werden weiter besonders die Maxima und Minima des Druckes p als Function der beiden anderen erwähnten Grössen untersucht, und besonders die physikalische Bedeutung dieser besonderen Wertsysteme zu bestimmen gesucht.

Im letzten Paragraphen erörtert der Verfasser den Wärmebedarf bei Temperaturerhöhungen und Aenderungen des Aggregatzustandes; er betrachtet dabei die Temperatur als proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher ein schwingendes Molecül durch seine Gleichgewichtslage geht. Er geht ferner aus von einer früher mitgeteilten Differentialgleichung für die Schwingung eines Molecüls

$$(49) \qquad V^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \varphi x^2 + \psi x^4,$$

wo φ und ψ Functionen der Moleculardistanz r sind. Allein aus dieser Gleichung sucht der Verfasser die Veränderung abzuleiten, welche V^2 erfährt, wenn die Moleculardistanz sich während der Schwingung ändert. Nach unserer Auffassung ist das nicht möglich. Der Irrtum liegt nach unserer Meinung in der Gleichung (54), welche der Verfasser erhält, indem er (49) einfach nach r partiell differentiirt, ohne darauf zu achten, dass offenbar bei einem bestimmten x auch $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ von r abhängen wird. Die Gleichung (64)

$$\frac{\partial V^2}{\partial r} = -\frac{(n-1)}{2r} c V^2$$

und damit auch die an dieselbe geknüpften Folgerungen können wir nicht als richtig anerkennen. F. K.

Piarron de Mondésir. Communication sur la loi de Mariotte. Ing. Civ. I. 29.

Die Versuche von Regnault über das in Frage stehende Gesetz zeigten bei Luft, Stickstoff, Kohlensäure und Wasserstoff Abweichungen, die mit wachsendem Druck grösser und grösser wurden. Der Verfasser erblickt den Grund dieser
in dem Umstande, dass Regnault mit einem fes
7

operirte, und glaubt dieselbe durch Benutzung eines beweglichen Apparates vermeiden zu können. F. K.

P. De Heen. Détermination de la loi théorique qui régit la compressibilité des gaz. Belg. Bull. (3) XIV. 46-53.

Versuch zur Bestimmung des inneren Druckes Π und des Molecular-Volumens v eines Gases vom Volumen V, das dem äusseren Drucke P unterworfen ist, nach Experimenten von Natterer, Amagat, Cailletet, unter der Annahme, dass das Mariotte'sche Gesetz sich in der Formel $(P+\Pi)(V-v) = 1$ ausdrücken lässt. Mn. (Lp.)

Sir W. Thomson. On the equilibrium of a gas under its own gravitation. Edinb. Proc. XIV. 111-118.

Sir W. Thomson. Ueber das Gleichgewicht eines Gases unter dem blossen Einfluss seiner eigenen Schwere. Exner Rep. XXIII. 530-536.

A. Bäcklund. Bidrag till theorien för vågrörelsen i ett gasartadt medium. Stockh. Öfv. XLIV. No. 3. 115-127; No. 6. 351-361.

Fortsetzung einer früheren Abhandlung in Stockh. Oefv. 1886. No. 10. K.

J. S. Gromeka. Einige Fälle des Gleichgewichts eines idealen Gases. Kazan Ges. 1886. 19 S. (Russisch.)

J. J. Thomson. Reply to Prof. Wilhelm Ostwald's criticism on my paper „On the chemical combination of gases“. Phil. Mag. (5) XXIII. 379-381.

Die Kritik des Hrn. Ostwald steht in dessen „Lehrbuch der

allgemeinen Chemie" (II. 745) und betrifft Hrn. J. J. Thomson's Aufsatz im Phil. Mag. (5) XVIII. Gbs.

O. E. MEYER. Ueber die Bestimmung der inneren Reibung nach Coulomb's Verfahren. München. Ber. 343-364. Bericht auf S. 1016 dieses Bandes.

E. TÖPLER. Zur Ermitteluug des Luftwiderstandes nach der kinetischen Theorie. Exner Rep. XXIII. 162-188.

PIARRON DE MONDÉSIR. Aérodynamique ou mécanique des gaz. Paris. 63 S. 8°.

L. NATANSON. Ueber die kinetische Theorie unvollkommener Gase. Dorpat. 45 S. 4°.

T. SCHWARTZE. Die Gasmaschine nach ihrer geschichtlichen Entwickelung, Theorie und Praxis, vom neuesten Standpunkt der Erfahrung dargestellt. Leipzig. VI u. 299 S. 8°.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

CARVALLO. Note sur les expressions obtenues par Duhamel et par Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes. S. M. F. Bull. XV. 167-173.

Bei seinen Entwickelungen über die Wärmebewegung in nicht isotropen Körpern war Duhamel von der Annahme ausgegangen, dass von zwei Molecülen verschiedener Temperatur das wärmere dem kälteren eine Wärmemenge mitteilt, welche gleich ist dem Wärmeunterschied, multiplicirt mit dem Zeitdifferential und einem

von der Richtung der Verbindungslinie abhängenden Factor. Duhamel nahm ferner an, dass dieser Factor für zwei entgegengesetzte Richtungen denselben Wert habe. Lamé liess diese Voraussetzung fallen. Die Ausdrücke für die Wärmemenge, welche in dem Zeitdifferential durch ein Flächenelement hindurchtritt, enthalten bei Duhamel sechs, bei Lamé neun constante Coefficienten. Der Verfasser zeigt, dass man auch ohne die besondere Voraussetzung Duhamel's auf einen Ausdruck mit nur sechs Coefficienten geführt wird.

Bezeichnet V die Temperatur, $d\sigma$ ein Flächenelement, λ, μ, ν die Richtungscosinus seiner Normale, $d\omega$ ein Oberflächenelement einer Einheitskugel, α, β, γ die Richtungscosinus des zugehörigen Halbmessers, K eine Function von α, β, γ, so erhält man nach den Entwicklungen des Verfassers für die durch $d\sigma$ im Zeitdifferential tretende Wärmemenge den Ausdruck

$$d\sigma dt \int d\omega K(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

welcher thatsächlich nur die sechs Coefficienten

$$A = \int d\omega\alpha^2 K, \quad B = \int d\omega\beta^2 K, \quad C = \int d\omega\gamma^2 K,$$

$$A_1 = \int d\omega\beta\gamma K, \quad B_1 = \int d\omega\gamma\alpha K, \quad C_1 = \int d\omega\alpha\beta K$$

enthält.

F. K.

A. Harnack. Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern. Schlömilch Z. XXXII. 91-118.

Im Anschluss an den vierten Abschnitt von Riemann's „Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen" behandelt der Verfasser die einfachsten Probleme der Wärmebewegung. Nach einer eigenen Methode wird die Integralfunction aus der Differentialgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und den Grenzbedingungen direct hergeleitet, und es wird dann bewiesen, dass es nur eine solche Function geben kann, und dass diese allen Bedingungen genügt. In solcher Weise werden behandelt der von zwei parallelen

Ebenen begrenzte Körper, der durch eine einzige Ebene begrenzte unendliche Raum, die Kugel und die Kugel in einem diathermanen Medium. Sbt.

R. Knake. Wärmebewegung in unendlich ausgedehnten plan-parallelen Platten. Teil I. Pr. Gymn. Nordhausen.

Es wird die Wärmebewegung in einer nach zwei Dimensionen unendlich ausgedehnten plan-parallelen Doppelplatte untersucht unter der Voraussetzung, dass diese auf beiden Seiten von zwei Gasen berührt wird, deren Temperaturen Functionen der Zeit sind. Das Problem wird mit Benutzung der Fourier'schen Principien behandelt und vollständig zu Ende geführt. Der Verfasser behält sich indessen für eine spätere Abhandlung den Nachweis vor, dass die in diesem Problem auftretenden, den Fourier'schen Reihen ähnlichen Entwickelungen der als Functionen von x gegebenen Anfangstemperaturen im Innern der Doppelplatte thatsächlich auch die gegebenen Functionen darstellen. Der Beweis wird mit Anwendung der Cauchy'schen Residuenrechnung zu führen sein, und es wird berücksichtigt werden müssen, dass nach Weierstrass eine unendliche Reihe gliederweise nur dann integrirt werden darf, wenn dieselbe in gleichem Grade convergirt. Sbt.

M. Morisot. Sur la mesure des conductibilités intérieures. C. R. CIV. 1836-1839.

Es wird die Temperaturänderung von der Axe bis zur Oberfläche eines homogenen, isotropen Cylinders untersucht, der nur durch seine Mantelfläche Wärme verliert, und ein einfacher Ausdruck für den Coefficienten der inneren Leitungsfähigkeit abgeleitet. Sbt.

E. Beltrami. Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. Bologna Mem. (4) VIII. 291-326.

Das behandelte Problem ist das einer Kugel, bei welcher die Temperatur in concentrischen Schichten variirt; das ange-

wandte Verfahren gründet sich auf den Gebrauch von Potentialausdrücken.

Der Verfaser geht aus von einer Function

$$V = \int k(\xi,\eta,\zeta)\psi(r)\frac{dS}{r},$$

wo

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

dS ein Raumelement um den Punkt (ξ, η, ζ), wo ferner die Function k der Dichtigkeit entspricht und ψ eine Function bedeutet, die samt ihren Derivirten endlich, stetig und eindeutig ist auch für $r = 0$. Er berechnet das Δ_2 derselben und findet

$$\Delta_2 V = -4\pi\psi(0).k + \int k.\frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{dS}{r};$$

wenn $\psi = 0$ für $r = 0$, oder auch, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Raumes S angenommen wird, so erhält man einfacher

$$\Delta_2 V = \int k.\frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{dS}{r}.$$

Hängt ψ ausser von r auch von einem Parameter t ab, setzt man demnach

$$U = \int k(\xi,\eta,\zeta)\cdot\psi(r,t)\cdot\frac{dS}{r},$$

so genügt U, wenn $\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2.\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$, der Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2.\Delta_2 U;$$

und dies gilt für alle Punkte ausserhalb des Raumes S, auch wenn nicht $\psi\ (r,t) = 0$ für $r = 0$.

Dieser Differentialgleichung genügt die Function

$$U = t^{-\frac{1}{2}}.\int k(\xi,\eta,\zeta).e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}.dS$$

und die andere

$$U = t^{-\frac{1}{2}}.\int k(\xi,\eta,\zeta).e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}.\frac{d\sigma}{r},$$

wobei das erste Integral über den Raum S, das zweite über die Oberfläche σ auszudehnen ist.

Die Bedeutung der ersten Lösung in der Theorie der Wärmebewegung ist bekannt, der Verfasser beschäftigt sich nun näher mit der zweiten. Sie entspricht einem Anfangszustande, bei welchem die Temperatur in dem ganzen von σ begrenzten Raume gleich 0 ist. Ist U unter dieser und der folgenden zweiten Bedingung bestimmt, dass die begrenzende Oberfläche die Temperatur 1 hat, so kann statt U leicht eine allgemeinere Lösung erhalten werden, welche die veränderliche Temperatur des gegebenen Raumes unter den Bedingungen darstellt, dass wieder die Anfangstemperatur des Raumes 0, dass aber die Temperatur der begrenzenden Oberfläche nicht mehr constant gleich 1, sondern mit der Zeit nach einem beliebigen Gesetze $f(t)$ veränderlich ist. Es wird

$$u = f(0)\,.\,U(x,y,z,t) + \int_0^t f'(\tau)\,.\,U(x,y,z,t-\tau)\,d\tau$$

oder

$$u = \int_0^t f(\tau)\cdot\frac{\partial U(x,y,z,t-\tau)}{\partial t}\cdot d\tau.$$

Die Anwendung dieser Lösung auf den Fall einer Kugel mit dem Radius R ergiebt für die Temperatur u im Innern der Kugel und in einer Entfernung r vom Mittelpunkte den Ausdruck

$$u = \frac{2R}{r\sqrt{\pi}}\cdot\left\{\int_{\frac{R-r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{(R-r)^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds - \int_{\frac{R+r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{(R+r)^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds\right\}$$

und für die Temperatur der Oberfläche

$$u' = f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t-\frac{R^2}{a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds.$$

Dabei bedeutet s eine Veränderliche, die von ϱ und τ, der veränderlichen Entfernung vom Mittelpunkte und der veränderlichen Zeit, abhängig ist durch die Relation $s = \frac{\varrho}{2a\sqrt{t-\tau}}$. Die For-

meln enthalten die unbekannte Function $f(t)$; will man nun die veränderliche Temperatur im Innern der Kugel durch die der Oberfläche bestimmen, wenn diese nach einem Gesetze $u' = F(t)$ gegeben ist, so entsteht die Aufgabe, aus der Functionalgleichung

$$F(t) = f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{R^2}{a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds$$

$f(t)$ darzustellen. Die Lösung dieser analytischen Aufgabe bildet den wesentlichsten Teil der vorliegenden Untersuchung, und es ist dieselbe nicht nur an sich interessant, sondern auch wegen weiterer Anwendungen, welche dieselbe zulassen dürfte. Es ergiebt sich der Satz: Wenn $F(t)$ von $f(t)$ nach der vorstehenden Gleichung abhängig ist, so ist umgekehrt

$$f(t) = F(t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{R^2}{a^2 s^2}\right) \cdot \sum_{1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2 s^2} \cdot ds.$$

Mit Hülfe dieses Satzes wird es dem Verfasser möglich, die veränderliche Temperatur einer Kugel zu bestimmen, von welcher die Anfangstemperatur $G(r)$ und die Temperatur der Oberfläche $F(t)$ gegeben sind. Sbt.

R. S. Woodward. On the free cooling of a homogeneous sphere, of initial uniform temperature, in a medium which maintains a constant surface temperature. Ann. of Math. III. 75-88.

R. S. Woodward. On the conditioned cooling and the cubical contraction of a homogeneous sphere. Ann. of Math. III. 129-144.

Die schon längst in viel grösserer Allgemeinheit als in den vorliegenden Abhandlungen gelösten calorischen Probleme werden hier von neuem zu dem Zweck aufgenommen, um den Resultaten eine für die praktische Rechnung brauchbarere Gestalt zu geben.

Die erste Abhandlung behandelt die Aufgabe der Wärmeverteilung in einer Kugel bei gegebener constanter Anfangs-

temperatur und gegebener constanter Oberflächentemperatur; in der zweiten Arbeit handelt es sich um eine Kugel constanter Anfangstemperatur in einem Medium, welches stets dieselbe Temperatur hat.

Beiden gemeinschaftlich sind die Bedingungen

$$\frac{\partial(ur)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2(ur)}{\partial r^2}, \qquad ru = ru_0 (t = 0), ru = 0 \; (r = 0).$$

Im ersten Falle kommt für $r = r_0$ hinzu:

$$ur = 0, \quad \text{im zweiten} \quad \frac{\partial(ru)}{\partial r} + (hr - 1)u = 0.$$

Es wäre vielleicht wünschenswert, wenn der Verfasser näher auf die Convergenz der von ihm benutzten Reihen für einige besondere Zeitpunkte und Werte des Radius eingegangen wäre. Liegt doch schon in der Forderung, dass für $t = 0$, $ru = ru_0$ und für $r = r_0$, $ru = 0$ sein soll, ein Widerspruch bezüglich des Verhaltens der Oberflächenpunkte, welcher vermuten lässt, dass für $r = r_0$, $t = t_0$ die Reihen besondere Eigenschaften zeigen werden.

Die Lösung in dem zweiten Falle behandelt der Verfasser derart, dass er ru als Function von r, t und $x = \frac{1}{ur_0}$ betrachtet und dann die gewöhnlich gegebene Lösung nach Potenzen von x entwickelt. Das Anfangsglied ist dann identisch mit der Lösung der vorhergehenden Aufgabe; die Coefficienten der höheren Potenzen werden sehr rasch ziemlich complicirt.

Die Resultate beider Abhandlungen werden auf die Erde angewandt. F. K.

C. Chree. Conduction of heat in liquids. Historical treatment. Phil. Mag. (5) XXIV. 1-27.

Der Aufsatz giebt historische Notizen und eine Kritik der wichtigsten Versuche über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten. Die Methoden und Resultate von Despretz, Paalzow, Bottomley, Guthrie, Lundquist, Winkelmann und Beetz werden zuerst betrachtet, danach

werden die Theorie und die Versuche von Weber zusammen mit einer Abhandlung von Lorberg vollständiger besprochen. Das Werk von Christiansen und Graetz wird auch in einiger Breite behandelt. Gbs. (Lp.)

A. SCHULTZE. Ueber die Bewegung der Wärme in einem homogenen rechtwinkligen Parallelepipedon. Diss. Kiel. 37 S. 8°.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

A. Hübner. Heron von Alexandrien der Aeltere als Geometer und der Stand der Feldmesskunst vor Christi Geburt. Jordan Z. f. V. XVI. 553-559, 674-678; XVII. 282-291, 325-329, 365-369.

Einer geschichtlichen Einleitung folgt die Uebersetzung von Cap. I-XXX des auch das griechische Original mit enthaltenden Werkes: Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale et autres bibliothèques, publiés par l'institut impérial de France, faisant suite aux notices et extraits lus au comité établi dans l'académie des inscriptions et belles-lettres. Tome dix-neuvième. Paris 1862. P.

H. Woelfer. Die praktische Geometrie. Lehrbuch für den Unterricht an technischen Lehranstalten und zum Selbststudium. Mit 109 in den Text gedruckten Figuren. Berlin. Springer. X u. 118 S.

Der Stoff ist dem Bedürfnisse der Baugewerkschulen und der ausübenden Bautechniker entsprechend abgegrenzt. In der

ersten Abteilung, die die Horizontalmessung behandelt, sind zunächst die Apparate zur Messung und Absteckung gerader Linien, zum Abstecken rechter Winkel und die Winkelmessinstrumente einschliesslich des Theodolits mit der jedesmaligen Prüfung, Berichtigung und Anwendung beschrieben, wobei die auf dem Bauplatze besonders benutzten Instrumente gebührend berücksichtigt worden sind. Hierauf folgen verschiedene Methoden der Kreisbogenabsteckung, dann eine kurze Besprechung der Detailaufnahme, der Kartirung, des Copirens der Karten und der Flächenberechnung. Die zweite Abteilung enthält nach Vorausschickung der Beschreibung, Prüfung und Berichtigung der verschiedenen Nivellirinstrumente eine Darstellung des Nivellirens und Angaben über die Anfertigung der Längen- und Querprofile, sowie der Horizontalcurvenpläne. Die trigonometrische Höhenmessung ist nur in ihren Grundzügen angedeutet. P.

H. Gross. Die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten und zum Gebrauche für Gemeinde- und Corporationstechniker, Wege- und Wiesenbaumeister, Forst- und Landwirte, Feldmesser und Baubeflissene bearbeitet. Zweite vermehrte u. verbesserte Aufl. Mit 107 in den Text gedruckten Holzschnitten. Stuttgart. Wittwer. VIII u. 94 S.

Die Grundzüge des Vermessungswesens sind in recht klarer Weise behandelt. Der erste der beiden Abschnitte enthält zunächst die Elemente der Flächenmessung: das Abstecken und Messen gerader Linien, die Beschreibung der Winkelmessinstrumente einschliesslich des einfachen Theodolits und das Abstecken kleiner Kreisbogen; dann die Aufnahme und Aufzeichnung von Situationsplänen, sowie die Berechnung von Flächen. Der zweite Abschnitt umfasst die Höhenmessungen mit Beschränkung auf das Nivelliren. Es sind darin die Instrumente mit und ohne Fernrohr nebst Prüfung und Berichtigung beschrieben und die

Aufnahme von Längen- und Querprofilen, sowie die Herstellung von Horizontalcurvenplänen anschaulich erörtert.

Schon an einer anderen Stelle haben wir einmal darauf hingewiesen, dass einige kurze Angaben über die Prüfung und Berichtigung des einfachen Theodolits noch recht erwünscht wären; ausserdem erscheint uns aber auch die Polygonzugmessung nicht für alle im Titel angegebenen Vermessungstechniker gänzlich entbehrlich.

Infolge der Klarheit und Kürze des Vortrages ist das Werkchen allen, die sich über die oben angeführten Gegenstände unterrichten wollen, besonders zu empfehlen. P.

E. Pucci. Fondamenti di geodesia. II Vol. Milano. Hoepli.

Th. A. Sloudsky. Allgemeine Theorie der Gestalt der Erde. Mosk. Math. Samml. XIII. 633-706 u. 1 Taf. (Russisch.)

Der Verfasser entwickelt vollständig die allgemeine Theorie der Bestimmung der Gestalt des Erdgeoids; er gründet sie auf die Entwickelung der Potentialfunction der Erdanziehung nach den absteigenden Potenzen des Radiusvector des angezogenen Punktes und auf die Bestimmung aus Beobachtungen und Messungen der unbekannten Coefficiënten bei den Kugelfunctionen verschiedener Ordnungen. Der Ausarbeitung dieser Theorie waren seine Abhandlungen gewidmet: 1) Problème principal de la haute géodésie (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 1081), 2) Essai de solution du problème géodésique (F. d. M. XVI. 1884. 1082), 3) La figure de la terre d'après les observations du pendule (F. d. M. XVIII. 1886. 1084). Hier berechnet der Verfasser die Coefficienten der Glieder der vier ersten Ordnungen und erhält eine neue Lage der Schnittcurve des Geoids auf der Oberfläche des Listing'schen Ellipsoids. Wie auch schon früher zeigt er, dass dem Ocean vorzügsweise Erhöhungen, dem Continent vorzugsweise Vertiefungen des Geoids entsprechen. Bb.

P. Pizzetti. Contribuzione allo studio geometrico della superficie terrestre. Genova G. 1887.

Entwickelung der geometrischen Beziehungen, welche für die astronomischen resp. geodätischen Meridiane, Parallelkreise etc. auf dem Geoid gelten. B.

R. S. Woodward. On the form and position of the sea-level as dependent on superficial masses symmetrically disposed with respect to a radius of the Earth's surface (continued). Ann. of Math. III, 11-26.

Der Verfasser entwickelt die Meeresniveaufläche auf einer Kugel, falls auf derselben eine um eine Axe symmetrisch verteilte Masse liegt. Diese Masse bewirkt ein Steigen des Meeres auf der Kugelhälfte, in welcher die Masse liegt, auf der anderen ein Fallen. Dies ist für die Erde wichtig, weil je nach der veränderlichen Stellung der Erdaxe und der Veränderung der Erdbahn bald um den Nordpol oder um den Südpol eine grosse Eismasse sich bilden kann. Dz.

R. Lehmann - Filhès. Ueber abnorme Fehlerverteilung mit Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen. Astron. Nachr. No. 2792.

Häufig zeigen sich bei Beobachtungsreihen mehr grössere Fehler, als man nach Gauss' Fehlergesetz erwarten sollte, und haben die Astronomen oft Beobachtungen mit abnorm grossen Fehlern ausgeschlossen. Herr Lehmann - Filhès, welcher hierzu einige Beispiele anführt, sucht den Grund dieser Erscheinung in einem von Beobachtung zu Beobachtung sich ändernden Genauigkeitsmass h, welches in der Methode der kleinsten Quadrate eine so wichtige Rolle spielt. Indem er annimmt, dass alle h um einen Mittelwert h_0 herum liegen und für die Wahrscheinlichkeit, dass h zwischen h und $h+dh$ liege, die Function:

$$\psi(h)\,dh = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-k^2(h-h_0)^2}\,dh$$

willkürlich setzt, wird das Fehlergesetz umgeändert, so dass es nur dann in das Gauss'sche übergeht, wenn $k = 0$. Mit Hülfe dieser Betrachtungen lässt sich eine bessere Uebereinstimmung erzielen, wie an einem Beispiele gezeigt wird. Dz.

Nell. Ueber einige Vereinfachungen, welche bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gemacht werden können. Jordan Z. f. V. XVI. 454-467.

Die Schleiermacher'sche Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetze ist vom Verfasser bereits in derselben Z. X. 1-11, 109-121 beschrieben und auf ein grösseres Zahlenbeispiel angewandt worden. In XII S. 313-320 wurde dann eine Abänderung dieser Methode gegeben, wodurch eine vorläufige unvollständige Ausgleichung der Winkel vermieden wird. Hier sind die bezüglichen Formeln übersichtlich zusammengestellt, und am Ende wird die Anwendung folgender zwei Sätze von Gauss erläutert:

1) Wenn man unvollständig ausgeglichene Beobachtungen mit Hinzufügung aller Bedingungsgleichungen aufs neue ausgleicht, als ob sie unmittelbare Beobachtungen wären, so kommt man zu denselben Resultaten, welche man auch erhalten hätte, wenn man gleich zu Anfang die unmittelbaren Beobachtungen mit Zuziehung aller Bedingungsgleichungen vollständig ausgeglichen hätte.

2) Wenn zum Behufe der Ausgleichung eine gewöhnliche Bedingungsgleichung zu erfüllen ist, ausserdem aber noch eine Anzahl anderer Bedingungsgleichungen erfüllt werden soll, deren absolutes Glied gleich Null ist, so kann man diesen Zweck durch Erfüllung einer neuen Bedingungsgleichung erreichen, welche man dadurch bildet, dass man die sämtlichen vorgegebenen Gleichungen addirt, nachdem man die letzterwähnten erst mit Zahlen-Coefficienten multiplicirt hat, welche so bestimmt sind, dass die Summe der Quadrate der Coefficienten in der neuen Gleichung ein Minimum wird. P.

W. Veltmann. Bestimmung der Unbekannten einer Ausgleichungsaufgabe mittels der Gauss'schen Transformation der Summe der Fehlerquadrate. Jordan Z. f. V. XVI. 345-356.

In Schlömilch Z. XXXI. (F. d. M. XVIII. 1886. 110) hat der Verf. bereits ein Verfahren beschrieben, Gleichungen mit mehreren Unbekannten durch Elimination in die für die Auflösung geeignetste Form zu bringen und dafür zweierlei Begründungen gegeben. Der Fall der symmetrischen Gleichungen, wie er in der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auftritt, ist hier nach der zweiten Begründungsmethode behandelt und noch dahin erweitert worden, dass auch die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler erhalten wird. Ausserdem sind noch die für die praktische Anwendung wesentlichen Proberechnungen beschrieben. P.

P. Fenner. Die strenge Ausgleichung regelmässiger Polygonzüge nach der Methode der kleinsten Quadrate und ihre Anwendung zur näherungsweisen Ausgleichung beliebiger Polygonzüge. Jordan Z. f. V. XVI. 249-271, 287-297.

Nach Vorausschickung der Theorie der Ausgleichung der Schlussfehler eines beliebigen Polygonzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate werden nacheinander behandelt: das Gewichtsverhältnis der Polygon-Winkel und -Seiten, die Normalgleichungscoefficienten beim unregelmässigen Polygon, die Correlatenwerte für bestimmte Formen des regelmässigen Polygons (Halbkreis, Dreiachtelkreis, Viertelkreis, Achtelkreis, gestrecktes Polygon), die Aenderung der Correlaten mit der Ausbiegung und der Seitenzahl, die Ermittelung der Winkel- und Streckenverbesserungen die Azimut- und Coordinatenänderungen und schliesslich die Anwendung auf ein Zahlenbeispiel. P.

G. de Berardinis. Sulla determinazione di alcune incognite. Batt. G. XXV. 313-320.

Es handelt sich um die Bestimmung der bei der Vergleichung der vier Stangen des Bessel'schen Basismessapparates unter sich auftretenden Unbekannten C, x und m. Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist für den Fall theoretisch durchgeführt, dass die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit sind, worauf dann noch die Berechnung der mittleren Fehler der x und m folgt. P.

L. Kiepert. Ueber eine Aufgabe aus der Theorie der Maxima und Minima. Jordan Z. f. V. XVI. 148-151.

Es wird nachgewiesen, dass die günstigste Lage eines gegen drei gegebene Punkte zu bestimmenden vierten Punktes nach dem Pothenot'schen Verfahren der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ist, das die gegebenen Punkte zu Ecken hat.

P.

R. Doergens. Die Berechnung und Teilung der geradlinig begrenzten Grundstücke. Mit 3 Figurentafeln. Berlin. A. Seydel.

Enthält eine Zusammenstellung von Beispielen für die Flächeninhaltsberechnung und Teilung geradlinig begrenzter Grundstücke nebst der Entwickelung der nötigen Formeln. Nach einer Erläuterung der Flächeninhaltsformeln für das Vieleck, Dreieck und Viereck sind sechs verschiedene Dreiecks- und neun Viereckteilungen, jedesmal von Zahlenbeispielen begleitet, behandelt worden, woran sich dann die mehrfache Anwendung der Parallelteilung und der Proportionalteilung auf einen Streifen mit gebrochenen Grenzlinien schliesst. Am Ende ist noch die Teilung mit Rücksicht auf die Bonität besprochen. P.

Goulier. Sur les nivellements de précision. Mémoire, présenté par M. F. Perrier. (Extrait par l'auteur.) C. R. CV. 270-273, 306-309.

Die Correction der Präcisionsnivellements mit Bezug auf die

von Wittstein und Helmert in den Astronomischen Nachrichten, Band 74 und 81, vorgeschlagenen Methoden wird besprochen. Die Ausführungen des Verfassers gehen dahin, dass für die Praxis — abgesehen von der Kleinheit des Schlussfehlers eines Nivellements, infolge des Nichtparallelismus der Niveauflächen, gegenüber den Messungsfehlern — die directe Reduction der geometrischen Höhen vor der physikalischen Methode (hier dynamische genannt) mittels Arbeitshöhen den Vorzug verdient. P.

PIETSCH. Photogrammetrie. Jordan Z. f. V. XVI. 647-651, 657-669.

Wird dasselbe räumliche Gebilde von zwei Standpunkten aus photographisch aufgenommen, so kann es, unter der Voraussetzung, dass die Bilder vollständige Perspectiven sind, leicht in irgend einem Massstabe reconstruirt werden. Dieses ist für Terrainaufnahmen, namentlich auf geographischen Reisen, wichtig und schon von Herrn Jordan 1873 und 1884 auf einer Expedition in die libysche Wüste angewandt worden. Bei Terrainaufnahmen handelt es sich in erster Linie um die Herstellung einer Horizontalprojection des betreffenden Gebietes; aber auch die Höhen der einzelnen Punkte können aus den perspectivischen Bildern leicht mit abgeleitet werden. Die vorliegende Abhandlung enthält die Theorie dieser photogrammetrischen Constructionen, der noch einige bemerkenswerte Resultate der Untersuchung photographischer Objective beigefügt sind. P.

E. LÜLING. Mathematische Tafeln für Markscheider und Bergingenieure, sowie zum Gebrauche für Bergschulen. Zweite Aufl.

D. REGIS. Delle projezioni quotate. Ed. 2a. Torino. 56 S. 8°.

Capitel 2.

Astronomie.

J. C. HOUZEAU et A. LANCASTER. Bibliographie générale de l'Astronomie. Tome I. Ouvrages imprimés et manuscrits. Première partie. Bruxelles. 900 S. gr. 8°.

J. THIRION. Compte rendu. Rev. des qu. sc. XXII. 618-631.

Der zweite Band dieses wichtigen Werkes ist 1882 erschienen (s. F. d. M. XIV. 1882. 916). Der erste Teil vom Bande I, der für die separat erschienenen gedruckten Werke und für Manuscripte bestimmt ist, enthält 1) eine historische Einleitung (1-310), die jedoch da, wo der Verfasser (Hr. Houzeau) religiöse oder philosophische Fragen berührt, viel zu subjectiv gehalten ist; 2) einen ersten Abschnitt, welcher der Geschichte der alten und neuen Astronomie und den didaktischen Werken vor den Dialogen Galilei's (1632) gewidmet ist; 3) einen zweiten, den Werken der Astrologie gewidmeten Abschnitt. Der Bericht des Herrn Thirion enthält viele Zusätze und Verbesserungen zur Bibliographie générale de l'Astronomie. Mn. (Lp)

J. F. BONNEL. Étude sur l'histoire de l'Astronomie. La découverte du double mouvement de la Terre. Tours. 1887. 208 S. 8°.

J. PH. HERR und W. TINTER. Lehrbuch der sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung. Wien. 644 S. 8°.

W. T. LYNN. Celestial motions. Handy book of Astronomy. 5th ed. London.

J. Lurje. Matematitscheskija teorija jewrejskaho kalendarja. (Mathematische Theorie des Judenkalenders.) Mohileff. 170 S. 8°.

R. de Sousa Pinto. Supplemento ao calculo das ephemerides astronomicas. Coimbra.

Im Jahre 1849 hat der Verfasser ein Werk „Calculo das Ephemerides Astronomicas" veröffentlicht. In demselben setzte er mit allen nötigen Entwickelungen die Methoden auseinander, die bei der Berechnung der auf der Sternwarte zu Coimbra veröffentlichten Ephemeriden angewandt wurden. In dem gegenwärtigen Supplement sind die seitdem eingeführten Veränderungen bei der Berechnung angegeben. Tx. (Hch.)

R. de Sousa Pinto. Estudos instrumentaes no Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra. Coimbra.

In diesem Buche setzt Herr Sousa Pinto, Director der Universitäts-Sternwarte zu Coimbra, die Methoden auseinander, die auf dieser Sternwarte bei der Untersuchung des von Herrn Repsold construirten Meridiankreises angewandt worden sind.

Er untersucht die Rectificationen des Instruments, die Bestimmung der Fehler desselben und die Verbesserungen, die bei den Beobachtungen der Meridian-Durchgänge und bei den Zenithbestimmungen vorzunehmen sind. Tx. (Hch.)

O. Bonnet. Théories de la réfraction astronomique et de l'aberration. Nouv. Ann. (3) VI. 335-368, 554-580.

Die vorliegenden Abschnitte enthalten eine Reproduction der Vorlesungen zunächst über Refraction, welche Hr. B. an der Sorbonne im Jahre 1887 gehalten hat. Ein näheres Eingehen erscheint hier nicht geboten, weil einerseits die Entwicklung von vornherein auf die bekannte für mässige Zenithdistanzen geltende

Potenzreihe ausgeht, und weil andererseits die Cardinalfrage, nämlich die verticale Aenderung der Lufttemperatur gar nicht berührt wird. B.

Lord McLaren. Tables for facilitating the computation of differential refraction in position angle and distance. Edinb. Trans. XXXIII. 279-308.

Die Tafeln bezwecken eine Erleichterung der Correctionsberechnung für die Strahlenbrechung bei der Anwendung auf Differential-Messungen, soweit dieselben mit dem Mikrometer oder Heliometer gemacht werden. Ist ζ die mittlere Zenithdistanz des Gesichtsfeldes, η der parallaktische Winkel, so hängen die Correctionen des Positionswinkels und der Entfernung der beiden Sterne von $\mathrm{tg}^2\zeta$ und η ab, und die Tafeln geben für den Parallelkreis 55°56′ und für 57°30′ die Grössen $\log \mathrm{tg}^2\zeta$ und η für je 10 Minuten des Stundenwinkels und für Intervalle von je zwei Grad Declination von 40° bis 90°N. Cly. (Lp.)

Gruey. Sur une forme géométrique des effets de la réfraction dans le mouvement diurne. C. R. CV. 847-850.

Mitteilung des Satzes (nebst Folgerungen), dass ein Stern während der täglichen Bewegung in Folge der Refraction scheinbar einen Kegelschnitt um seinen wahren Ort beschreibt. B.

M. Loewy. Nouvelle méthode pour la détermination de la constante de l'aberration. C. R. CIV. 18-26. B.

A. S. Flint. On the most probable value of the latitude, and its theoretical weight, from entangled observations occurring in the use of Talcott's method. Annals of Math. III. 172-185.

Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf den Fall, dass man

bei Anwendung der Horrebow-Talcott'schen Methode zur Herleitung der Breite aus den im Laufe einer Nacht beobachteten Süd- und Nordsternen Paare combinirt, welche einen und denselben Stern gemeinsam haben. In diesem Falle sind die einzelnen Breitenwerte nicht unabhängig von einander, und es handelt sich darum, die Gewichte der einzelnen Nächte richtig gegen einander abzuschätzen. Es mag hier bemerkt werden, dass man die ganze Schwierigkeit bei einer etwas anderen Anlage von Beobachtung und Reduction recht wohl vermeiden kann. B.

G. Bigourdan. Sur la réduction de la distance apparente de deux astres voisins, à leur distance moyenne d'une époque donnée. C. R. CV. 606-608.

Mitteilung von Formeln zur Reduction auf den mittleren Ort bei Differentialbeobachtungen — Formeln, die auch wohl sonst schon oft genug von den Rechnern benutzt sein dürften.

B.

Obrecht. Application d'une nouvelle méthode de discussion aux résultats obtenus par les Missions françaises. C. R. CV. 1004-1008.

Das hier angegebene Verfahren zur Discussion der französischen Photographien des Venusdurchganges von 1874 beruht darauf, dass man für jede Station aus den gemessenen Abständen des Mittelpunkts von Sonne und Venus, sowie aus den Momenten der Aufnahme die Lage der als geradlinig angenommenen Sehne, d. h. ihren Abstand vom Sonnencentrum und die Epoche der kürzesten Distanz ableitet. B.

H. Gyldén. Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. Acta Math. IX. 185-290.

Diese Arbeit zerfällt in vier Teile und eine Einleitung.

In der letzteren werden zunächst allgemeine Erörterungen gegeben, welche sich namentlich auf den von Gyldén aufgestellten Begriff einer absoluten Lösung beziehen, d. h. einer analytischen Lösung, welche für jeden Zeitpunkt eine beliebig genaue Darstellung der Coordinaten durch die Zeit geben, etwa durch trigonometrische Reihen, deren Argumente der Zeit proportional sind. Dann folgen die Erklärungen der charakteristischen Glieder, wie sie z. B. bei den Jupiter-Saturnstörungen durch das Argument bedingt werden, welches von dem Unterschied der doppelten Bewegung des Jupiters und der fünffachen des Saturns in der Länge abhängt. Diese charakteristischen Glieder werden durch Entwickelung des Verhältnisses dieser beiden Bewegungen in einen Kettenbruch gefunden, und sie sind, wie Laplace zuerst hervorgehoben hat, deshalb so hervorragend wichtig, weil die ihnen entsprechenden Integrationsdivisoren klein sind und diese das betreffende Glied der Störungsfunction nach der Integration, welche für die Länge sogar eine doppelte ist, stark vergrössern. Jenes Verhältnis $\mu = \frac{n'}{n}$, in einen Kettenbruch entwickelt, giebt, wenn es nicht genau commensurabel ist, eine unendliche Anzahl von Näherungsbrüchen $\frac{s_m}{s'_m}$, und die Integrationsdivisoren, wie sie bei den von Lagrange und Laplace entwickelten Näherungsmethoden auftreten, sind dann von der Form

$$s_m n - s'_m n' + n\sigma_m,$$

wo σ_m den störenden Massen proportional ist. Diese Grössen σ_m sind wieder von der Form

$$\sigma_m = p\zeta + p'\mu\zeta' + q\tau + q'\mu\tau' + \cdots,$$

wo die p und q ganze Zahlen sind und ζ, τ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte bedeuten. Im ersten Abschnitt geht der Verfasser von der bekannten Gleichung für die mittlere Länge aus, welche unter Hervorhebung der charakteristischen Glieder lautet:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) - \cdots + M.$$

Hier werden A, σ, B als constant angesehen, und M soll die Vereinigung aller nicht charakteristischen Glieder bedeuten. Es wird nun angenommen, dass die Integration ζ in folgender Form gebe:

$$\zeta = c + nt + \omega,$$

wo c und n constant sind, und ω nur periodische Glieder enthält. Dieses ω wird wieder in zwei Teile $Z + \delta\zeta$ zerlegt, wo Z alle charakteristischen Glieder enthalten soll. Dann zerspaltet Gyldén, natürlich immer unter der unbewiesenen Annahme der Möglichkeit, die obige Gleichung in die beiden folgenden:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma' nt + B_1) - \cdots + N,$$

$$\frac{d^2\delta\zeta}{dt^2} = M - N,$$

wo N noch eine passend zu wählende und die Vermittelung zwischen den Gliedern von Z und $\delta\zeta$ übernehmende trigonometrische Function bedeutet, welche durch Annäherungen immer schärfer bekannt wird. Setzt man nun ζ' einfach von der Form $c' + n't$ voraus und integrirt zweimal, so folgt:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{n^2 A}{sn - s'n' + \sigma n} \cdot \cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) + \cdots + F,$$

$$Z = \frac{n^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \cdot \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) + \cdots + F_1 + \int F dt.$$

Hier sind die F und F_1 hinzugefügt, um das Resultat streng darstellen zu können. Die Grössen F und F_1 genügen dann ihrerseits einer Differentialgleichung, die man leicht durch Einsetzen in die obige Gleichung findet. Diese Reihen für $\frac{dZ}{dt}$ und Z convergiren, wenn $\frac{n'}{n}$ incommensurabel ist, wie aus der Theorie der Kettenbrüche bewiesen wird, vorausgesetzt, dass die Quotienten des Kettenbruches endliche ganze Zahlen sind und nicht eine stark steigende Reihe bilden. Nachdem diese Frage erledigt ist, beschäftigt sich Gyldén mit der Frage, wie man (unter Beiseitelassung von F und F_1) die Constanten n und c bestimmen müsse, wenn für einen bestimmten Wert der Zeit die Werte n_0 und c_0

derselben gegeben sind, so wie sie gerade in diesem Augenblick sind. Mit anderen Worten, wie soll aus den Gleichungen

$$(1)\qquad n_0 = n + \frac{n^2 A}{sn - s'n' + \sigma_n}\cos(sc_0 - s'c' + B) + \frac{n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_{1n}}\cos(s_1 c_0 - s'c' + B_1),$$

$$c_0 = c + \frac{n^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2}\sin(sc_0 - s'c' + B) + \cdots$$

n und c berechnet werden? Hierfür giebt Gyldén eine allerdings gerade in kritischen Fällen versagende Methode, welche hier nicht auseinandergesetzt werden kann. Diesen kritischen Fällen, welche dann eintreten, wenn eines der Glieder der ersten Reihe sehr nahe an n herangeht oder dieses n sogar übertrifft, gilt der zweite Abschnitt. Nimmt man vorläufig nur ein solches Glied an und lässt Glieder höherer Ordnung ausser Acht, so gelangt man, unter Vernachlässigung der übrigen nicht kritischen charakteristischen Glieder zu der Gleichung von Laplace:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\alpha^2 n^2 \sin V \cos V.$$

Diese giebt einmal integrirt die Gleichung:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \gamma^2 n^2 - \alpha^2 n^2 \sin^2 V,$$

und also:

$$dt = \frac{dV}{\sqrt{\gamma^2 n^2 - \alpha^2 n^2 \sin^2 V}}.$$

V wird also durch t vermittelst elliptischer Functionen ausgedrückt, deren Modul $k = \frac{\alpha}{\gamma}$ ist. Ist, wie gewöhnlich der Fall, k sehr klein, so ist das Glied nicht kritisch und V oder $s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt$ ist, von periodischen Gliedern abgesehen, der Zeit proportional, und zwar wird der Factor von t gleich:

$$sn - s'n' + \sigma n = \gamma n \frac{\pi}{K}.$$

Ist aber k grösser als 1, so schwankt V um einen Mittelwert, und es wird

$$sn - s'n' + \sigma n = 0.$$

Es tritt dann das ein, was die Astronomen eine Libration nennen. Wenn $k = 1$ ist, so steht man vor einem Grenzfall, in welchem V in unendlich langer Zeit von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ schwankt. Laplace, dem die Theorie der elliptischen Functionen noch nicht zu Gebote stand, behandelte nur den Fall, dass V sehr klein, k also sehr gross ist, ersetzte dann $\sin V$ durch V und gelangte zu allen für ihn wichtigen Resultaten. Gyldén geht jetzt mit Hülfe dieser Functionen selbstverständlich genauer zu Werke und behandelt auch den Fall, dass k sehr nahe an 1, sowohl $\lesseqgtr 1$ ist.

Im dritten Abschnitt zeigt Gyldén, wie es auch Laplace für den besonderen Fall, dass k sehr gross ist, gethan, wie der Einfluss des kritischen Gliedes sich auf die übrigen erstreckt. Die Differentialgleichung wird unter Hinzuziehung derselben:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + n^2\alpha^2 \sin V \cos V = n^2(X),$$

wo (X) die Zusammenfassung dieser Glieder bedeutet. Dann wird $V = V_0 + V_1$ gesetzt und angenommen, dass V_0 der vorigen Gleichung

$$\frac{d^2V_0}{dt^2} + n^2\alpha^2 \sin V_0 \cos V_0 = 0$$

genügt. Dann geht die erste Gleichung über in

$$\frac{d^2V_1}{d\xi^2} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}(2\sin\operatorname{am}\xi^2 - 1)\, V_1 = \frac{1}{\gamma^2} X \qquad (\xi = \gamma n t + C),$$

wo X ausser der früheren (X) noch andere von der Unbekannten V_1 abhängige Glieder enthält. Diese Lamé'sche Gleichung kann man, wenn X gegeben ist, durch Quadraturen integriren, da, wenn $X = 0$ ist, ihr Integral wird:

$$V_1 = c_1 \Delta\operatorname{am}\xi + c_2 \Delta\operatorname{am}\xi \,.\left[\frac{d\log\Theta_1\xi}{d\xi} + \frac{E}{K}\,.\,\xi\right].$$

Es folgt nun mit Hülfe der elliptischen Functionen eine Betrachtung, ähnlich derjenigen, welche Laplace in der Mécanique céleste gegeben hat, und welche dazu dienen soll, Annäherungsverfahren zu geben. Die erste Annäherung stimmt nun auch ganz genau

mit der von Laplace. Die anderen zu besprechen, würde hier zu weit führen.

Der vierte Abschnitt endlich wird dem Fall gewidmet, dass mehrere kritische Glieder vorhanden sind, die alle von demselben Argument $sn - s'n'$ abhängen, für welche aber das σ verschieden ist, so dass die Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dt^2} = & -n^2 A_{01} \sin[(sn-s'n'+\sigma_{01}n)t+sZ+b_1] \\ & -n^2 A_{02} \sin[(sn-s'n'+\sigma_{02}n)t+sZ+b_2] \\ & - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + \frac{2}{s} n^2(X). \end{aligned}$$

Um diese Gleichung übersichtlicher zu schreiben, setzt man in der bekannten Weise:

$$\begin{aligned} \varepsilon \cos 2\theta &= sA_{01} \cos L_1 + sA_{02} \cos L_2 + \cdots, \\ \varepsilon \sin 2\theta &= sA_{01} \sin L_1 + sA_{02} \sin L_2 + \cdots. \end{aligned}$$

($L_1 = (\sigma_{01} - \sigma)nt + B_{01} - B$), σ und B noch näher zu bestimmende Constanten: Dann geht die obige Gleichung über in

$$\frac{d^2 W}{dt^2} = -n^2 \varepsilon \sin(W+\theta) \cos(W+\theta) + n^2(X).$$

Setzt man hier:

$$W + \theta = V, \quad n^2(X) + \frac{d^2\theta}{dt^2} = n^2 X,$$

so folgt:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + n^2 \alpha^2 \sin V \cos V = n^2 X. \qquad (\alpha^2 = \varepsilon.)$$

Wäre nun ε constant, so könnte man die vorige Lösung anwenden. Da aber ε wegen der kleinen Grössen σ in den L sich langsam ändert, so muss man, wenn die vorige Lösung benutzt werden soll, die Methode der Variation der Constanten anwenden.

Die in dieser Arbeit gelieferten Untersuchungen Gyldén's beziehen sich sämtlich auf Differentialgleichungen, die erst unter für einen langen Zeitverlauf in ihrer Tragweite schwer berechenbaren Vernachlässigungen die Gestalt erhalten, auf welcher die Convergenzuntersuchungen beruhen. Daher können sie über die

Frage, ob die in der Astronomie gebräuchlichen Reihen wirklich zu einer absoluten Lösung führen, keine Entscheidung geben.

Dz.

R. Radau. Formules différentielles pour la variation des éléments d'une orbite. C. R. CV. 432-434.

Wenn man bei der Verbesserung der Bahnelemente durch Differentialformeln die zu den beiden Coordinaten eines beobachteten geocentrischen Ortes gehörigen Gleichungen durch passende Multiplicatoren linear mit einer verbindet, so lassen sich, wie gezeigt wird, zwei von den gesuchten Unbekannten gleichzeitig beseitigen. Es wird deshalb vorgeschlagen, zunächst nur diese Combination zur Bestimmung der darin vorkommenden Unbekannten zu benutzen. Es ist leicht ersichtlich, dass dieses Verfahren bei einer Ellipse und nur drei Normalörtern versagt, und dass ferner in jedem andern Falle auf die Ausgleichung der Beobachtungen verzichtet wird. B.

R. Radau. Sur le calcul approximatif d'une orbite parabolique. C. R. CV. 457-460.

Durch eine Art von Zusammenziehung der Methoden von Olbers und Laplace gelangt der Herr Verfasser zu einem Bahnbestimmungsverfahren, welches hinreichend einfach ist, allerdings nur, so lange es sich um eine erste Annäherung handelt.

B.

A. Seydler. Beitrag zur Lösung des Kepler'schen Problems. Prag. Ber. 547. (Böhmisch.)

Enthält eine in zweifacher Weise durchgeführte Vereinfachung der Encke-Herz'schen Auflösungsmethode nebst zugehöriger Tabelle der Werte von

$$y = \operatorname{arctg} \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}$$

für $e = 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$. Std.

A. Seydler. Weitere Beiträge zur Lösung des Kepler'schen Problems. Prag. Ber. 734. (Böhmisch.)

Enthält eine neue, noch schneller zum Ziele führende Annäherungsmethode nebst den zugehörigen drei Tabellen und Beispielen. Std.

A. Weiler. Ueber die Form der Integrale in dem Problem der drei Körper. Astron. Nachr. No. 2762.

Bei den gebräuchlichen Entwickelungen über Störungen ergeben sich dieselben als eine unendliche Summe von trigonometrischen Functionen des Winkels α von der Form:

$$\alpha = c(g+\gamma t)+c_1(g_1+\gamma_1 t)+b(f+\beta t)+b_1(f_1+\beta_1 t),$$

wo die c und b alle positiven und negativen ganzen Zahlen, t die Zeit und die übrigen Coefficienten unveränderliche Werte bedeuten. Dies gilt aber nur, wenn man ausschliesslich die Entfernungen der Körper darstellen will; geht man zu den Coordinaten selbst über, so tritt noch ein fünftes von der Zeit linear abhängiges Argument hinzu. Dz.

M. Brendel. Ueber einige in neuerer Zeit angewandte Formen für die Differentialgleichungen im Problem der drei Körper. Astron. Nachr. No. 2771.

Herr Harzer hat bei seinen Untersuchungen über die Bahn des Planeten (108) Hekuba Differentialgleichungen aufgestellt, welche aus derselben Quelle fliessen wie die von Gyldén angegebenen (s. S. 938 dieses Bandes), auf dessen Veranlassung Herr Brendel diese Untersuchung angestellt hat. Diese Methode besteht im wesentlichen darin, dass die Differentialgleichungen in ihrer ursprünglichen reinen Form durch Einführung von mehr Variabeln, als nötig ist, erheblich belastet werden, und dass dann diese neuen Variabeln so festgesetzt werden, wie es der jeweiligen Absicht, welche mit ihrer Einführung bezweckt wurde, am besten entspricht. Die Harzer'sche Entwickelung ist dann ein besonders zugeschnittener Fall der allgemeineren Entwickelungen von Gyldén. Dz.

P. HARZER. Ueber ζ Cancri. Astron. Nachr. No. 2764.

Der Stern ζ Cancri erweist sich bei der Untersuchung durch das Fernrohr als ein System von drei ziemlich gleich hellen Sternen, und da man ihnen in Folge dessen ungefähr gleich grosse Massen zuschreiben kann, so ist hier der allgemeine Fall des Dreikörperproblems vorhanden, ohne dass in der Kleinheit einer Masse sich ein Anhaltspunkt für die Entwickelung bietet. Herr Harzer ist nun der Meinung, dass die beobachteten Flächengeschwindigkeiten, wie sie sich auf die Himmelskugel projiciren, nicht der bekannten zwischen ihnen stattfindenden Gleichung genügen können, man mag für die unbekannten Massen eine Wahl treffen, welche man wolle. Deshalb müssen zu dem System noch andere bislang noch nicht gesehene Sterne gehören, eine Mutmassung, zu der sich bereits C. Struve und Seeliger, aber beide aus verschiedenen Gründen, bekannt haben. Dz.

G. W. HILL. Coplanar motion of two planets, one having a zero mass. Ann. of Math. III. 65-73.

Wenn zwei Planeten in derselben Ebene um ihren Centralkörper kreisen, so kann man im allgemeinen Dreikörperprobleme zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung streichen. Ist ferner die Masse des einen gleich Null, so bewegt sich der andere nach den Kepler'schen Gesetzen, und darnach sind nur die beiden Coordinaten des ersteren die beiden Unbekannten, welche durch zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt werden. Hill stellt diese auf, wandelt sie durch Einführung neuer Variabeln anstatt der Coordinaten um und führt dann anstatt der Zeit die excentrische Anomalie ein. Nach einem Versuch, elliptische Coordinaten einzuführen, der sich aber als nicht fördernd erweist, gelangt er durch eine nochmalige Einführung neuer complexer Variabeln zu zwei symmetrischen Differentialgleichungen. Für deren Integration setzt er unendliche Reihen an, wie sie in der Astronomie üblich sind. Endlich trennt er noch den Fall, dass der erste Planet sich im Kreise bewegt, und entwickelt das bekannte von Jacobi gefundene Integral. Die Untersuchungen

werden zur Störungsberechnung des Hyperion durch Titan vorgeschlagen und am Erdmond erläutert. Dz.

G. D. E. Weyer. Interpolation für die Mitte bei periodischen Functionen. Astron. Nachr. No. 2804.

Es werden die Formeln für die Interpolation von periodischen Functionen einer Variablen x angegeben, wenn die Function für gleich weit von einander entfernte Werte von x bekannt ist, und im besonderen wird gezeigt, wie man einfach für die Mitte dieser Werte die Function berechnen kann, ohne alle trigonometrischen Coefficienten einzeln heranzuziehen. Dz.

A. Hall. A special case of the Laplace coefficients $b_s^{(i)}$. Annals of Math. III. 1-11.

Die vorliegend auseinandergesetzte Methode zur Berechnung der Coefficienten b in der Reihe

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}b_0+b_1\cos\theta+b_2\cos 2\theta+\cdots$$

besteht in der recursiven Berechnung der b aus b_0 und b_1 und in der Berechnung von b_0 und b_1 durch elliptische Integrale mittels der Landen'schen Transformation. B.

J. B. Flamme. Thèse d'Astronomie. Recherches des expressions approchées des termes très éloignés dans les développements du mouvement elliptique des planètes. Paris. 128 S. 4°.

J. Gerst. Allgemeine Methode zur Berechnung der speciellen Elementenstörungen in Bahnen von beliebiger Excentricität. Wien. Ber. XCVI. 699-726.

Die Formeln für die Störungen elliptischer Elemente in ihrer gewöhnlich benutzten Gestalt versagen bekanntlich, wenn es sich um eine parabolische oder nahezu parabolische Bahn handelt.

Dieser Uebelstand wird von Herrn Gerst dadurch vermieden, dass er an die Stelle der mittleren Anomalie resp. der mittleren Bewegung als Bestimmungsstücke die doppelte Sectorfläche resp. die doppelte Flächengeschwindigkeit einführt. Es ist sofort ersichtlich, dass man auf diese Weise Formeln erhält, die für jeden Kegelschnitt gelten. B.

AND. LINDSTEDT. Ueber ein Theorem des Herrn Tisserand aus der Störungstheorie. Acta Math. IX. 381-384.

Die gewöhnlich gebrauchten Annäherungsmethoden in der Störungstheorie führen auf Ausdrücke der Entfernungen dreier Körper durch die Zeit, welche die Eigentümlichkeit besitzen, periodische Functionen von vier Argumenten g zu sein, von denen jedes von der Form $at+b$ ist. Dieses Resultat, welches von Lindstedt mittels der Form, welche Lagrange dem Problem der drei Körper gegeben, ebenfalls abgeleitet worden ist, hat Tisserand dahin erweitert, dass dasselbe auch in Bezug auf die Coordinaten gilt, wenn die xy-Ebene mit der unveränderlichen Ebene zusammenfällt und das Coordinatensystem eine gewisse gleichförmige Rotation um die z-Axe besitzt. Lindstedt beweist diesen Satz durch Einsetzung der obigen Ausdrücke für die Entfernungen in die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wodurch diese in lineare umgewandelt werden, deren Integrale noch zwei neue Argumente der Form $at+b$ enthalten. Das eine dieser Argumente muss aber, wie rückwärts aus Einsetzung dieser Ausdrücke in die früheren für die Entfernungen erhellt, herausfallen, und hieraus folgt durch eine rechtwinklige Coordinatentransformation das Tisserand'sche Resultat. Wesentlich gekennzeichnet werden diese Untersuchungen durch den Schlusssatz: „Dass übrigens die obigen Entwickelungen ohne Berücksichtigung der Convergenzfrage gemacht worden sind und somit vorläufig bloss formale Bedeutung besitzen, braucht wohl kaum angedeutet zu werden.“ (Vgl. F. d. M. XV. 1883. 982, XVI. 1884. 1105.) Dz.

H. ANDOYER. Contribution à la théorie des orbites intermédiaires. Toulouse. Ann. 1 M. 1-72.

Im Anschlusse an die Gyldén'schen Untersuchungen, jedoch mit Benutzung der Laplace'schen Störungsgleichungen, wird eine übersichtliche Darstellung der bisherigen Versuche zur Aufstellung von intermediären Bahnen gegeben und als Erläuterung der Fall der Mondbahn behandelt. B.

H. Andoyer. Sur une équation différentielle que l'on rencontre dans la théorie des orbites intermédiaires. C. R. CIV. 1425-1427.

Die Differentialgleichung, für welche die Form der Integrale nachgewiesen wird, hat die Gestalt

$$\frac{d^3\varrho}{dv^3}+2\alpha\sin(\lambda v-A)\frac{d^2\varrho}{dv^2}+(\beta+2\gamma\cos\lambda v)\frac{d\varrho}{dv}+2\delta\sin\lambda v=0,$$

wo die α, β, γ, δ Constanten bedeuten. B.

B. Baillaud. Sur le nombre de termes de certains développements de la fonction perturbatrice. Toulouse Mém. (8) IX. 377-382.

In einer früheren Note (Toulouse Mém. 1886, F. d. M. XVIII. 1886. 1104) hatte Herr B. eine Abzählung der Glieder in einer von ihm aufgestellten und für starke Neigungen berechneten Entwickelung der Störungsfunction gegeben. Der vorliegende Aufsatz enthält eine Erweiterung der Resultate für eine zweite Entwickelung, die für kleine Neigungen bestimmt ist. B.

Ormond Stone. On the orbit of Hyperion. Ann. of Math. III. 161-171.

Verfasser berechnet die Störungen, welche der eine Saturnmond Hyperion von einem der anderen, Titan, erfährt, und geht dabei von der Annahme aus, dass beide ursprünglich kreisförmig um den Saturn sich bewegten. Die Störungsfunction kann hier nicht auf zweckmässige Weise nach Potenzen des Verhältnisses der grossen Axen entwickelt werden, weil dieses der Einheit

zu nahe kommt. Deshalb berechnet Stone die Coefficienten der Entwickelung derselben nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen der Differenzen der mittleren Längen beider Monde auf dem Wege der Interpolation. Indem er die Störungen des Radiusvectors und der wahren Länge des Hyperions in gleicher Form mit unbestimmten Coefficienten ansetzt, gelangt er durch Einsetzen derselben in die Störungsgleichungen zu Bedingungen, aus welchen er bei gegebener Masse des Titans zu diesen Coefficienten kommen kann. Da aber der eine derselben, welcher von dem dreifachen Unterschiede beider mittleren Längen abhängt, nach Tisserand die anderen bedeutend überwiegt, und schon annähernd bekannt ist, so benutzt dies Stone, um umgekehrt aus ihm die Masse Titans zu berechnen, welche er acht mal so gross findet als früher Tisserand und gleichfalls viel grösser als Newcomb.

Dz.

Glauser. Die Lage der Asteroidenbahnen. Astr. Nachr. Nr. 2794.

Trägt man die Pole der Bahnebenen der Asteroidenbahnen auf einer Karte auf, so ergeben die Bilder eine rundliche Wolke welche ziemlich gleichmässig um einen Punkt gelagert ist, aber nicht um den Pol der Ekliptik, sondern ungefähr um den der Jupiterbahn. Dieses Resultat folgt theoretisch aus den säcularen Veränderungen der Bahnebenen der Asteroiden, welche, wenn sie vom Jupiter allein bewirkt würden, gemäss den bekannten Annäherungsformeln bei unveränderlicher Neigung gleichmässig rückläufige Knotenbewegung, deren Geschwindigkeit von Planet zu Planet wechselte, ergeben würden. Bei Zuziehung des Saturns ändert sich das Verhältnis ein wenig. Die Häufigkeit des Vorkommens der Pole tritt dann in Beziehung zu einem um den Jupiterbahnpol herum liegenden Quadranten, und zeigt Rechnung und Erfahrung eine allerdings nur schwache Uebereinstimmung. Dz.

W. Láska. Zur Theorie der planetarischen Störungen. Wien. Ber. XCVI. 952-956.

F. Tisserand. Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire. C. R. CIV. 259-265.

Unter Anwendung der von Delaunay in seiner Mondtheorie benutzten Integrationsmethode wird an einem einfachen Beispiel gezeigt, dass die Annahme commensurabler mittlerer Bewegung keineswegs mit der Stabilität unverträglich ist. B.

L. Niesten. De l'influence de la nutation diurne dans les discussions des observations de γ Draconis faites à l'observatoire de Greenwich. Belg. Mém. C. XL. 16 S.

J. C. Houzeau et F. Folie. Rapport sur ce Mémoire. Belg. Bull. (3) XIII. 70-71, 72-75.

Hr. Niesten findet für diesen Stern eine positive Parallaxe, und seine Arbeit scheint das Vorhandensein der täglichen Nutation zu beweisen. Mn. (Lp.)

F. Folie et J. C. Houzeau. Rapport sur une démonstration pratique par M. Niesten de la nutation diurne. Belg. Bull. (3) XIII. 398-404, 405-406.

Vorläufige Bestimmung der täglichen Nutation durch Benutzung neuer Beobachtungen von Circumpolarsternen.

Mn. (Lp.)

F. Folie. Note sur la troisième partie de sa théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde. Belg. Bull. (3) XIV. 203-204.

Der dritte Teil dieser grossen Arbeit handelt von den säcularen Aenderungen. Als Anhang werden die Formeln gegeben, welche gleichzeitig die Aenderungen in der Neigung und Länge ausdrücken, wie diese aus der Theorie des Verfassers und aus der Annahme der Constanten von Struve und Peters für die Präcession und Nutation, von Leverrier und Oppolzer für die säculare Aenderung der Ekliptik sich ergeben. Die auf die Neigung bezüglichen Formeln stimmen mit den Beobachtungen besser über-

ein als die vorangehenden; wenn jedoch die Beobachtungen alt sind, so sind Abweichungen zu erklären; vielleicht rühren dieselben davon her, dass die Neigung bei der Integration als constant betrachtet werden kann.

In einem Zusatze zum ersten Teile zeigt der Verfasser, dass die tägliche Nutation ein halbtägiges Schwanken der Erdrinde um ihre Umdrehungsaxe zur Folge hat, eine Art stündlicher Nutation, deren Maximum ein Sechshundertstel einer Secunde beträgt; diese Nutation kommt unter der Breite 45° durch eine Abweichung von 20 Metern in der linearen Verschiebung eines Punktes der Erdrinde zur Erscheinung. Mn. (Lp.)

F. Folie et J. Houzeau. Rapport sur le Mémoire intitulé: Détermination de la direction et de la vitesse du transport du système solaire dans l'espace, 2me partie, par P. Ubaghs. Belg. Bull. (3) XIII. 66-68, 69-70.

Die gefundene Geschwindigkeit ist erheblich geringer als diejenige, zu welcher andere Rechner gelangt sind.

Mn. (Lp.)

F. Folie. Praktischer Beweis der täglichen Nutation. Astron. Nachr. No. 2768.

Bei Beibehaltung der von dem täglichen Umschwung der Erde abhängigen Glieder in der Nutation der Schiefe und Länge der Erdaxe zeigt sich ein constanter Factor K, welcher etwa $= 0'',0023$, also unmerklich sein würde, wenn die Erde ganz starr wäre, welcher aber, wenn die Erde als im Innern flüssige Masse in Rücksicht gezogen wird, einen viel beträchtlicheren Wert annehmen kann, so dass er, wie aus Berechnungen des Herrn Niesten sich ergiebt, aus den Beobachtungen sich nachweisen lässt. Dz.

P. Schwahn. Ueber Aenderungen der Lage der Figur- und der Rotations-Axe der Erde sowie einige mit dem Rotationsproblem in Beziehung stehende geophysische Probleme. Diss. Berlin. 51 S. 4°.

J. W. Häussler. Die Entstehung des Planetensystems mathematisch behandelt. Exner Rep. XXIII. 719-730.

Der Verfasser geht von denselben Vorstellungen über die Entstehung der Gravitation aus, welche er in seiner Abhandlung entwickelt hatte: „Die Schwere analytisch dargestellt als ein mechanisches Princip rotirender Körper". Referent hat die Fehlschlüsse dieser Abhandlung in zwei Noten nachgewiesen (vgl. oben S. 1043); mit den Prämissen fallen aber auch die in der vorliegenden Abhandlung aus ihnen gezogenen Schlüsse.

Lp.

A. Ganser. Die Entstehung der Bewegung. Eine Kosmogonie. Graz. 15 S. 8°.

A. Ganser. Das Ende der Bewegung. Fortsetzung der Kosmogonie. Graz. 18 S. 8°.

Bericht auf S. 50 dieses Bandes.

Hamy. Thèse d'Astronomie. Étude sur la figure des corps célestes. Paris. 53 S. 4°.

Zelbr. Astronomischer Wandkalender. Wien. C. Gerold Sohn.

In eine Sternkarte sind die scheinbaren Oerter von Sonne, Mond und den grossen Planeten für das laufende Jahr anschaulich eingetragen.

Lp.

O. Callandreau. Recherches sur la théorie de la figure des planètes. C. R. CV. 1171-1173.

O. CALLANDREAU. Mémoire sur la théorie de la figure des planètes. C. R. CIV. 1600-1602.

T. v. OPPOLZER. Canon der Finsternisse. (Enthaltend die Berechnung der Elemente und Hilfsgrössen aller Finsternisse vom 10. Novbr. 1207 v. Chr. bis 17. Novbr. 2161). Wien. 376 S. u. 160 lith. Taf.

F. KOERBER. Ueber den Kometen 1865 I. Diss. Breslau. 58 S. 8°.

SOUILLART. Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter. Partie II. Réduction des formules en nombres. Paris. 200 S. 4°.

Capitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

TH. EPSTEIN. Geonomie (mathematische Geographie), gestützt auf Beobachtung und elementare Berechnung. Wien. C. Gerold's Sohn. XVI u. 576 S.

Dieses Werk enthält in klarer Darstellung, welche gelegentlich auch verwickelteren analytischen Betrachtungen nicht aus dem Wege geht, einen grossen Teil dessen, was man auch sonst in Lehrbüchern der mathematisch-physikalischen Erdkunde anzutreffen pflegt, und zwar gründlicher ausgeführt, als dies gemeiniglich geschieht; dafür fehlen aber manche Abschnitte, auf welche wir unbedingt gerechnet haben würden, ohne dass wir diese Stoffbeschränkung gerechtfertigt erblickten. Eine gedrängte Inhalts-

anzeige wird ergeben, dass unser Urteil ein zutreffendes ist. Der Verfasser beginnt mit eingehender Erörterung der sphärisch-astronomischen Verhältnisse, indem er zugleich umfängliche Belehrungen über die Astrognosie mit einflicht; hierauf wird die Gestalt und Grösse der Erde bestimmt, und insbesondere wird den entscheidenden Gradmessungen ein sehr bedeutender Raum gegönnt. Diese Bestandteile des Buches bieten auch dem Fachmanne viel Neues und Interessantes, da der Verfasser direct aus den doch immer nur einer Minderzahl zugänglichen Quellen geschöpft und insbesondere von den Instrumenten und Messungsmethoden, deren sich die zur Festsetzung des Metermasses ausgeführte Erdmessung bediente, treue Beschreibungen geliefert hat. Ebenso sind auch die späteren Erdmessungen sorgfältig berücksichtigt, und es wird auch u. a. an der Hand durchgerechneter Zahlenbeispiele dargethan, dass und wie man mittels des Ausgleichungsverfahrens jenes Ellipsoid zu bestimmen vermag, welchem sich unter verschiedenen Breiten gemessene Meridianbogen am besten anpassen. Nachdem sodann auch der Längengradmessungen kurz gedacht ist, wird die Bestimmung der Abplattungsgrösse durch Pendelbeobachtungen besprochen. Nächstdem kommt die Bewegung der Erde an die Reihe; die Entstehung der Jahreszeiten und Erdzonen, die Umwandlung der sphärischen Coordinatensysteme, die Präcession, die Kepler'schen Gesetze, die Berechnung der Zeitgleichung und vieles andere finden wir beisammen im vierten Capitel, dessen Inhalt nicht gerade homogen ist, und das wohl besser eine Entlastung durch Verteilung einiger Materien auf andere Abschnitte erfahren hätte. Nunmehr wird zur Erklärung der einzelnen Erscheinungen übergegangen, die Beweise für Rotation und Revolution werden in ansprechender Weise erörtert, und es wird auch, was sehr zu billigen ist, auf die älteren Versuche, von dem Laufe der Planeten sich selbst Rechenschaft zu geben, Bezug genommen. Besondere Hervorhebung verdient der Finsterniscalcul, von dessen Wesen es dem Verfasser, gestützt auf zweckentsprechende Zeichnungen, gelungen ist, ein sehr anschauliches Bild zu entwerfen. Hieran reihen sich weiterhin geophysikalische Betrachtungen — allgemeine Gra-

vitation, Ebbe und Flut, ältere und neuere Methoden zur Ermittelung der Erddichte — und den Schluss des Ganzen bildet ein Anhang, „Bestimmung der Zeit und der geographischen Lage" betitelt. — Auf diese Darlegung hin können wir nunmehr zu unserer oben aufgestellten Behauptung zurückkehren, dass das Epstein'sche Buch, mannigfacher Vorzüge ungeachtet, an dem Mangel einer nicht gleichförmigen Durcharbeitung des Gesamtstoffes leidet. Das grosse, mit den Fortschritten der entdeckenden Geographie von Tag zu Tag wichtiger werdende Problem der geographischen Ortsbestimmung ist ganz unbegreiflich kurz weggekommen, und schon unter dem systematischen Gesichtspunkte war es nicht richtig, dasselbe in einen Anhang zu verweisen. Auch schliesst dieses Problem, wenn es anders Pflicht der mathematischen Geographie ist, auf die Frage: „Wo befindet sich ein Punkt der Erdoberfläche?" erschöpfende Antwort zu erteilen, die Aufgabe in sich, neben den beiden Angularcoordinaten, Breite und Länge, nicht minder die dritte, lineare Coordinate, den Abstand des fraglichen Punktes von der zur Norm gewählten Niveaufläche zu bestimmen. Des weiteren aber hätte der Verfasser, nachdem er 106 Seiten den Gradmessungen gewidmet, doch notwendig auch die Thatsache schärfer präcisiren müssen, dass die geodätische und die physikalische Methode der Bestimmung der Erdgestalt niemals mit einander zu endgiltiger Concordanz gebracht werden können, und zwar nicht bloss wegen der Unmöglichkeit, Messungsfehler gänzlich zu vermeiden, sondern noch mehr wegen innerer Schwierigkeiten, die darin gipfeln, dass die Erdoberfläche eben kein wirkliches Sphäroid ist. Dass in einem so vieles bietenden Buche Ausdrücke wie „Geoid" und „Niveaufläche" vergeblich gesucht werden, das ist ein Uebelstand, den wir für eine zweite Auflage dringend zur Abhülfe anempfehlen möchten. Gr.

A. Steinhauser. Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojection. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Wien. Fr. Beck. 155 S.

Das Steinhauser'sche Lehrbuch ist so allgemein bekannt,

dass eine eingehende Besprechung desselben nicht mehr angezeigt erscheinen kann. Sein Schwerpunkt liegt in der Projectionslehre, und namentlich diese hat denn auch in der vorliegenden Neuauflage manche Bereicherung erfahren. Ausführlich zusammengestellt hat der Unterzeichnete die zwischen der zweiten und dritten Ausgabe obwaltenden Unterschiede in seinem für den X. Band des Wagner'schen geographischen Jahrbuches gearbeiteten Berichte über die Fortschritte der theoretischen Kartographie.

Gr.

G. Rusch. Beobachtungen, Fragen und Aufgaben aus dem Gebiete der elementaren astronomischen Geographie. Wien. A. Hoelder.

Die kleine Aufgabensammlung setzt mathematische Kenntnisse nur im allerbescheidensten Masse voraus, so dass selbst von der ebenen Trigonometrie kein Gebrauch gemacht wird. Vielmehr sind die einzelnen Fragen teils durch blosse Ueberlegung, teils auch mit Hülfe des Globus zu lösen, wobei sich der Verfasser an die bekannten Schriften von Adami anlehnt. Sehr zu billigen ist die Erläuterung einiger bei antiken Schriftstellern zu findenden Angaben über Sternbewegung, wie denn überhaupt bei einem ersten Cursus der mathematischen Erdkunde das Büchlein mit Nutzen zu Rate gezogen werden mag. Gr.

A. Tissot. Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Autorisirte deutsche Bearbeitung mit einigen Zusätzen, besorgt von E. Hammer. Stuttgart. J. B. Metzler.

Anzeige durch Gr. in Petermann's Mitt. XXXIV. 30.

Lp.

Gujou. Nouveau système de la projection de la sphère; généralisation du système de Mercator. Revue maritime et coloniale XCIV. 278ff.

Anzeige durch Gr. in Petermann's Mitt. XXX IV. 30-31.

Lp.

M. Fiorini. Le projezioni quantitative ed equivalenti della cartografia. Boll. soc. geogr. it. (2) X, XI, XII.

Anzeige durch Gr. in Petermann's Mitt. XXXIV. 31.

Lp.

Ch. Darwin. Note on the relation between the size of a planet and the rate of mountain-building on its surface. Phil. Mag. (5) XXIV. 394-397.

Die Untersuchungen dieses Aufsatzes stehen im engen Zusammenhange mit denen desselben Autors in einer Abhandlung (Lond. Phil. Trans. CLXXVIII. 231-242), in denen er die Verteilung der Deformation in der Erdrinde zufolge der säcularen Abkühlung ergründete, indem er die Erde zu Anfang bei hoher Temperatur und in Wirklichkeit durchweg als fest annahm. Unter übrigens gleichen Bedingungen ist der Gegenstand dieser Note der Nachweis, dass, je kleiner ein Planet ist, um so schneller die Bergbildung an seiner Oberfläche geschehe, jedenfalls in den frühen Perioden seiner Geschichte. Gbs. (Lp.)

T. Mellard Reade. Origin of mountain ranges. Ref. Nature XXXV. 361-362.

T. Mellard Reade. Secular cooling of the Earth in relation to mountain-building. Phil. Mag. (5) XXIV. 212-214.

Im Capitel XI des erstgenannten Buches, welches bei dem Streite zwischen den Herren Fisher und Davison in Betracht kommt, behauptet der Verfasser, dass die Wirkung säcularer Abkühlung auf die Erdrinde nicht die von der „Contractions-Theorie“ der Bergbildung angenommene sein würde. Er erachtet, dass Hr. Davison (Phil. Trans. CLXXVIII) zu praktisch gleichen Resultaten gekommen ist, obgleich derselbe keinen Bezug auf sein Buch nimmt, wenn man die in der Rinde einer sich abkühlenden

Erde erzeugten Deformationen berücksichtigt; aber in dieser Note hebt er die Abweichungen seiner Ansichten von Hrn. D. hervor in betreff der geologischen Folgen der Deformationen.

Gbs. (Lp).

C. DAVISON. On the distribution of strain in the Earth's crust resulting from secular cooling: with special reference to the growth of continents and the formation of mountain chains. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII (A). 231-242.

G. H. DARWIN. Note on Mr. Davison's paper On the straining of the Earth's crust in cooling. Lond. Phil. Trans. CLXXVIII (A). 242-249. Cly.

O. FISHER. A reply to objections raised by Mr. Charles Davison, M. A., to the argument on the insufficiency of the theory of the contraction of a solid Earth to account for the inequalities or elevations of the surface. Phil. Mag. (5) XXIV. 391-394.

G. GERLAND. Beiträge zur Geophysik. Bd. I. Stuttgart. Schweizerbart.

Anzeige in Petermann's Mitt. XXXIV. 29-30. Lp.

E. v. DRYGALSKI. Die Geoiddeformationen der Eiszeit. I. Teil. Diss. Berlin. 63 S. 8°.

J. COLLET. Les cartes topographiques. — La carte dite de l'État-Major. Historique. Projection. Géodésie. Hypsométrie. Topographie. Critique et lecture. Paris. Gauthier-Villars. gr. 8°.

H. Meyer. Die ersten barometrischen Höhenmessungen im Harz. Met. Zeitschr. IV. 183-184.

Diese Messungen wurden um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts von S. C. Hollmann, damaligem Professor der Physik und Philosophie in Göttingen, auf einer gemeinschaftlich mit dem berühmten Albrecht v. Haller unternommenen Harzreise angestellt. Auf Grund der freilich sehr unvollkommenen Tafeln von Scheuchzer glaubte man gefunden zu haben, dass der Brocken sich 2550 Pariser Fuss über dem Leinethale befinde; eine spätere Correctionsrechnung nach Tob. Mayer ergab 2800 Fuss. In Wirklichkeit beträgt die fragliche Niveaudifferenz 3057 Pariser Fuss = 992 Meter. Gr.

B. Borchardt. Die Entwickelung der Formel für das Höhenmessen mit dem Barometer. Kiel. 1886. 55 S. 8° u. 1 Taf.

W. Ferrel. Recent advances in meteorology, systematically arranged in the form of a text-book designed for use in the signal service school of instruction at Fort Myer, VA., and also for a hand-book in the office of the chief signal office. Washington: Government printing office. (1886). 440 S. 8°.

Das vorliegende Lehrbuch der Meteorologie bildet den zweiten Teil des Annual Report of the chief signal officer of the army to the secretary of war for the year 1885 (Appendix 71) und ist vorbereitet under the direction of brig. and but. maj. general W. B. Hazen, chief signal officer of the army. Der Zweck des Werkes ist, aus dem zugänglichen Materiale die wichtigeren Principien, Methoden und gesicherten Resultate, zumeist aus dem letzten Viertel des Jahrhunderts, auszuwählen und sie in der Form eines Lehrbuches der höheren Meteorologie darzustellen, als eine Ergänzung zu den elementareren Werken. Demzufolge bilden die mathematischen Entwickelungen, die Herleitung und

Begründung der gebräuchlichen Formeln und Tabellen, die Discussionen von Beobachtungsreihen u. dergl. m. einen charakteristischen Zug in der Anlage dieses Buches. Auch die hinzugefügten Beispiele für die beste Art der Anwendung der Formeln werden für viele von Wichtigkeit sein. Folgendes sind die Ueberschriften der einzelnen Capitel: I. Die Constitution und die physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre. II. Temperatur der Atmosphäre und der Oberfläche. III. Die allgemeinen Bewegungen und der Druck der Atmosphäre. IV. Wirbelstürme. V. Tornados. VI. Meteorologische Beobachtungen und ihre Reductionen. VII. Meeresströmungen und ihre meteorologischen Wirkungen. Ein Anhang enthält XIV Tabellen und ein Verzeichnis von 142 Schriften, auf welche im Texte verwiesen ist. Ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis erleichtert das Nachschlagen. Lp.

HAUGHTON, A. R. JOHNSON. Solution of question 8977. Ed. Times XLVII. 69.

Die Form für die Function der irdischen Strahlung ist, wie man bewiesen hat, $A(\theta-\Theta_0)^n = a$, wo A, Θ_0, n unbekannte Parameter bedeuten, θ und a durch die Beobachtung gegeben sind. Die Monatsmittel von Greenwich, welche sich über 36 Jahre erstrecken, geben für

$$\begin{aligned} \text{Januar: } & A(38{,}9-\Theta_0)^n = 21{,}4, \\ \text{Februar: } & A(40{,}4-\Theta_0)^n = 35{,}5, \\ \text{März: } & A(42{,}8-\Theta_0)^n = 55{,}9. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet man

$$A = 13{,}53, \quad n = 0{,}819, \quad \Theta_0 = 37{,}15.$$

Lp.

F. BUSCH. Beiträge zur Erkenntnis des Dämmerungsphänomenes. Progr. Arnsberg.

Der Wert und Zweck dieser inhaltsreichen Abhandlung ist wesentlich ein physikalisch-geographischer. Von mathematischem Interesse sind des Verfassers Messungen der Dimensionen des sogenannten Bishop'schen Ringes; denn wenn man diese Daten mit denjenigen vergleicht, welche sich unmittelbar aus der Beu-

gungstheorie ergeben, so tritt eine auffallende Uebereinstimmung zutage, welche wohl zu dem von Riggenbach aufgestellten und von Busch bestätigten Schlusse berechtigt, „dass die Erweiterung des Bishop'schen Ringes aufzufassen ist als ein Uebergehen des Diffractionsbildes einer weissen Lichtquelle in das einer monochromatisch roten“. Auch die vom Verfasser bestimmten Monatsmittel der Höhen für gewisse charakteristische Stellen des sogenannten Purpurlichtes sind für eine künftige, umfassende Theorie der Dämmerung von Bedeutung. Gr.

D. Kitao. Beiträge zur Theorie der Bewegung der Erdatmosphäre und der Wirbelstürme. Journ. of the College of Science Japan. I. 113-209.

Von der Betrachtung sind alle localen unregelmässigen Einflüsse ausgeschlossen; die Erde wird als Kugel ohne Erhebungen der Oberfläche behandelt, die Reibung der Luft an der Oberfläche durch eine auf jeden Punkt der Atmosphäre wirkende, in grösserer Höhe verschwindende Kraft ersetzt und nebst der Erdrotation in die aerodynamischen Differentialgleichungen eingeführt; die Dichte-Function bleibt allgemein, ihre Bestimmung der späteren Betrachtung vorbehalten. Aus der analytischen Rechnung werden u. a. folgende Schlüsse gezogen. Die cyklonale Windbahn schneidet die Isodynamen unter kleinerem Winkel als die anticyklonale, hat mithin stärkere Krümmung. Eine Luftströmung, die einmal als reiner Ost oder West auftritt, behält die Richtung bei. Im Raumgebiet der wirbelfreien Horizontalströmung schneidet die Windbahn die Isodynamen überall unter gleichem Winkel. die Arbeit behandelt nach einander: die allgemeinen Differentialgleichungen für die Bewegung der Atmosphäre; allgemeine Beziehungen zwischen Isodynamen, Windbahn und Wirbelaxe; die Integration nach dem Raume; Bewegungsgleichungen unter specieller Annahme; wirbelfreie Luftströmung im Raumgebiete der horizontalen Bewegung; kreisförmige Cyklonen und Anticyklonen. Von Vorgängern der Arbeit werden genannt: C. M. Guldberg und Mohn, Études sur les mouvements de l'at-

mosphère, 1876. — Oberbeck, Ueber die Bewegung der Luft an der Erdoberfläche. Wiedemann Ann. XVII. 1882. Sprung, Zur Mechanik des Windes. Arch. d. deutschen Seewarte. II. 1879. (F. d. M. VIII. 617, XIV. 791.) H.

W. Siemens. Zur Frage der Luftströmung. Met. Zeitschr. IV. 425-428.

Diese Note ist im wesentlichen eine Entgegnung auf eine Arbeit von Moeller; der Verfasser betont, dass die Ursachen der Druckveränderungen und der aus diesen resultirenden Stürme keine lokalen seien, sondern in den durch die starke Insolation der Luft innerhalb der Tropenzone entstehenden äquatorialen Auftrieben gesucht werden müssten. Wenn Dove, so schliesst der Verfasser, bereits das Wesen des Satzes von der Erhaltung der Energie gekannt resp. vollständig durchdrungen hätte, so würde er seiner einen richtigen Kern bergenden Theorie der atmosphärischen Gesamtcirculation eine Gestalt haben verleihen können, die der ersteren eine dauernde Geltung gesichert haben würde. Gr.

J. Kleiber. Periodische Schwankungen der Atmosphäre zwischen beiden Halbkugeln der Erde. Met. Zeitschr. IV. 11-14.

Die Gebiete hohen Luftdruckes wandern, im Zusammenhange mit dem veränderlichen Sonnenstande, im Laufe des Jahres von einer Halbkugel der Erde zur anderen. Man muss also annehmen, dass in der einen Jahreszeit die nördliche, in der anderen die südliche Hemisphäre einen Ueberschuss an Luftmasse besitzt, und um den Betrag dieser Luftmasse richtig schätzen zu können, muss man Isobarenkarten in flächentreuer Projection zu Grunde legen. Solche werden vom Verfasser construirt, und zwar hat er sich für die — in ihrer Haupteigenschaft ein der Mercator-Karte gerade zuwiderlaufendes Bild gewährende — isocylindrische Abbildung von Lambert entschieden. Diese Darstellung ist entschieden verdienstvoll, obwohl sie an dem Fehler leiden muss,

die Höhe und Böschung der aus dem Meere aufragenden Continentalmassen zunächst unberücksichtigt zu lassen. Gr.

H. Meyer. Untersuchungen über das Sättigungsdeficit. Met. Zeitschr. IV. 113-124.

Wenn es darauf ankommt, den Mittelwert Δ_m des Sättigungsdeficits aus einer längeren Reihe n von Beobachtungen herzuleiten, so kann man sich der Formel bedienen:

$$\Delta_m = \frac{1}{n}(\Sigma s_k - \Sigma a_k).$$

Dabei bedeutet a_k die einzelnen Werte der absoluten Feuchtigkeit, s_k jeweils das zugehörige Spannungsmaximum. Das von Weihrauch angegebene graphische Verfahren ermöglicht es, auch ohne Bestimmung der einzelnen s_k zum Ziele zu gelangen. Der jährliche Temperaturgang bewirkt es, dass sich auch in den für das Sättigungsdeficit ermittelten Werten eine Jahresperiode ausspricht. Endlich wird durch Vergleichung der den einzelnen Monaten an besonders vom Föhn heimgesuchten Orten entsprechenden Werte von Δ_m nachgewiesen, dass diesem warmen Fallwinde im Sommer eine grössere austrocknende Kraft als im Winter zukommt. Gr.

F. Erk. Die verticale Verteilung und die Maximalzone des Niederschlages am Nordabhange der bayerischen Alpen. Met. Zeitschr. IV. 55-69.

Die meteorologischen Ergebnisse dieser Abhandlung können, so viel Interesse sie an und für sich besitzen, an diesem Orte keine Erörterung finden. Wohl aber verdient es unter dem rein geometrischen Gesichtspunkte bemerkt zu werden, dass Herr Erk die von ihm erstmalig der Meteorologie dienstbar gemachte Versinnlichung der Gleichung $z = f(x,y)$ durch sogenannte „Isoplethen", von welcher er früher nur für den Temperaturgang Gebrauch gemacht hatte, nunmehr auch dazu anwendet, die Abhängigkeit der Niederschlagsmengen von der Meereshöhe in ein übersichtliches Bild zu bringen. Gr.

Anhang.

T. H. SAFFORD. Mathematical teaching and its modern methods. Boston. 49 S.

C. S. FULLERTON. The conception of the infinite and the solution of the mathematical antinomies. Philadelphia.

J. BLATER. Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200000, welche die Ausführung von Multiplicationen, Quadrirungen und das Ausziehen der Quadratwurzeln bedeutend erleichtert und durch vorzügliche Correctheit fehlerlose Resultate verbürgt. Wien. A. Hölder. XVI u. 205 S. 4°.

Diese Tafeln geben die Viertel-Quadrate aller Zahlen von 1 bis 200000 und ergeben so durch zweimaliges Aufschlagen die Multiplication zweier 5-ziffrigen Zahlen nach der Formel

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

bis zur letzten Stelle genau. Multiplicationen mit 6- und 7-ziffrigen Zahlen lassen sich durch kleine Nebenrechnungen noch leicht ausführen, für noch grössere Zahlen wird die Zahl de aufzuschlagenden Zahlen und der Nebenrechnungen eine ̦ir

grössere, so dass für 9- und 10-ziffrige Zahlen die gewöhnliche Multiplication schneller zum Ziele führt. In der Einleitung sind die Hülfsmittel, die sowohl bei der Multiplicirung als Quadrirung und der Wurzelausziehung angewandt werden müssen, falls die Zahlen die Grenzen der Tafeln überschreiten, genau angegeben, und zur Erleichterung von numerischen Rechnungen ist noch eine Napiertafel von 4 mal 10 Zifferstäbchen beigegeben.

Die Zahlen, zu denen die Viertel-Quadrate gesucht werden, sind in den Tafeln so geordnet, dass in der ersten Verticalcolonne *N* die Tausender, in der ersten Horizontalcolonne *n* die Hunderter, Zehner und Einer stehen.

Die Quadratzahlen selbst sind in drei Teile *A*, *B*, *C* zerlegt; *A* giebt die Zahl der Millionen, *B* die der Tausende und *C* die letzten drei Ziffern. Durch diese geschickte und übersichtliche Anordnung ist es gelungen, das ganze Zahlen-Material auf 200 Seiten zusammenzudrängen, obgleich die Ziffern die in den gebräuchlichen siebenstelligen Logarithmentafeln verwandten an Grösse übertreffen. Der Druck und die Ausstattung der Tafeln sind vorzüglich. Hch.

J. Perott. Sur les logarithmes à un grand nombre de décimales et en particulier sur les tables de M. Steinhauser. Darb. Bull. (2) XI. 51-60.

Es wird der Gewinn, den der Gebrauch einer 20-stelligen Logarithmentafel, wie der von Steinhauser, gewähren kann, für besondere Fälle angegeben, dann viele Fehler, die sich in letzterer finden, bemerkt. H.

Howe. On logarithmic errors. Annals of Math. III. 74.

H. G. Köhler. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Fünfzehnte Stereotypausgabe. (XXXVI u. 338 S.) Leipzig. B. Tauchnitz.

Der vollständige Titel des Buches heisst:

Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, welches die ge-

meinen oder Briggischen Logarithmen für alle Zahlen bis 108000 auf sieben Decimalstellen, die Gaussischen Logarithmen, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von zehn zu zehn Secunden für die neun ersten und neun letzten Grade des Quadranten und von Minute zu Minute für die übrigen Grade desselben, goniometrische Formeln und einige andere mathematische Tafeln, die oft gebraucht werden, enthält. Hch.

Th. Wittstein. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Zweite Auflage. Hannover. Hahn. 20 S.

Die Tafeln enthalten die Logarithmen der natürlichen Zahlen bis 1899, die Logarithmen der Summen und Differenzen, die natürlichen trigonometrischen Zahlen für halbe Grade, die Logarithmen der trigonometrischen Zahlen in Intervallen von 10 Minuten und die Antilogarithmen bis 999. Hch.

G. v. Vega. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Ausgabe, bearbeitet von C. Bremiker. 70 Aufl. von E. Tietjen. XXVIII. 575 S. Berlin. Weidmann.

O. Müller. Tavole dei logaritmi con 5 decimali. 2ª ed. Milano. Hoepli.

R. Mazzola. Manuale pratico per il calcolo logaritmico secondo le tavole logaritmiche di V. Callet. 1 vol. in 8⁰.

J. Morton. Collection of mathematical rules and tables. 2nd ed., enlarged. Philadelphia. 224 S.

W. Jordan. Die Leibniz'sche Rechenmaschine. Jordan Z. f. V. XVI. 226-229.

Kurze, durch Zeichnung erläuterte Beschreibung der in der Königl. Bibliothek zu Hannover befindlichen, von Leibniz im Jahre 1673 erfundenen Original-Rechenmaschine, mit einem Auszug aus Leibniz' Werken, S. 413-415. P.

E. Selling. Eine neue Rechenmaschine. Berlin. 51 S. 8°.

E. M. Laquière. Géométrie de l'échiquier. Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier; considérations numériques sur une série de solutions semi-régulières. Paris. 56 S. 8°.

E. Lucas. Les carrés magiques de Fermat et de Frénicle Paris. 31 S. 8°.

Ch. Hermite. Cours de la Faculté des Sciences sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et les fonctions elliptiques. 3e éd. Paris. Lithographié. 8 + 266 S. 4°.

R. Reiff. Die Anfänge der Variationsrechnung. Tübingen. 9 S. 8°.

J. Steiner. Sammlung von Maturitätsfragen aus der darstellenden Geometrie. Wien. A. Hölder. IV u. 115 S.

Eine systematisch geordnete Zusammenstellung der (anscheinend in den letzten 15 Jahren) an den verschiedenen österreichischen Staatsrealschulen gestellten Maturitäts-Prüfungsaufgaben. Die Aufgaben, deren Zahl 1029 ist, sind zunächst in zwei Abschnitte: I. Orthogonale Projection (Grund- und Aufriss), II. Centrale Projection und Perspective, geteilt und beziehen sich im wesentlichen auf Raumconstructionen mit Punkten, Geraden und

Ebenen, ebene Figuren, Kreisprojectionen; Darstellung, Schatten, Beleuchtung, Schnitt, Durchdringung u. s. w. von Polyedern, Kegeln, Cylindern, Kugeln, Rotationsflächen, endlich perspectivische Darstellung von einfachen architektonischen Objecten. Das Buch wird ein willkommenes Hülfsmittel für den Unterricht in der darstellenden Geometrie sein. Hk.

W. S. Binns. Treatise on elementary and advanced descriptive geometry, with a chapter on graphic arithmetic. London. 160 S. 8°.

D. Mayer. A new mode of geometrical demonstration. With examples. Aberdeen. 8°.

F. E. Hulme. Mathematical drawing instruments, and how to use them. London. 8°.

V. J. Keller. Das geometrische und projectivische Zeichnen. Aarau. 39 Taf. 4° u. 4 S. Text.

P. Bert. Premiers éléments de géométrie expérimentale appliquée à la mesure des longueurs, des surfaces et des volumes. 2me éd. Paris. VIII + 92 S. 8°.

Commines de Marsilly. Enumération des lignes courbes planes du troisième degré. Nancy. 20 S. 8°.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite 17 Zeile 3 von unten lies I_3 statt III.
„ 44 „ 5 „ oben „ XXXII statt XXXI.
„ 63 „ 5 „ oben
„ 165 „ 13 „ „
„ 233 „ 5 „ unten } „ XI statt IX.
„ 792 „ 4 „ „
„ 76 „ 16 „ oben „ Murer statt Meurer.
„ 108 „ 2 „ unten „ XXII „ XII.
„ 231 in dem Referate über O. Schlömilch setze man „gewisse Grenzwerte“ statt „Convergenz gewisser Reihen“.
„ 233 Zeile 3 von oben lies CIV statt CII.
„ 315 „ 12 „ unten „ (3)IV statt (3)
„ 711 „ 18 „ oben „ J. de l'Éc. Polyt. statt Delft Ann. de l'Éc. Polyt.
„ 729 Zeile 8 von unten lies K. Döhlemann statt C. Döhlmann.